РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева
Факультет почвоведения, агрохимии и экологии
Кафедра лесоводства и мелиорации ландшафтов

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Ст. преподаватель
Устинова М.А.

Вопросы:

- Понятие аппроксимации закона распределения экспериментальных данных.
- Задачи и требования аппроксимации.
- Аппроксимация на основе типовых распределений
- Логнормальное распределение.
- Гамма распределение.
- Экспоненциальное распределение.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ.

Аппроксимация (от лат. approximo — приближаюсь) — замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным.

Приближение — то же, что аппроксимация, термин «приближение» иногда употребляется в смысле приближающего объекта.

Интерполяция— в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Модель (фр. modele, от лат. modulus — мера, образец) — любой образ какого-либо объекта, процесса или явления («оригинала» данной модели), используемый в качестве его «заместителя, «представителя»

Математическая модель — приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

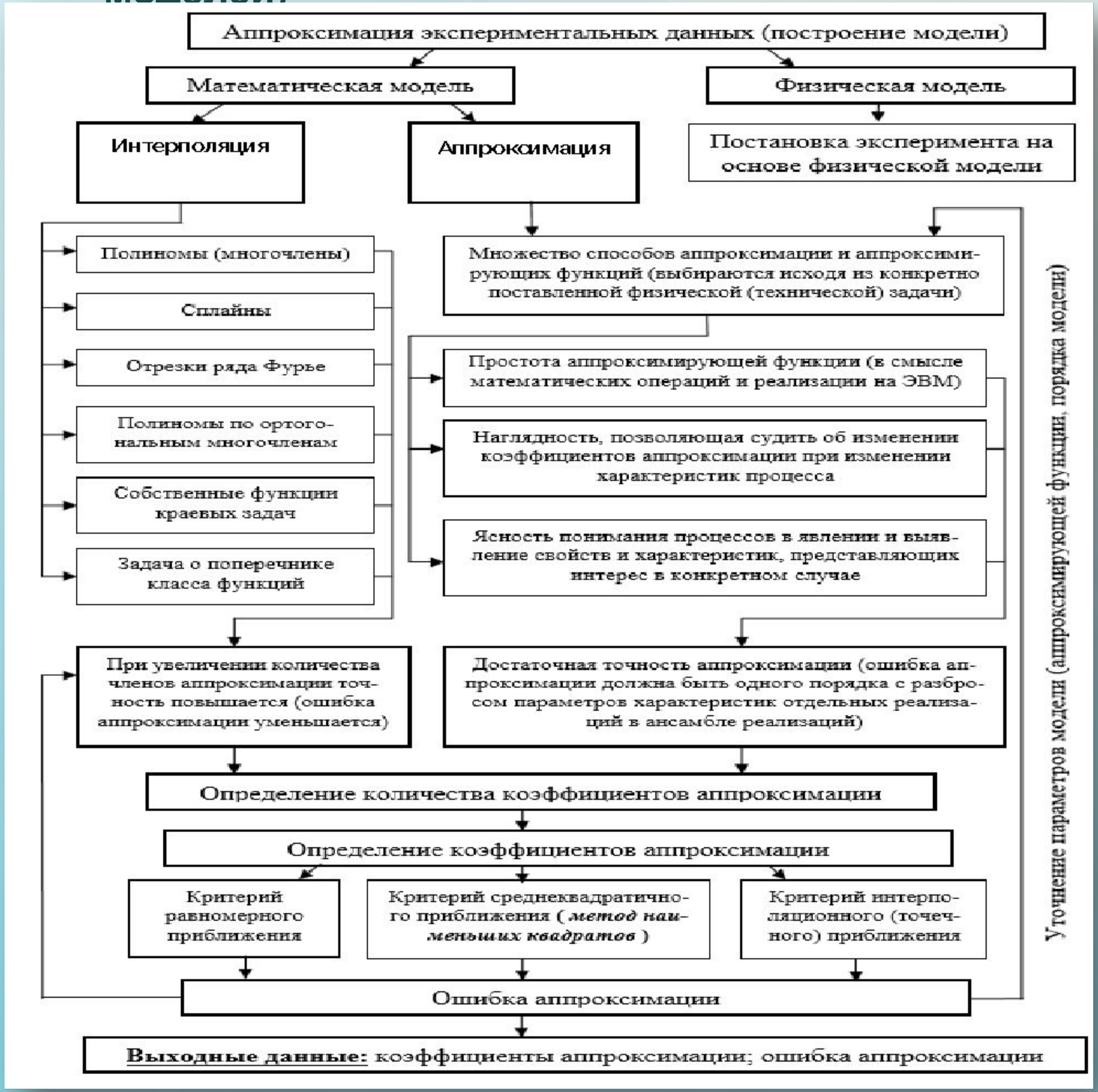
Физическая модель — приближенное описание некоторого объекта или явления с помощью образа, имеющего ту же физическую природу.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ.

