

Дисперсия

Важнейшие выводы теории Максвелла:

Скорость распространения электромагнитного поля в вакууме равняется отношению электромагнитных и электростатических единиц силы тока.

Показатель преломления электромагнитных волн

$$\tilde{n} = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}$$

	n	$\sqrt{\epsilon}$
Азот	1,000299	1,000307
Водород	1,000139	1,000139
Углекислота	1,000449	1,000485
Гелий	1,000035	1,000037
Закись азота	1,000507	1,000547
Толуол жидкий	1,499	1,549
Бензол	1,501	1,511

Но для многих веществ ϵ гораздо больше n^2 Для воды $n^2=1,75$ а $\epsilon=81$

Трудности объяснения дисперсии света в рамках представления э/м теории устраняются электронной теорией.

Дисперсия волн

Фазовая скорость $V = \lambda/T = \omega/k$

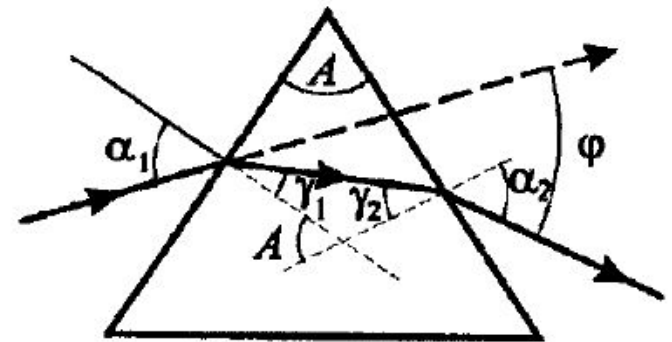
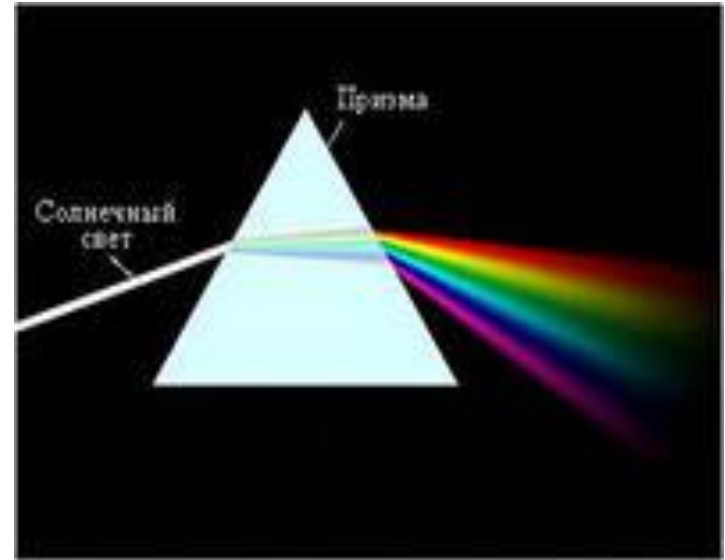
Дисперсия света – зависимость показателя преломления n вещества от длины волны λ (частоты ν) света. $n=f(\lambda)$

$V = V(\omega)$; $V = V(\lambda)$; $n = n(\omega)$; $\omega = \omega(k)$;
 $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$ законы дисперсии

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$$

$$n(\omega) = c / v_{\phi}(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$$

Дисперсия света – зависимость показателя преломления n вещества от частоты ω (длины λ) волны света. $n=f(\omega)$

