



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СЕМИНАР ОТ 18 ДЕКАБРЯ 2019 ГОДА.

МАОУ «УТЛ ИМЕНИ Г.В.РАССОХИНА»

УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ

ПРОТЧЕНКО АННА СЕМЕНОВНА

ГОРОД УХТА.

7 КЛАСС

Глава 5.

- Основные правила комбинаторики (правило суммы и правило произведения)
- Начальные сведения о статистике (среднее значение, мода и медиана)

9 КЛАСС

Глава 6.

- Начальные сведения о статистике
- Статистические характеристики
- Операции над событиями
- Зависимые и независимые события
- Геометрическая вероятность
- Схема Бернулли
- Случайные величины
- Характеристики случайной величины

*ВЕЛИКИЙ ФРАНЦУЗСКИЙ УЧЕНЫЙ
БЛЕЗ ПАСКАЛЬ ПИСАЛ ОБ ЭТОЙ
ЧУДЕСНОЙ НАУКЕ ТАК:*

**«СОЧЕТАЯ СТРОГОСТЬ НАУЧНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ
С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ СЛУЧАЯ И ПРИМИРЯ
КАЗАЛОСЬ БЫ ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ВЕЩИ, И,
ИЗВЛЕКАЯ ЕЕ [НОВОЙ НАУКИ ИМЯ] ИЗ ТОГО И
ДРУГОГО, МОЖНО ПО ПРАВУ ПРИСВОИТЬ ЕЙ
ОШЕЛОМЛЯЮЩЕЕ НАЗВАНИЕ **ГЕОМЕТРИЯ
СЛУЧАЯ**».**

- **Определение:** *Событие, которое может произойти, а может и не произойти, называют случайным событием.*
- **Пример:** Попадание или промах при стрельбе по мишени.
- **Элементарные события** – *простейшие события (исходы), которыми может закончиться случайный опыт.*

НЕСОВМЕСТИМЫЕ СОБЫТИЯ

- **Два случайных события называются несовместными, если они не могут произойти одновременно при одном и том же исходе испытания.**
- **Иными словами: несовместные события не могут наступить в одном опыте**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ):

- Вероятностью события называется отношение числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов.
- Обозначение: $P(A)$ – вероятность события A
- Формула Лапласа (классическое определение вероятности):

$$P(A) =$$

Где m_a - число благоприятных исходов события A ,

- n – число всех равновозможных исходов.
- **Замечание:** Часто в специальной литературе формула классической вероятности записывается в таком виде: $P = k/n$, где P - вероятность,
- k - число благоприятных исходов,

• n - общее число возможных исходов.

ПРИМЕР.

- Андрей, Роман, Максим и Сергей бросили жребий, кому быть вратарем. Найти вероятность того, что вратарем стал Роман.
- **Решение:**
- Пусть событие $A = \{\text{вратарем стал Роман}\}$.
- Число благоприятных исходов $k = 1$.
- Общее число возможных исходов $n = 4$.
- По формуле классической вероятности получаем:
- $P(A) = \frac{k}{n} = 0,25$.
- **Ответ: 0,25**

• Вероятность события A равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

• Сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1.

•

• Вероятность противоположных событий:

• $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

• $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

• $A \cup B$ (объединение) – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих хотя бы одному из событий A, B .

• $A \cap B$ (пересечение) – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих обоим событиям A и B .

• **Формула сложения вероятностей для совместных событий:**

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

• **Формула сложения для несовместных событий:**

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

• **Формула умножения вероятностей для независимых событий:**

• $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

• **Формула умножения вероятностей для зависимых событий:**

• $P(A \cap B) = P(A) * P(B \setminus A) = P(B) * P(A \setminus B)$

• **Обратите внимание:** $P(B \setminus A)$ – это вероятность события B при условии, что произошло событие A (аналогично для $P(A \setminus B)$).

- **Определение: Факториалом числа n называется**
- **произведение первых натуральных n чисел от 1 до n .**
- **Обозначение: $n!$**
- **Формула: $n! = 1*2*3*....*n$**
- **Пример: $4! = 1*2*3*4 = 24$**
- **Запомните: $0! = 1$ (по определению)**

- **Определение: Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.**
- **Обозначение: C_n^k - число сочетаний из n элементов по k**
- **Формула:**

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ПРИМЕР.

