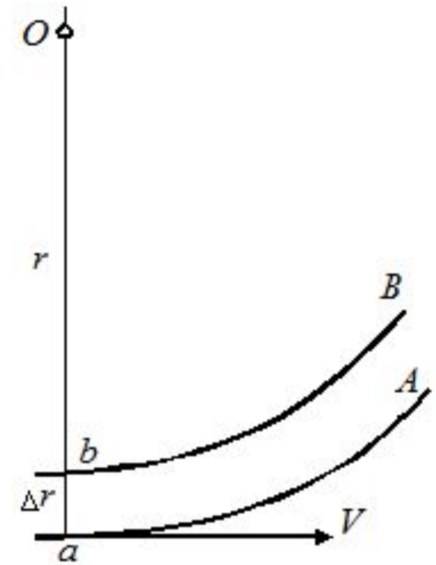
Плоские изоэнтропические течения газа

Лекции 8,9

- В пространстве движущегося газа за исключением некоторых достаточно ограниченных областей (пограничный слой, след за телом и др.), имеет место ***безвихревое***, или ***потенциальное*** течение.

  Выясним, при каком условии течение можно считать потенциальным, т. е. при каком условии в потоке будут отсутствовать вихри

8.1.Критерий потенциальности



- Проведем касательную к линии тока в точке a (совпадает с направлением вектора V) и внутреннюю нормаль.
- Уравнение движения в проекции на нормаль $$\frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dn}$$
- Вдоль линии тока полная удельная энергия и энтропия не изменяют своей величины, т. е. $di_0 = 0$ и $dS = 0$.
- Допустим, что при переходе от линии тока aA к другой bB полная удельная энергия и энтропия газа изменяются. То есть

$$di_0 = di + VdV \neq 0 \qquad dS = \frac{1}{T}\left(di - \frac{dp}{\rho}\right) \neq 0$$

- Исключив $di,$ получим

- $\frac{dp}{\rho} = di_0 - VdV - TdS$ или $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dn} = \frac{di_0}{dn} - V\frac{dV}{dn} - T\frac{dS}{dn}$,
- Из уравнения движения имеем

$$\frac{V^2}{r} = -\frac{di_0}{dn} + V\frac{dV}{dn} + T\frac{dS}{dn}, \quad \text{или} \quad V\left(\frac{dV}{dn} - \frac{V}{r}\right) = \frac{di_0}{dn} - T\frac{dS}{dn}$$

- Выражение в скобках есть удвоенная угловая скорость . Из условия потенциальности (вращательное движение отсутствует) ω = 0, следовательно $\frac{di_0}{dn} - T\frac{dS}{dn} = 0$
- Таким образом, *поток газа можно считать потенциальным, если полная удельная энергия и энтропия при переходе от одной линии тока к другой не изменяются*

$$\boxed{\frac{di_0}{dn} = 0} \qquad \boxed{\frac{dS}{dn} = 0}$$

8.2.Основное дифференциальное уравнение плоского потенциального потока газа

- Уравнение неразрывности для установившегося течения плоского потенциального газового потока

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}=0$$. Отсюда $$V_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+V_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)=0$$

- Выразим плотность через проекции скорости. Считая движение баротропным $(\rho=\rho(p)$, где $p=p(x,y))$, можно записать, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- Заменим $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y}$ через уравнения Эйлера с учетом малости массовых сил ($X\to 0$, $Y\to 0$):

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\frac{dV_x}{dt} = -\rho\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2}\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

- Для проекции на ось OY запишем аналогично. Тогда исходное уравнение неразрывности примет вид

$$\left(a^2 - V_x^2\right)\frac{\partial V_x}{\partial x} - V_x V_y\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \left(a^2 - V_y^2\right)\frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

- Перепишем его с учетом потенциальности течения

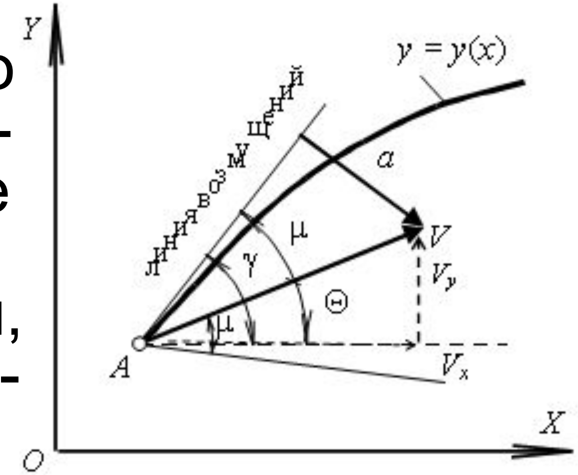
$$\boxed{\left(a^2 - V_x^2\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2V_x V_y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(a^2 - V_y^2\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0}$$