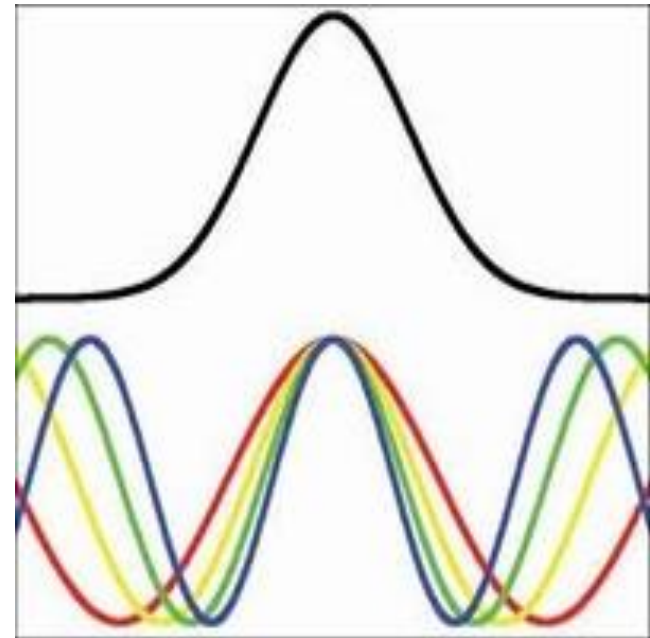


$$\varphi = A(n - 1)$$

$$D = \frac{dn}{d\lambda}$$

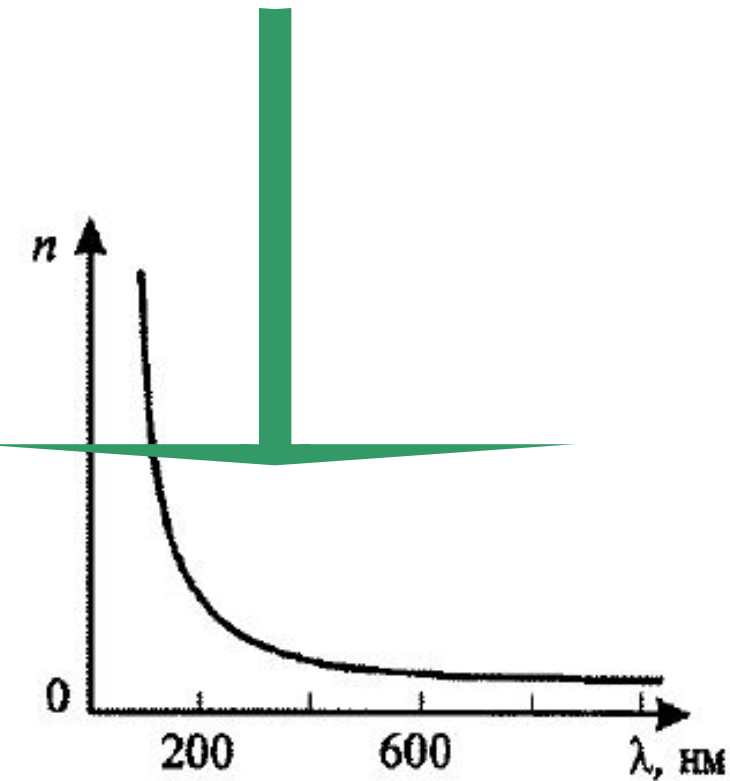
Групповая скорость – скорость переноса энергии

- импульс – суперпозиция волн с разными амплитудами, частотами и фазами.
- Импульс переносит энергию
- Скорость переноса энергии – групповая скорость, скорость импульса