Иван Петрович купил билет спортлото. Он должен зачеркнуть 6 номеров из 49. Сколько существует способов это сделать? **Решение:**

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} =$$
$$= \frac{1*2*3*...*43*44*45*46*47*48*49}{6!*43!} = 13\,983\,816.$$

(Красным цветом отмечены множители, которые автоматически сокращаются).

Ответ: 13 983 816 способов

• Рассмотрим случай **повторных независимых испытаний с двумя исходами**. Вероятность того, что событие A наступит ровно раз m при проведении n независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, обозначается $P_n(m)$ и вычисляется по **формуле Бернулли**.

Формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m * p^m * (1 - p)^{n - m}, \text{ где}$$

p – вероятность наступления события A в каждом испытании,

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

ТИП 1. САМАЯ ПРОСТАЯ

- **Задание открытого банка заданий по математике**
- В чемпионате по гимнастике участвуют 64 спортсменки: 20 из Японии, 28 из Китая, остальные - из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.
- **Решение:** Из Кореи выступают $64 - (20 + 28) = 16$ спортсменок. По формуле классической вероятности получим: $P = 16/64 = 1/4 = 0,25$.
- **Ответ: 0,25**

ТИП 2. ЗАДАЧА С БРОСАНИЕМ МОНЕТ

- **Задание В10 (№ 283473) открытого банка заданий по математике**
- В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.
- **Способ I. Метод перебора комбинаций:**
- Нужно выписать все возможные комбинации орлов и решек,
- а затем выбрать нужные и применить формулу классической вероятности.
- **Решение:**
- Выписываем все возможные комбинации: ОО, ОР, РО, РР. Значит, $n = 4$.
- Среди полученных комбинаций выбираем те, которые требуются по условию задачи: РР. Значит, $m_a = 1$.
- По формуле классической вероятности получим: $P = 1/4 = 0,25$.
- **Ответ: 0,25**

**МЕТОД ПЕРЕБОРА КОМБИНАЦИЙ
КРАЙНЕ НЕУДОБЕН ДЛЯ БОЛЬШОГО
КОЛИЧЕСТВА БРОСКОВ, Т.К. ЗАНИМАЕТ МНОГО
ВРЕМЕНИ. ПОЭТОМУ МЫ МОЖЕМ ПОЙТИ
ДРУГИМ ПУТЕМ.**

**Способ II. Специальная формула вероятности,
адаптированная для решения задач с монетами.**

Пусть в случайном эксперименте монету бросают n раз, тогда вероятность того,

что орел выпадет ровно k раз, можно найти по формуле: $P = \frac{C_n^k}{2^n}$, где

2^n — число всех возможных исходов, C_n^k — число сочетаний из n элементов по k ,

которое вычисляется по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Способ II. Специальная формула вероятности, адаптированная для решения задач с монетами.

Пусть в случайном эксперименте монету бросают n раз, тогда вероятность того,

что орел выпадет ровно k раз, можно найти по формуле: $P = \frac{C_n^k}{2^n}$, где

2^n – число всех возможных исходов, C_n^k - число сочетаний из n элементов по k ,

которое вычисляется по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$

Задача.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды.

Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

Решение (Способ II):

$$C_3^0 = \frac{3!}{0! \cdot (3-0)!} = 1$$

$$P = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

Ответ: 0,125

Тип 3. Задача с игральным кубиком

Игральный кубик бросили один раз.

Какова вероятность того, что выпадет не менее 4 очков?

Решение:

1. Бросаем игральный кубик один раз - 6 исходов.

Значит, у данного действия (бросание одного игрального кубика 1 раз) всего имеется $n = 6$ возможных исходов.

2. Выписываем все благоприятные исходы: 4; 5; 6.

Значит, $k = 3$ – число благоприятных исходов.

3. По формуле классической вероятности имеем: $P = \frac{3}{6} = 0,5$.

Ответ: 0,5

Тип 4. Задача с игральными костями

Задание В10 (№ 283441) открытого банка заданий по математике

В случайном эксперименте бросают две игральные кости.

Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков. Результат округлите до сотых.

Решение:

1. Бросаем первую игральную кость - 6 исходов, для каждого из которых возможны еще 6 исходов (когда мы бросаем вторую кость).

