ГБПОУ МО
Раменский дорожно-строительный техникум

Исследование функций и построение графиков

к.п.н., преподаватель высшей категории
Никитин М.Е.

Раменское, 2021

Теоретический материал

Содержание

Область определения функции

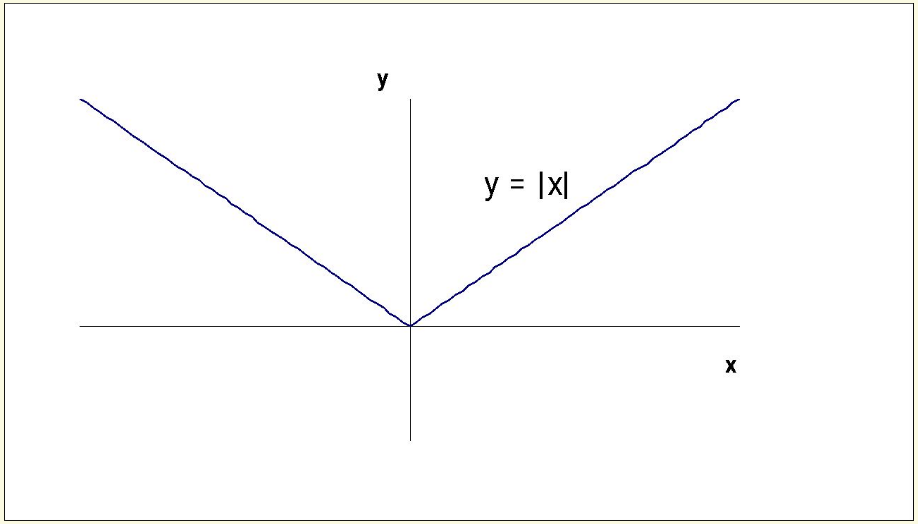
Определение. <u>Областью определения</u> функции называется множество значений независимой переменной, при которых функция определена.

Примеры.

$$y = \ln(x+1) \qquad D_f = (-1, +\infty)$$

$$y = \frac{2}{(x-3)^2} \qquad D_f = R \setminus \{3\}$$

Четные и нечетные функции

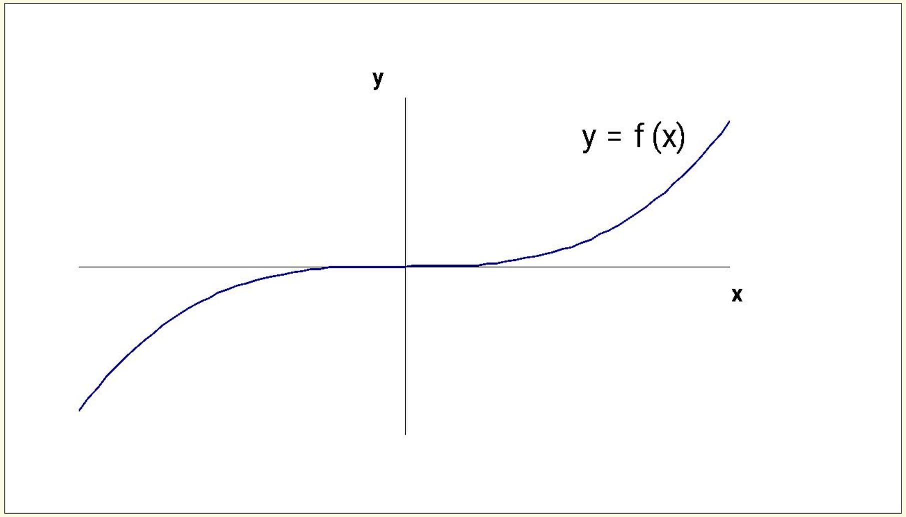


Функция *y=f(x)* называется <u>четной</u>, если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = f(x)$$