Адекватность (от лат. adaequatus — приравненный, равный) — соответствие, верность, точность.

Точность измерения — характеристика измерения, отражающая степень близости его результатов к истинному значению измеряемой величины.

Схема аппроксимации ЭД (построение моделей)



2. Задачи и требования аппроксимации.

Задача аппроксимации на основе типовых распределений включает выполнение трех основных шагов:

1) предварительного выбора вида закона распределения;
2) определения оценок параметров закона распределения;
3) оценки согласованности закона распределения и ЭД.

Требования при выборе аппроксимирующей функции:

1) простота функции (в смысле математических операций и реализации на ЭВМ);
2) достаточная точность (ошибка аппроксимации должна быть одного порядка с разбросом параметров характеристик отдельных реализаций в ансамбле реализаций);
3) наглядность, позволяющая судить об изменении коэффициентов аппроксимации при изменении характеристик процесса;
4) ясность понимания процессов в явлении и выявление свойств и характеристик, представляющих интерес в конкретном случае.

3 . Аппроксимация на основе типовых распределений .

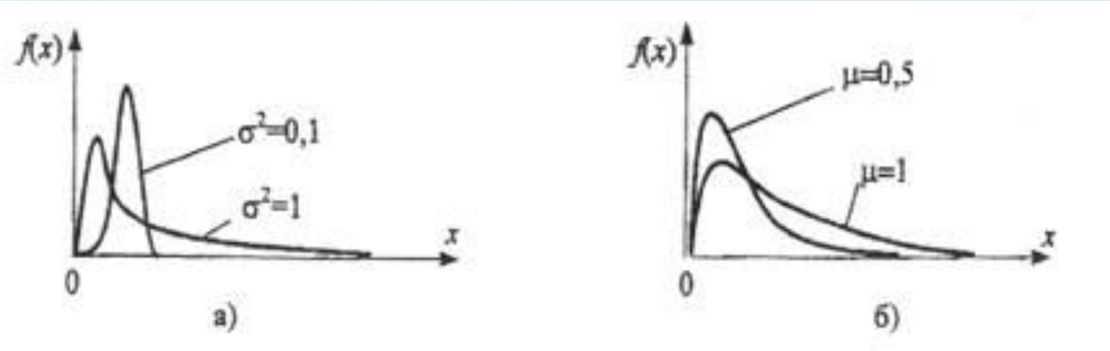


Рис 1. Логарифмически нормальное распределение

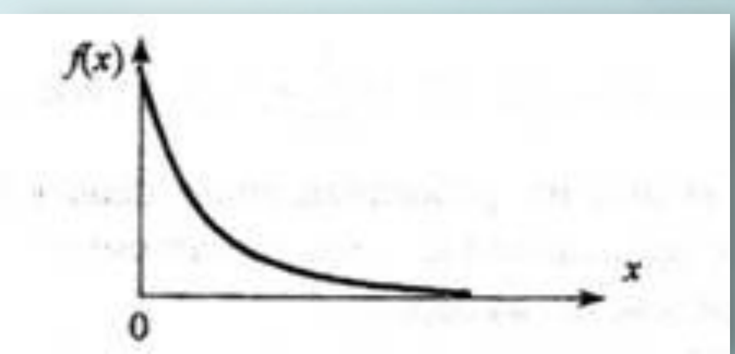


Рис. 2. Экспоненциальное распределение

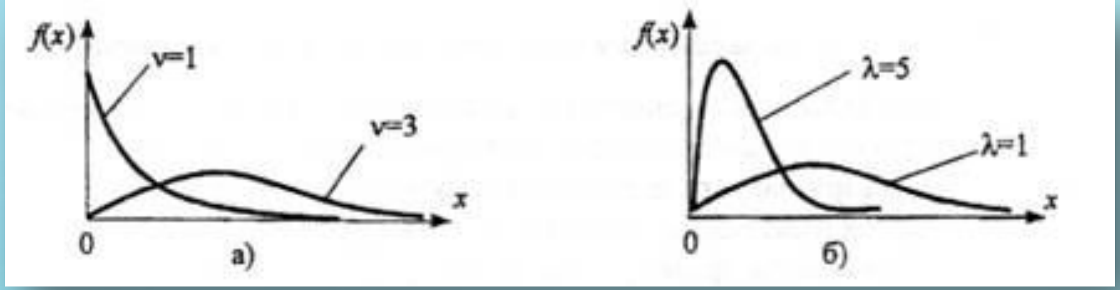


Рис. 3 Гамма-распределение

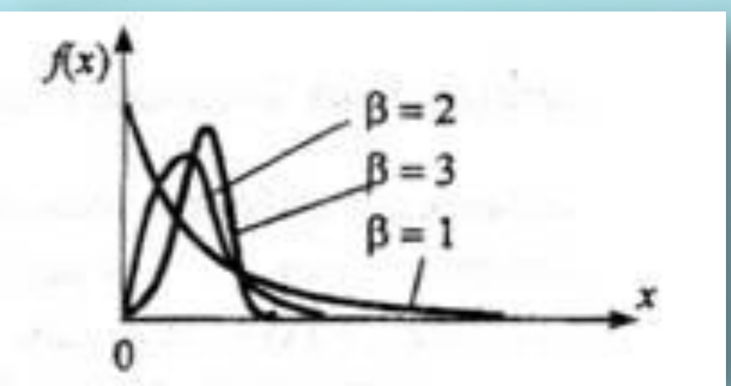