Значит, у данного действия (бросание двух игральных костей) всего имеется $n = 6^2 = 36$ возможных исходов.

2. Выписываем все благоприятные исходы в виде пар чисел:

$(1;4), (2;3), (3;2), (4;1)$.

Значит, $k = 4$ – число благоприятных исходов.

3. По формуле классической вероятности имеем: $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0,11$.

Ответ: 0,11

Для решения данного типа задач (как и для задач на бросание кубика) удобно использовать следующую таблицу:

Слайд 21

Числа, выпавшие на гранях	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Задание В10 (№ 283449) открытого банка заданий по математике

В случайном эксперименте бросают три игральные кости.

Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 15 очков.

Результат округлите до сотых.

Решение:

1. У данного действия (бросание трех игральных костей) всего имеется $n = 6^3 = 216$ возможных исходов.

2. Выписываем все благоприятные исходы в виде троек чисел:
(6;6;3), (6;3;6), (3;6;6), (5;5;5), (6;5;4), (5;4;6), (4;6;5).

Значит, $k = 7$ – число благоприятных исходов.

3. По формуле классической вероятности имеем: $P = \frac{7}{216} \approx 0,03$.

Ответ: 0,03

Тип 5. Задача с перекладыванием монет

В кармане у Андрея было 4 монеты по 2 рубля и 2 монеты по 5 рублей.

Он, не глядя, переложил 3 монеты в другой карман.

Найти вероятность того, что обе монеты по 5 рублей лежат в одном кармане.

Решение:

1. Всего у Андрея было: $4 + 2 = 6$ монет.
2. 3 (переложённые) монеты можно выбрать из 6 (имеющихся) монет:

$$n = C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ способами.}$$

(Красным цветом отмечены множители, которые автоматически сокращаются).

3. 2 монеты по 5 рублей выбираем из двух пятирублевых монет: $2! = 2$ способами.

4. 3 монеты из 4-х монет по 2 рубля выбираем:

$$n = C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3! \cdot 1} = 4 \text{ способами.}$$

(Красным цветом отмечены множители, которые автоматически сокращаются).

5. По формуле классической вероятности и правилу произведения получим:

$$P = \frac{2 \cdot 4}{20} = 0,4.$$

Ответ: 0,4

Тип 6. Задача с экзаменационными билетами

Задание В10 (№ 320385) открытого банка заданий по математике

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение:

- $A = \{\text{вопрос на тему «Вписанная окружность»}\}$
 $B = \{\text{вопрос на тему «Тригонометрия»}\}$
 $C = \{\text{вопрос по одной из этих двух тем}\}$
- События A и B несовместны, т.к. по смыслу задачи нет вопросов, относящихся к двум темам одновременно. Значит, $C = A \cup B$.
- По правилу сложения для несовместных событий имеем:
 $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 $P(C) = 0,1 + 0,35 = 0,45$.

Ответ: 0,45

Тип 7. Задача с кофейными автоматами

Задание В10 (№ 320435) открытого банка заданий по математике

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение:

1. $A = \{\text{кофе закончится в первом автомате}\}$

$B = \{\text{кофе закончится во втором автомате}\}$

$C = A \cup B = \{\text{кофе закончится хотя бы в одном автомате}\}$

2. По условию: $P(A) = P(B) = 0,2$, $P(A \cap B) = 0,16$

3. По смыслу задачи события A и B являются совместными. По формуле сложения вероятностей совместных событий имеем:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,2 - 0,16 = 0,24.$$

4. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,24 = 0,76.$

Ответ: 0,76

Тип 8. Задача о стрельбе по мишеням

Задание В10 (№ 320477) открытого банка заданий по математике

Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,85. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение:

Вероятность попадания = 0,85.

Вероятность промаха = $1 - 0,85 = 0,15$.

$A = \{\text{попадание, попадание, промах, промах}\}$

События независимые. По формуле умножения вероятностей:

$$P(A) = 0,85 * 0,85 * 0,15 * 0,15 = 0,7225 * 0,0225 = 0,01625625 \approx 0,02.$$

Ответ: 0,02

МОДУЛЬ 1. ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ.