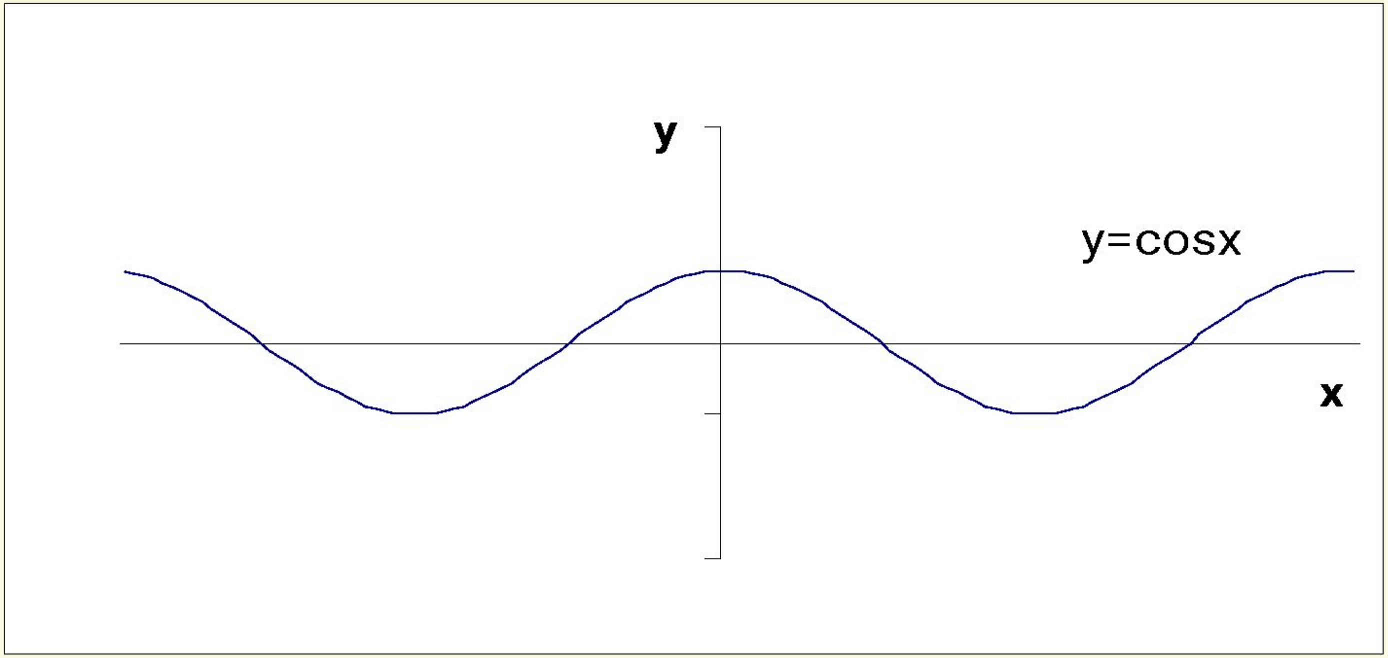
Функция *y=f(x)* называется <u>нечетной</u>, если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$$



Периодичные функции

Определение. Функция $y=f(\mathrm{x})$ называется <u>периодической</u>, если существует такое положительное число Т, что если x принадлежит D_f, то $x \pm T$ также принадлежит D_f и $f(x+T)=f(T)$.



Точки пересечения с осями координат

При исследовании функции необходимо найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

<u>Абсциссы</u> точек пересечения графика функции с осью Ох находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $y=0$, а <u>ординаты</u> точек пересечения графика функции с осью Оу находятся из системы уравнений $y=f(\mathrm{x})$ и $x=0$.

Непрерывность
Характер точек разрыва

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке x_0***, если функция определена в точке x_0 и предел функции в точке x_0 равен значению функции в точке x_0.

$$x_0 \in D_f \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функции, непрерывные в каждой точке из области определения функции, называются ***непрерывными функциями***.

Примеры непрерывных функций: $y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=e^x$, $y=P_n(x)$ (многочлен степени n).

Точки разрыва функции

Определение. **Точкой разрыва функции** называется точка из области определения функции, в которой функция не является непрерывной.