Рис. 4. Распределение Вейбулла

4 . Логнормальное распределение.

Говорят, что случайная величина Y имеет логарифмически нормальное распределение (сокращённо **логнормальное распределение**), если её логарифм $\ln Y = X$ распределён нормально, то есть если

$$Y = e^X,$$

где величина X имеет нормальное распределение с параметрами a, σ.

Плотность логнормального распределения задаётся формулой

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0.$$

Математическое ожидание и дисперсию логнормального распределения определяют по формулам

$$M(Y) = \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right); \quad D[Y] = e^{2(2\sigma^2+a)^2-a^2} - e^{2a+\sigma^2}.$$

Кривая этого распределения изображена на рис. 19.

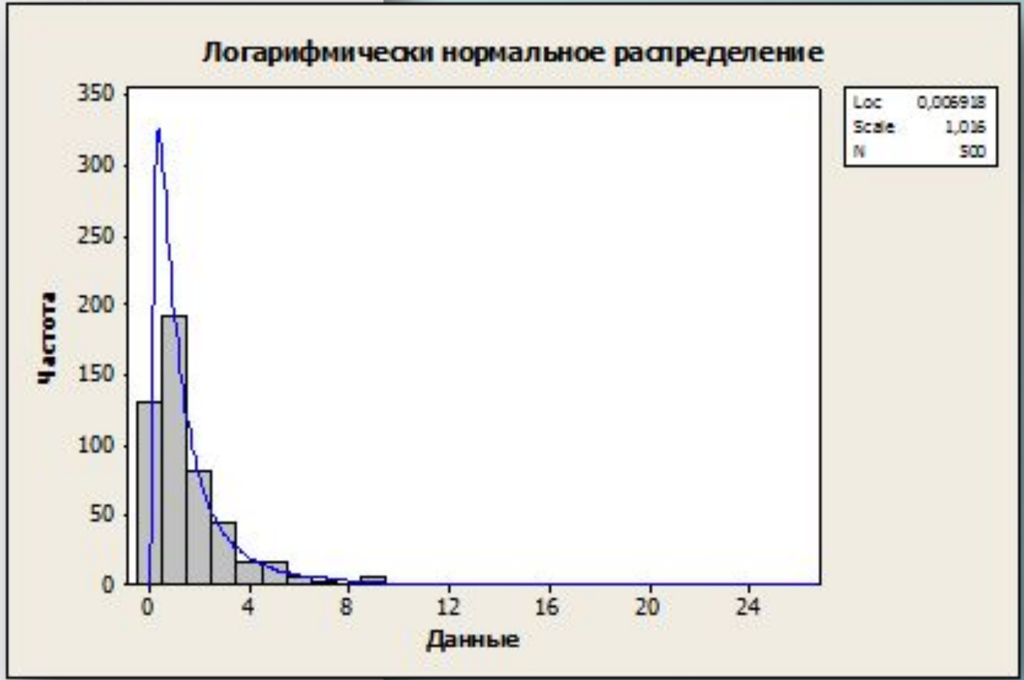


График кривой логнормального распределения

Логарифмически нормальное распределение встречается в ряде технических задач. Оно даёт распределение размеров частиц при дроблении, содержаний элементов в минералах в извержённых горных пародах, численности рыб в море и т.д. Встречается такое распределение во всех задачах, где логарифм рассматриваемой величины можно представить в виде суммы большого количества независимых равномерно малых величин:

$$\ln Y = X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \text{ то есть } Y = \prod_{k=1}^{n} e^{X_k}, \text{ где } e^{X_k} \text{ независимы.}$$

5 . Гамма распределение.