- Дигностическая работа
- Теоретическая часть
- Задачи о выборе объектов из набора
- Задачи о подбрасывании монеты
- Задачи о бросках кубика
- Варианты для самостоятельного решения

ЗАДАЧИ О ВЫБОРЕ ОБЪЕКТОВ ИЗ НАБОРА

- Задача: Из 1000 собранных на заводе кофемолок 7 штук бракованных. Эксперт проверяет одну наугад выбранную кофемолку из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемая кофемолка окажется бракованной.
- Решение:
- По определению вероятности $P(A) = 7/1000 = 0,007$
- Событие A «выбранная кофемолка бракованная»

СИММЕТРИЧНУЮ МОНЕТУ БРОСАЮТ ТРИЖДЫ. НАЙДИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ОРЕЛ ВЫПАДЕТ РОВНО 2 РАЗА.

- Всего возможно 8 исходов: РРР, РРО, РОР, РОО, ОРР, ОРО, ООР, ООО. Благоприятствуют событию «орел выпадает ровно 2 раза» 3 исхода: РОО, ОРО, ООР. Искомая вероятность равна $3/8=0,375$.

ЗАДАЧИ СРЕДНЕЙ ТРУДНОСТИ

- Несовместные события
- Объединение событий
- Пересечение событий
- Частота события

ЗАДАЧА ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ НЕСОВМЕСТИМЫХ СОБЫТИЙ.

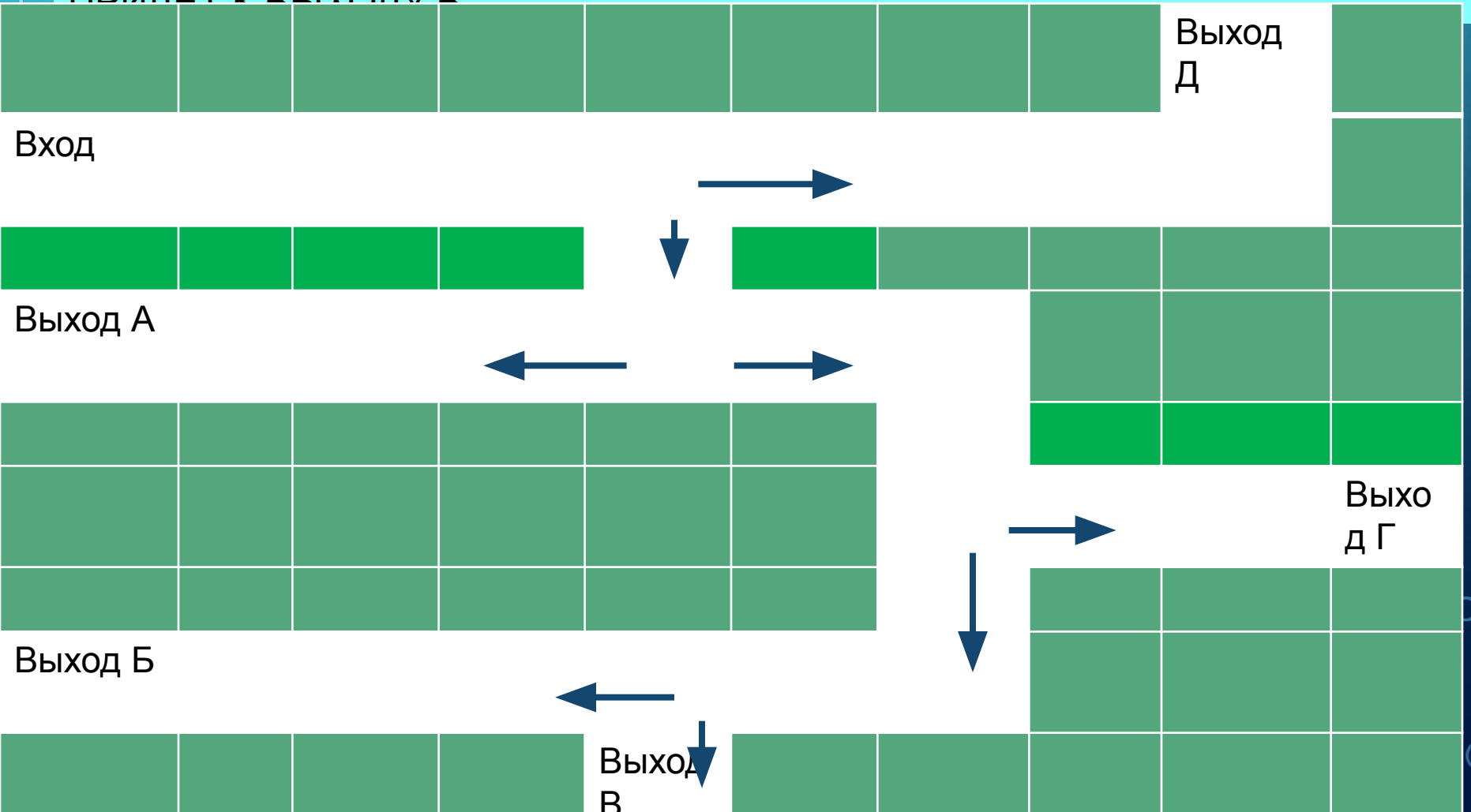
- Вероятность того, что новая кофемолка прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что она прослужит больше двух лет, равна 0,81. Найдите вероятность того, что кофемолка прослужит меньше двух лет, но больше года.
- Решение:
- А-событие «кофемолка прослужит больше года, но меньше двух лет»
- В- событие «кофемолка прослужит больше двух лет».
- События А и В несовместны.(кофемолка не может прослужить меньше двух лет и одновременно больше двух лет)