- Это есть *основное дифференциальное уравнение газовой динамики для плоского потенциального установившегося газового потока.*

- Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных относительно неизвестной функции φ. Однако коэффициенты при вторых производных в явном виде от координат x и y не зависят, поэтому уравнение называют *квазилинейным дифференциальным уравнением*.
- Для решения уравнения применяют два метода:
- 1) метод малых возмущений (метод линеаризации), который широко используется при исследовании обтекания тонких тел при малых углах атаки как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоке и позволяет получить решение в аналитическом виде;
- 2) метод характеристик – численный метод, который применяется для определения поля скоростей в сверхзвуковом потоке.

8.3. Характеристики в плоскости потока

- В каждой точке плоскости *XOY* можно провести два направления линий возмущения (линий Маха). При переходе от одной точки к другой направление линий возмущения может изменяться, так как значения V и a в разных точках плоскости *XOY* в общем случае различны.



- Найдем в плоскости такую кривую $y = y(x)$, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением одной из линий возмущения для дан-ной точки. Такую кривую называют *характеристикой.*
- Из рисунка $\boxed{\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\gamma - \Theta) = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\Theta}{1 + \operatorname{tg}\gamma\,\operatorname{tg}\Theta}}$ (*), $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\mu} = \sqrt{\dfrac{V^2}{a^2} - 1}$,
- $\operatorname{tg}\Theta = \dfrac{V_y}{V_x}$ и $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда равенство (*) запишем в виде

- $$\sqrt{\frac{V^2}{a^2}-1}\cdot\left(\frac{dy}{dx}-\frac{V_y}{V_x}\right)=1+\frac{V_y}{V_x}\frac{dy}{dx}.$$ И после преобразований

$$\left(V_x^2-a^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2V_xV_y\frac{dy}{dx}+\left(V_y^2-a^2\right)=0$$

- Решение этого уравнения представляет собой *дифференциальные уравнения характеристик в плоскости потока:*

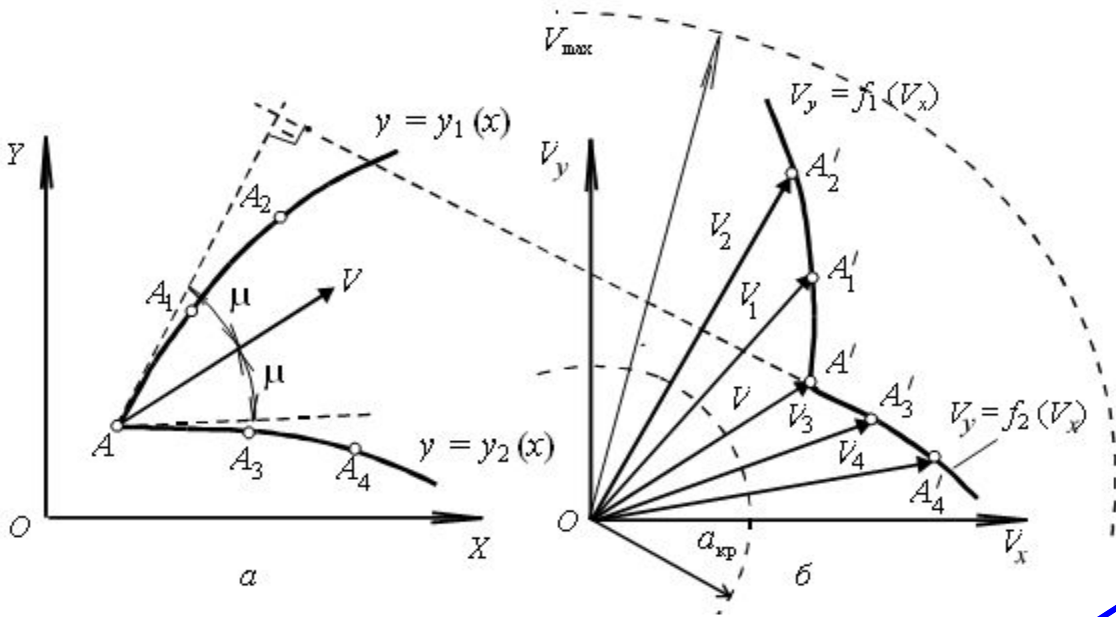
$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{V_xV_y\pm a\sqrt{V^2-a^2}}{V_x^2-a^2}}$$

- Сверхзвуковой поток $(V>a)$ - два различных вещественных корня. Через каждую точку плоскости можно провести два элемента характеристик; всю плоскость можно покрыть *двумя семействами характеристик.* Уравнение является уравнением *гиперболического* типа.