Говорят, что случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $a > 0$ и $b > 0$, если её плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, & x > 0. \end{cases}$$ где $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\,dt$ — гамма-функция Эйлера.

На рис. 20 показаны кривые распределения вероятностей при значениях параметра $a > 1$ и $a < 1$ (при $a = 1$ получаем экспоненциальное распределение).

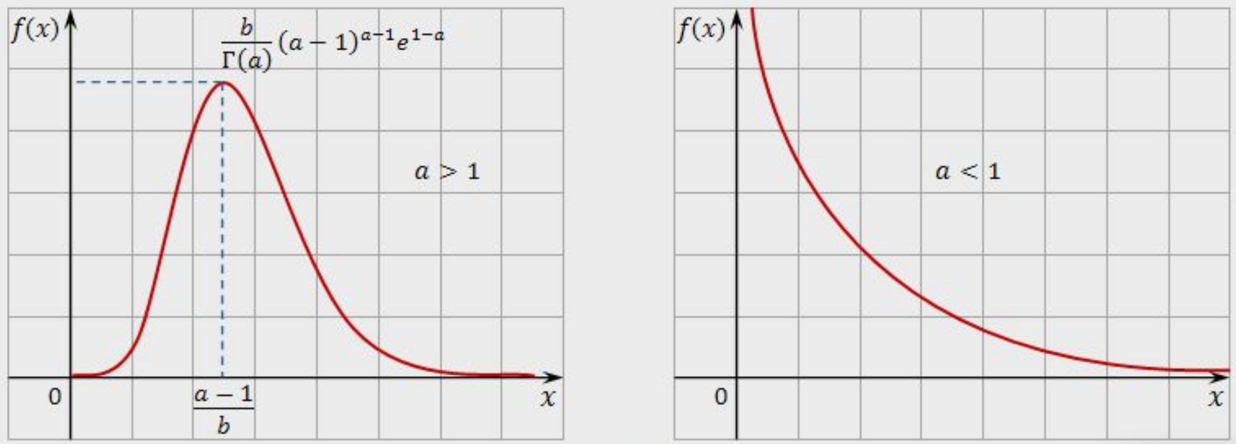


Рис. 20

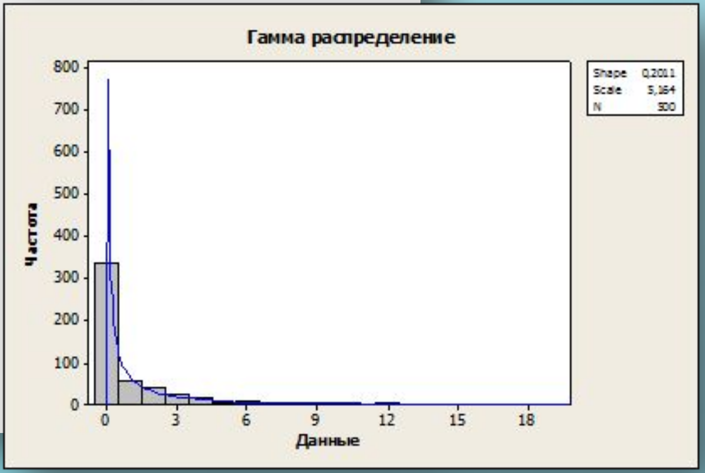
Математическое ожидание и дисперсия, подчинённые гамма-распределению, задаются формулами

$$M(X) = \frac{a}{b}; \qquad D[X] = \frac{a}{b^2}.$$

Отметим, что при $a > 1$ гамма-распределение имеет моду

$$M_o = \frac{a-1}{b}$$

(графически это означает, что кривая распределения имеет точку максимума $x = M_o$, рис. 20).



6 . Экспоненциальное распределение.