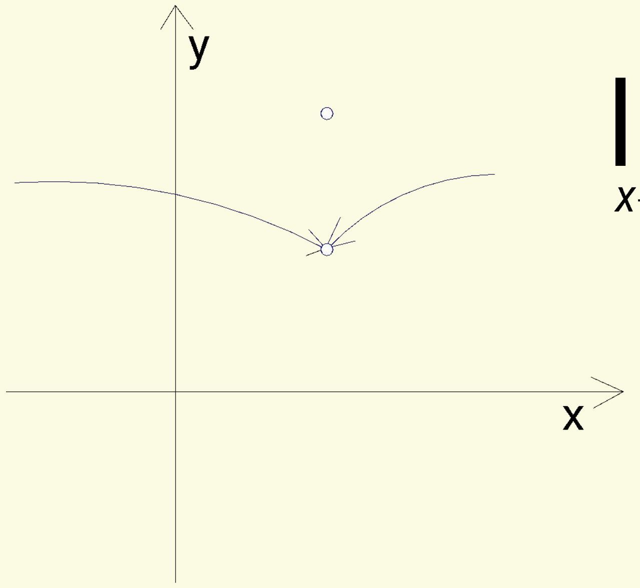
<u>Пример.</u> Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \; если x \neq 0; \\ 0, \; если x = 0 \end{cases}$$

разрывна в 0, так как $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \;\; f(0) = 0$

Классификация точек разрыва
Точки устранимого разрыва

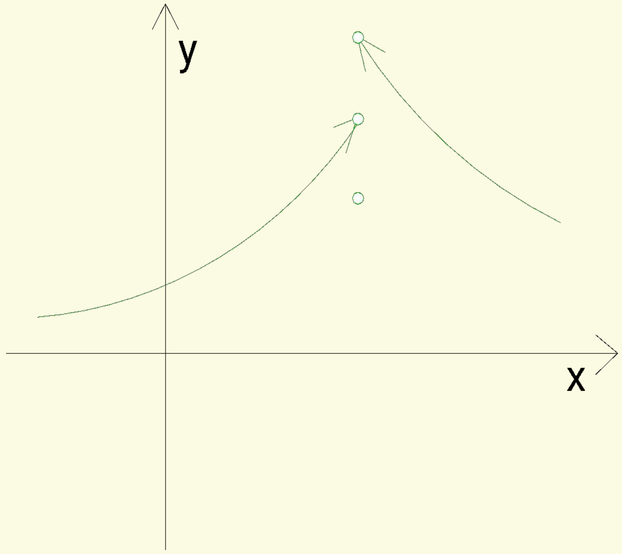
Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, равные между собой, но не равные значению функции в точке x_0, то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.



$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) \neq f(x_0)$$

Классификация точек разрыва Точки скачка

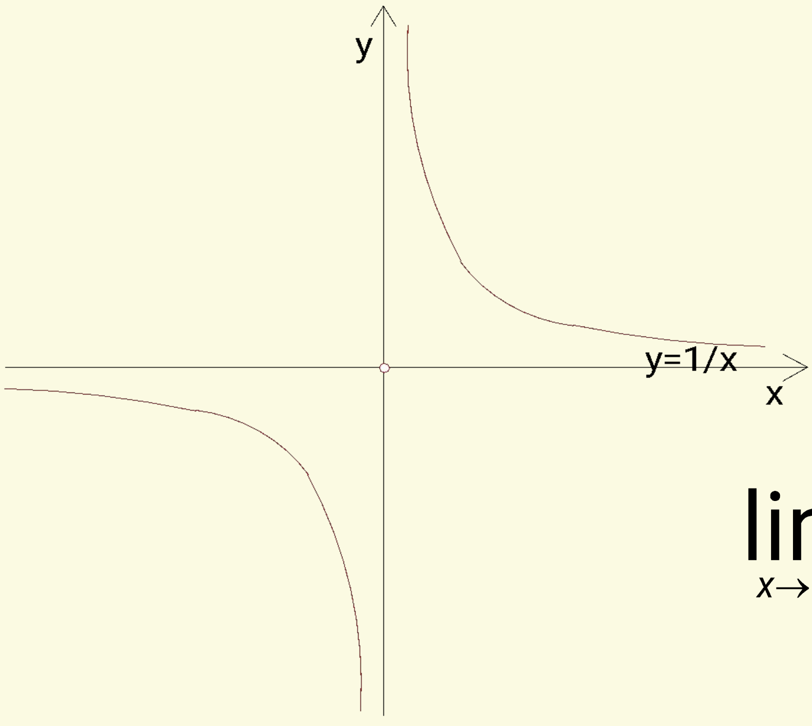
Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, не равные между собой, то точка x_0 называется ***точкой скачка (точкой разрыва* I *рода)***.