Для определенности интегральные кривые $y = y(x)$, соответствующие решению со знаком «+», называют *характеристиками первого семейства*, а со знаком «–» – *характеристиками второго семейства.*

- Для звукового потока $(V = a)$ - один вещественный корень и одно семейство характеристик; уравнение *параболического* типа.
- Для дозвукового потока ($V < a$) вещественных корней и характеристик нет; уравнение *эллиптического* типа.

8.4.Характеристики в плоскости годографа скорости



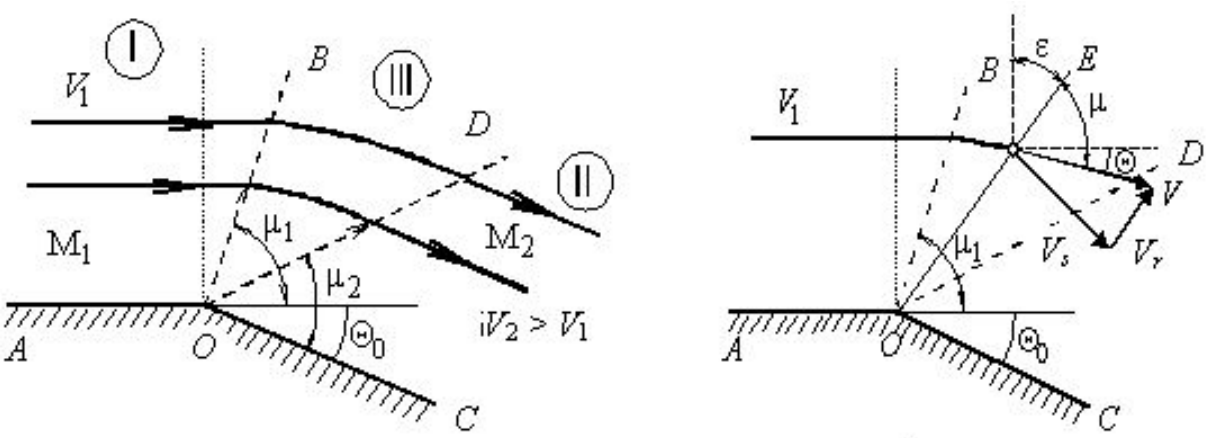
$$
\left.
\begin{aligned}
\left(\frac{dV_y}{dV_x}\right)_{\mathrm{I}} &= -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_2}, \\
\left(\frac{dV_y}{dV_x}\right)_{\mathrm{II}} &= -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1}.
\end{aligned}
\right\}
$$

- Зависимости для расчета изменения скорости течения газа вдоль характеристик в плоскости потока (в физической плоскости)

- Характеристики в физической плоскости и в плоскости годографа скорости перпендикулярны друг другу. Характеристики первого семейства в плоскости XY перпендикулярны характеристикам второго семейства в плоскости $V_x V_y$ и наоборот. Используя дифференциальное уравнение для характеристик в плоскости потока, можно записать дифференциальное уравнение характеристик в плоскости годографа скорости

$$\boxed{\frac{dV_y}{dV_x} = -\frac{V_x^2 - a^2}{V_x V_y \pm a\sqrt{V_x^2 + V_y^2 - a^2}}}$$

9.1.Течение Прандтля–Майера



- Равномерный сверхзвуковой поток газа движется со скоростью V_1 вдоль прямолинейной стенки AO. OB и OD – линии возмущения (здесь они же – характеристики) – границы области возмущенного движения BOD, где происходит непрерывное изменение величины и направления скорости потока. Найдем параметоы течения в области BOD.