Экспоненциальным распределением называется частный случай гамма-распределения с параметрами $a = 1;\ b = \lambda > 0$, то есть то есть плотность вероятности в этом случае

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Используя свойства два плотности распределения ([url]см.[/url]), можно найти функцию распределения $F(x)$ экспоненциального закона:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Основные характеристики (математическое ожидание и дисперсия) случайной величины X , распределённой по экспоненциальному, имеют вид

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \qquad D[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Характеристическая функция экспоненциального распределения задаётся формулой

$$g(s) = \frac{\lambda}{\lambda - is}.$$

Кривая экспоненциального распределения вероятностей показана на рис. 21,а, а график функции распределения $F(x)$ — на рис. 21,б.

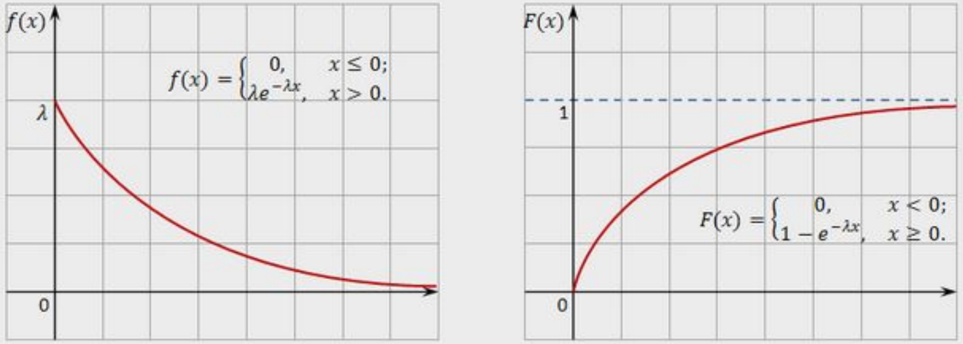
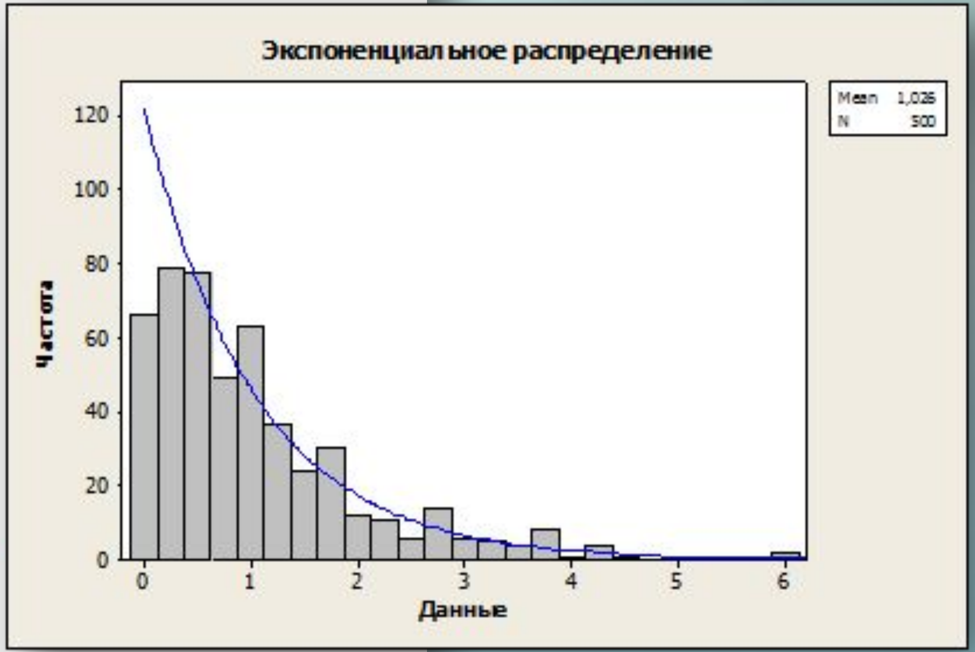


Рис. 21



Статистический смысл параметра λ состоит в следующем: λ есть среднее число событий на единицу времени, то есть $\frac{1}{\lambda}$ есть средний промежуток времени между двумя последовательными событиями.

Экспоненциальное (показательное) распределение часто встречается в теории массового обслуживания (например, X — время ожидания при техническом обслуживании или X — продолжительность телефонных азговоров, ежедневно регистрируемых на телефонной станции) и теории надёжности (например, X — срок службы радиоэлектронной аппаратуры).