$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

Классификация точек разрыва Точки разрыва II рода

Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 не существует или бесконечен, то точка называется ***точкой разрыва* II *рода***.



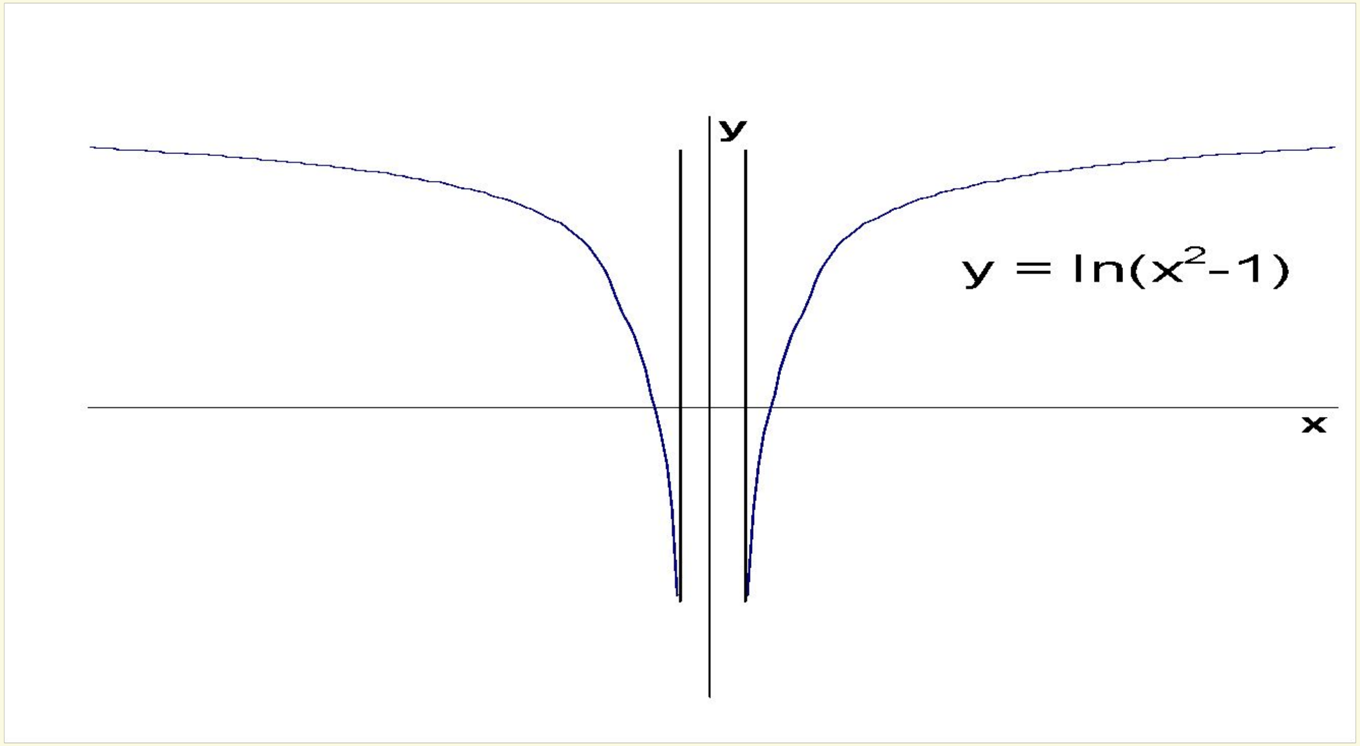
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0; \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$$

Вертикальные асимптоты

Прямая $x=x_0$ называется <u>вертикальной асимптотой</u> графика функции при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \infty.$$



Наклонные асимптоты

Если существует прямая $y=kx+b$ такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$, то эта прямая называется <u>асимптотой графика функции f</u> при $x\to+\infty$.

Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b). Точка x_0 интервала (a, b) называется точкой строгого максимума (минимума) функции $f(x)$, если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Точки минимума и точки максимума функции называются ***точками экстремума*** функции.

Необходимое условие экстремума. Пусть точка x_0 - точка экстремума функции. Тогда либо производная функции в этой точке равна 0, либо не существует.

Исследование функции на монотонность

Известно, что если $f'(x)>0$ ($f'(x)>0$) в (a, b), то функция $f(x)$ <u>строго возрастает</u> <u>(строго убывает)</u> в (a, b).

Рассмотрим функцию ***f(x) = x + 1|x***

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

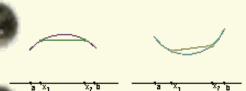
Критические точки функции $x=\pm 1$. $f'(x)>0$ при $x<-1$ и при $x>1$; $f'(x)<0$ при $-1<x<0$ и при $0<x<1$.

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$ функция возрастает

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$ функция убывает

Выпуклость функции

Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a, b), называется ***выпуклой вверх*** (***вниз***) в интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2 из интервала (a, b) из того, что $x_1<x_2$, следует, что часть графика функции между точками $(x_1,f(x_1))$ и $(x_2,f(x_2))$ лежит выше (ниже) хорды, соединяющей эти точки.



Выпуклость функции. Точки перегиба

Также говорят, что график функции $f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах (a, b) лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Если график функции в точке $(x_0, f(x_0))$ переходит с одной стороны касательной на другую, то точка x_0 называется ***точкой перегиба функции*** $f(x)$.

Достаточные условия выпуклости функции и существования точек перегиба

Достаточное условие строгой выпуклости функции

Если на интервале (a,b) $f''(x)>0$, то на интервале (a,b) функция выпукла вниз, и если на интервале $f''(x)<0$, то на интервале (a,b) функция выпукла вверх.

Достаточное условие строгой выпуклости функции

Если в левой и правой полуокрестностях некоторой точки x_0 $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то точка x_0 – точка перегиба функции.

Практический материал

Исследуем функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ и построим её график.

1). Поскольку знаменатель положителен при всех , область определения функции - вся ось Ox

2). Функция *f(x)* - нечётная, поскольку при смене знака *x* числитель меняет знак, а знаменатель остаётся без изменения, откуда $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

Периодической функция не является.

3). Поскольку область определения этой элементарной функции -- вся вещественная ось, вертикальных асимптот график не имеет.

4). Найдём наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ в виде $y = kx + b$. Имеем:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{x^3}{x^2+1} - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Таким образом, асимптотой как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$ служит прямая $y = 1x + 0 = x$.

5). Найдём точки пересечения с осями координат. Имеем:

$f(0) = 0$, причём $x=0$ - единственное решение уравнения $f(x) = 0$. Значит, график $y = f(x)$ пересекает сразу и ось Ox, и ось Oy в начале координат.

Очевидно, что $f(x)>0$ при $x>0$ и $f(x)<0$ при $x<0$.

6) Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Очевидно, что $f'(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$; единственная точка, в которой $f'(x) = 0$ - это $x=0$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на всей оси Ox, а в стационарной точке $x=0$ имеет горизонтальную касательную.