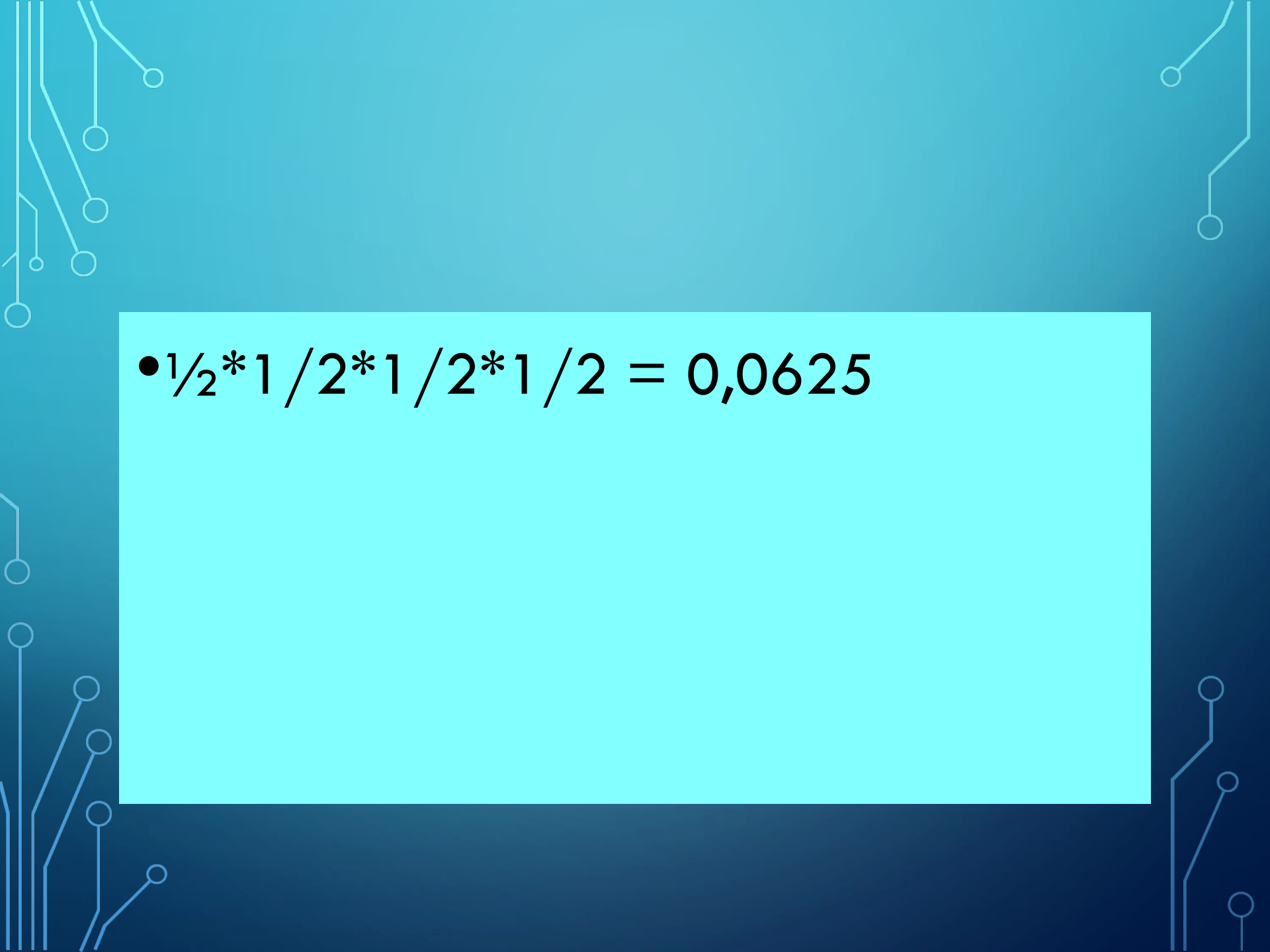
РЕШЕНИЕ:

- Объединением событий А и В является событие «кофемолка прослужит больше года»

Событие	Сломалась на первом году	Сломалась на втором году	Сломалась после двух лет работы
вероятность	$1 - 0,93 = 0,07$	$1 - 0,07 - 0,81 = 0,12$	0,81 (по условию)

НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ЛАБИРИНТ. МЫШКА ЗАПОЛЗАЕТ В ЛАБИРИНТ В ТОЧКЕ «ВХОД». РАЗВЕРНУТЬСЯ И ИДТИ НАЗАД НЕ МОЖЕТ, ПОЭТОМУ НА КАЖДОМ РАЗВЕТВЛЕНИИ МЫШКА ВЫБИРАЕТ ОДИН ИЗ ПУТЕЙ, ПО КОТОРОМУ ЕЩЁ НЕ ШЛА. СЧИТАЯ, ЧТО ВЫБОР ДАЛЬНЕЙШЕГО ПУТИ ЧИСТО СЛУЧАЙНЫЙ, ОПРЕДЕЛИТЕ, С КАКОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ МЫШКА ПРИДЕТ К ВЫХОДУ В





• $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0,0625$

ЗАДАЧИ ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ СОБЫТИЙ

- Задача. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей - 1 очко, если проигрывает - 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

ТАБЛИЦА ВОЗМОЖНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЧЕЙ И ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЭТИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

		Второй матч		
		Победа $P=0,3$	Ничья $P=0,4$	Поражен ие $P=0,3$
Первый матч	Победа $P=0,3$	0,09	0,12	0,09
	Ничья $P=0,4$	0,12	0,16	0,12
	Поражен ие $P=0,3$	0,09	0,12	0,09

ЗАДАЧИ О ЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЯХ

- В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

КОФЕ. ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО К КОНЦУ ДНЯ В АВТОМАТЕ ЗАКОНЧИТСЯ КОФЕ, РАВНА 0,4. ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО КОФЕ ЗАКОНЧИТСЯ В ОБОИХ АВТОМАТАХ, РАВНА 0,22. НАЙДИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО К КОНЦУ ДНЯ КОФЕ ОСТАНЕТСЯ В ОБОИХ АВТОМАТАХ.

- Так как $0,4 * 0,4 = 0,16 \neq 0,22$, то события «кофе закончился в 1-ом автомате» и «кофе закончился во 2-ом автомате» зависимы. Обозначим через A событие «кофе остался в первом автомате», через B – «кофе остался во втором автомате». Тогда $P(A) = P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$. Событие «кофе остался хотя бы в одном автомате» – это $A \cup B$, его вероятность равна $P(A \cup B) = 1 - 0,22 = 0,78$, так как оно противоположно событию «кофе закончился в обоих автоматах». По формуле для пересечения событий:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,6 - 0,78 = 0,42$$

		Второй автомат	
		Кофе закончился	Кофе остался
Первый автомат	Кофе закончился	0,22	0,18
	Кофе остался	0,18	0,42

	Второй автомат		
Первый автомат		Кофе закончился	Кофе остался
	Кофе закончился	0,22	0,18
	Кофе закончился	0,18	0,42