- Введем полярные координаты r и ε. Составляющие вектора скорости V_r вдоль характеристики (радиуса r) и перпендикулярно ему – V_s . Вдоль характеристики, параметры течения газа неизменны, поэтому составляющие скорости зависят только от угла ε.
- Движение газа – потенциальное – $\varphi = \varphi(r, \varepsilon)$

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = V_r(\varepsilon), \\ V_s &= \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = V_s(\varepsilon). \end{aligned}\right\}$$

Исходное уравнение для решения задачи – уравнение Бернулли:

$$\frac{V_r^2 + V_s^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{V_{\max}^2}{2}.$$

- Из свойства линии возмущения $V_s = a$. Рассмотрим

$$\frac{\partial V_r}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(rV_s) = V_s + \cancelto{0}{r\frac{\partial V_s}{\partial r}}.$$

Т.к. $\frac{\partial V_r}{\partial\varepsilon} = \frac{dV_r}{d\varepsilon}$ и $V_s = \frac{dV_r}{d\varepsilon} = a$

то уравнение Бернулли

$$V_r^2 + \left(\frac{dV_r}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{2}{k-1}\left(\frac{dV_r}{d\varepsilon}\right)^2 = V_{\max}^2,$$

- После преобразований $\frac{k+1}{k-1}\left(\frac{dV_r}{d\varepsilon}\right)^2+V_r^2=V_{\max}^2$. В направлении течения скорость движения газа возрастает, т. е. $\frac{dV_r}{d\varepsilon}>0$. Поэтому $\frac{dV_r}{d\varepsilon}=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{V_{\max}^2-V_r^2}$, после разделения переменных и интегрирования

$$\begin{cases} \boxed{V_r=V_{\max}\sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(\varepsilon+C)\right]} \\ \boxed{V_s=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}V_{\max}\cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(\varepsilon+C)\right]} \end{cases}$$

- Найдем значение постоянной C из граничных условий на линии возмущения OB.

$$\varepsilon=\frac{\pi}{2}-\mu \qquad V=V_1 \qquad \begin{cases} V_s=V_1\sin\mu_1=a_1 \\ V_r=V_1\cos\mu_1=V_1\sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{M}_1^2}}=\frac{V_1\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}}{\frac{V_1}{a_1}}=a_1\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1} \end{cases}$$

- Отношение скоростей $\frac{V_r}{V_s}=\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}$ с учетом решения запишем как

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\left(\frac{\pi}{2}-\mu_1+C\right)=\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}$$

- Так как $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\mu_1\right)=\mathrm{ctg}\,\mu_1=\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}$, то $\frac{\pi}{2}-\mu_1=\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}$,
- Следовательно $$\boxed{C=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}}$$
- При $\mathrm{M}_1=1$ постоянная принимает значение $\mathrm{C}=0$ и

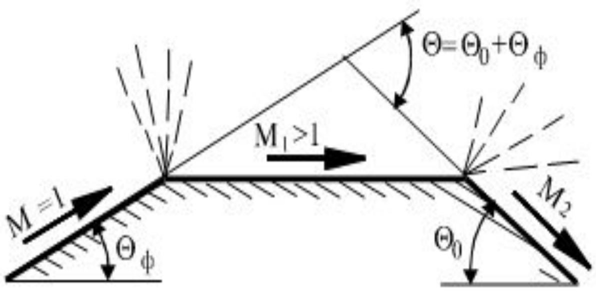
$$\boxed{V_r=V_{\max}\sin\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon} \qquad \boxed{V_s=V_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cos\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon}$$

- Найдем связь между углом поворота потока Θ и числом M через отношение скоростей для промежуточной характеристики ОЕ $\frac{V_r}{V_s}=\sqrt{\mathrm{M}^2-1}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(\varepsilon+C)$
- Отсюда $\varepsilon+C=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}$. Для ОЕ $\Theta=\mu+\varepsilon-\frac{\pi}{2}$
- Т.к. $\frac{\pi}{2}-\mu=\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}$, то $\varepsilon=\Theta+\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}$ и

- зависимость угла поворота потока от числа Маха

$$\Theta=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}-C$$

- Сравнение формул для Θ и C указывает на их абсолютную идентичность, поэтому C можно трактовать как *угол поворота звукового потока до получения заданного числа M_1*. Поскольку этот поворот произошел вне рамок данной задачи, то его принято называть *фиктивным углом поворота потока* - $\Theta_ф$.



$$\Theta+\Theta_ф=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}$$

- *Максимальный угол поворота* представляет собой угол поворота звукового потока (М = 1, *C* = 0) до получения им скорости V_{max} (при расширении до абсолютного вакуума, *p* = 0).

$$\Theta_{\max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1\right)$$

- Для воздуха (*k* = 1,4) $\Theta_{\max} = 129^{\circ}30'$
- *Предельный угол поворота* – это угол, на который может повернуть сверхзвуковой поток (М > 1) при его истечении в вакуум: $\Theta_{пр} = \Theta_{\max} - \Theta_{ф}$

Для потока с числом Маха $М_1$ = 1 $\Theta_{пр} = \Theta_{\max}$,
а для $М_1 = \infty$, $\Theta_{пр} = 0$.