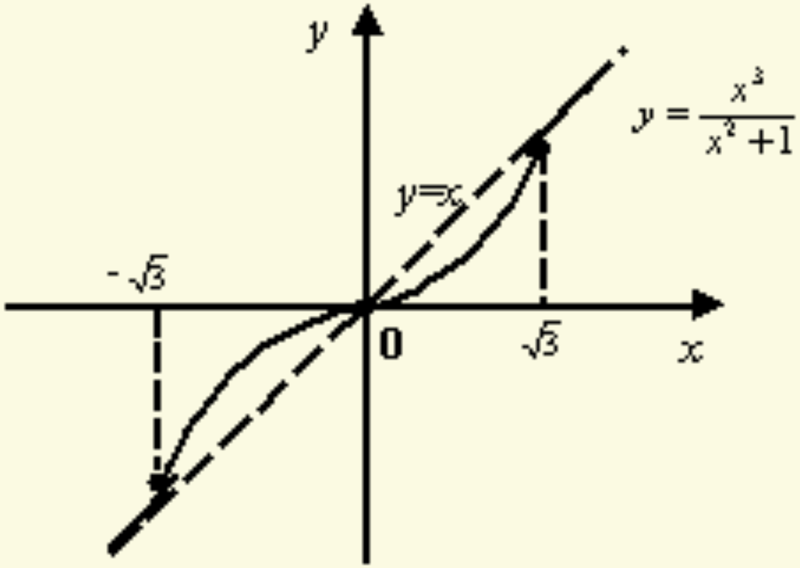
7) Найдём вторую производную:

$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Знаменатель этой дроби положителен при всех *x*. Числитель имеет корни *x=0* и x=±√3, при этом *f''(x)>0* на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$- на этих интервалах функция выпукла. На интервалах $(-\sqrt{3}; 0)$и $(\sqrt{3}; +\infty)$ выполняется обратное неравенство *f''(x)<0*, здесь функция вогнута. Все три точки, в которых *f''(x)=0*, то есть точки - √3, 0, √3, являются точками перегиба.

8). Теперь мы можем построить график с учётом всех предыдущих пунктов исследования функции. График имеет такой вид:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$



Исследуем функцию $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ и построим её график.

1). Ясно, что $D(f) = R$, поскольку оба сомножителя в выражении $f(x)$ определены при любом . Область значений $E(f)$ найдём после того, как отыщем локальные экстремумы функции.

2). Функция не является ни чётной, ни нечётной; не является она и периодической.

3). Область определения не имеет граничных точек, значит, нет и вертикальных асимптот графика.

4) Будем искать наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$. Коэффициент k найдём по формуле $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$: при $x \to +\infty$ имеем

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x-2)e^x = +\infty,$$

так что при $x \to +\infty$ асимптоты нет, причём функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$.

При $x \to -\infty$ имеем:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Теперь найдём значение *b* по формуле $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx]$.
Имеем:

$$b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - 0x] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2 - 2x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Таким образом, $k=0$ и $b=0$, так что при $x \to -\infty$ асимптота имеет уравнение $y=0$, то есть совпадает с осью Ox.

5). Точка пересечения с осью Oy равна $f(0)=0$. Заодно нашли одну точку пересечения с осью Ox. Чтобы найти все точки пересечения графика с осью Ox, решаем уравнение $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$. Поскольку $e^x \neq 0$, решаем уравнение $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$, откуда получаем два корня: $x=0$ и $x=2$. Так как точек разрыва нет, то имеем три интервала знакопостоянства функции: $(-\infty; 0)$ $(0; 2)$, и $(2; +\infty)$.

Знак функции определяется множителем $x^2 - 2x$, поскольку $e^x > 0$ при всех x. Значит, f(x)>0 при $x \in (-\infty; 0)$ и при $x \in (2; +\infty)$ и $f(x)<0$ при $x \in (0; 2)$.

6) Вычислим производную:

$$f'(x) = (x^2 - 2x)e^x + (2x - 2)e^x = (x^2 - 2)e^x.$$

Интервалы возрастания задаются неравенством $f'(x)>0$, то есть, с учётом того, что $e^x > 0$, неравенством $x^2 - 2x > 0$. Решением этого неравенства служит множество

$(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. На этих двух интервалах функция возрастает. Легко видеть, что на интервале $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, следовательно, это интервал убывания функции. В точке $-\sqrt{2}$ возрастание сменяется убыванием, значит, точка $-\sqrt{2}$ - точка локального максимума.

Значение функции в этой точке равно

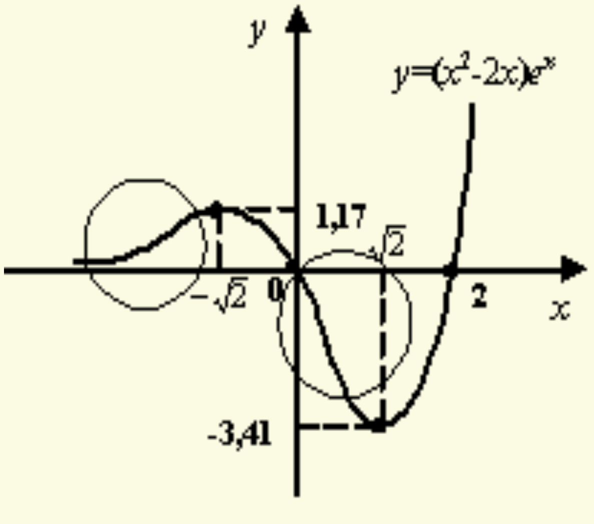
$$f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 1.17.$$

В точке √2 убывание сменяется возрастанием, значит, точка √2 -- точка локального минимума функции. Значение функции в точке минимума таково:

$$f_{\min} = f(\sqrt{2}) = (2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -3.41.$$

Теперь мы можем примерно представить, как идёт график функции:

Эскиз графика функции *f(x)*



Становится очевидно, что область значений функции -- это

$$\mathcal{E}(f) = [f_{\min}; +\infty) \approx [-3.41; +\infty).$$

7) По эскизу графика видно, что где-то в местах, обведённых кружочками, должно смениться направление выпуклости, то есть должны быть точки перегиба. Для исследования этого найдём вторую производную:

$$f''(x) = (x^2 - 2)e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x - 2)e^x.$$

Решим неравенство $f''(x) > 0$, эквивалентное неравенству $x^2+2x-2>0$. Решением этого квадратного неравенства служит объединение интервалов $(-\infty; -1-\sqrt{3}) \approx (-\infty; -2.7)$ и $(-1+\sqrt{3}; +\infty) \approx (0.7; +\infty)$. На этих интервалах функция выпукла.

Ясно, что на интервале $(-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}) \approx (-2.7; 0.7)$ функция будет вогнутой. Тем самым точки $x_1 = -1-\sqrt{3} \approx -2.7$ и $x_2 = -1+\sqrt{3} \approx 0.7$ -- это точки перегиба. Значения функции в точках перегиба такие:

$$f(x_1) = (6+4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}} \approx 0.84;$$

$$f(x_2) = (6-4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}} \approx -1.93.$$

8). Осталось построить окончательный чертёж:

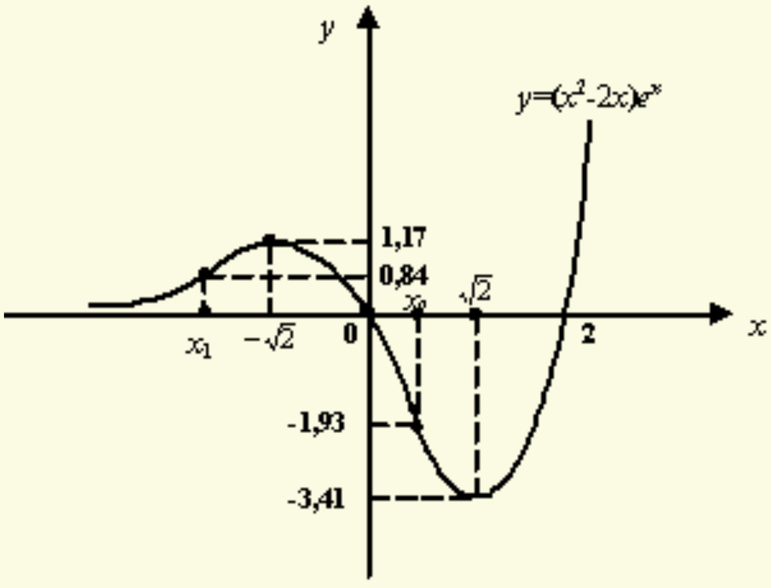


График функции $(x^2 - 2x)e^x$.