- **Нормальная дисперсия**

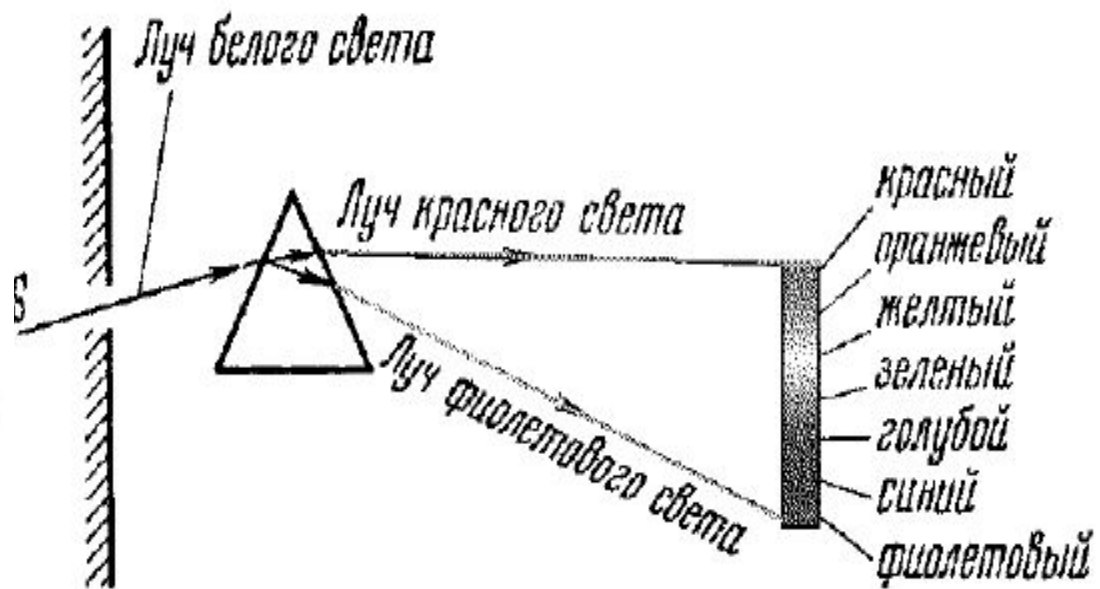
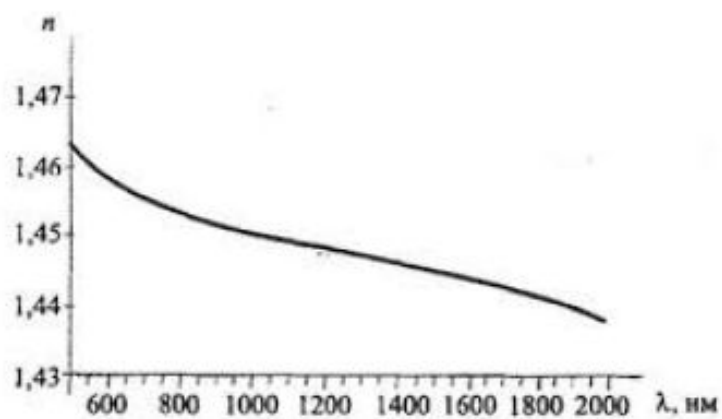
$$\frac{dn}{\delta\lambda} < 0$$



- **Аномальная дисперсия**

$$\frac{dn}{\delta\lambda} > 0$$





Сравнение спектров

Дифракционная решетка

Призма

$$d \sin \varphi = k\lambda$$

$$n = f(\lambda)$$

Сильнее отклоняются
длинные волны

Сильнее отклоняются
короткие волны

$$\varphi \sim \lambda$$

$$\varphi \sim n$$

Разлагает свет по длинам
волн

Разлагает по значению
показателя преломления

Групповая скорость

Максимум огибающей $A_{mod}(z, t)$

$$\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot z = 0, \quad \Delta\omega \cdot dt - \Delta k \cdot dz = 0$$

перемещается со скоростью

$$v_{\text{макс}} = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Групповая скорость

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$$

Волновой пакет (огибающая) перемещается как целое с групповой скоростью.

Формула Релея

$$\omega = v_{\phi} k, \quad v_{zp} = \frac{d\omega}{dk} = v_{\phi} + k \frac{dv_{\phi}}{dk}$$

$$\lambda = 2\pi / k, \quad k \frac{dv_{\phi}}{dk} = -\lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}$$

$$v_{zp} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}$$

$$v_{\phi} = \frac{c}{n(\omega)}, \quad v_{zp} = v_{\phi} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

Нормальная и аномальная дисперсии

$$v_{gp} = v_{\phi} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0$$

- нормальная дисперсия

$$v_{gp} < v_{\phi}$$

$$\frac{dn}{d\lambda} > 0$$

- аномальная дисперсия

$$v_{gp} > v_{\phi}$$

Теория дисперсии

Френель – свет распространяется в светоносном эфире, обладающем свойствами упругого твердого тела (но крайне разрежен и проникает в обычные среды).

В вещественных средах молекулы изменяют свойства эфира, и таким образом влияют на скорость распространения света.

Зависимость преломления от длины волны (по Коши)

$$n = a + \frac{b}{\lambda_0^2} + \frac{c}{\lambda_0^4} + \dots$$

a , b , c , - экспериментальные постоянные. Хорошо описывает нормальную дисперсию.

Зельмейер (1871 г.) – теория основана на взаимодействии молекул и эфира. Особенность – молекулы обладают собственными частотами колебаний (характерными для вещества), что объясняет наличие полос поглощения, и зависимости n от частоты как вблизи, так и вдали от полос поглощения.

Теория связала скорость света с другим параметрами вещества, ее подходы сохранились в современной электронной теории дисперсии

Электронная теория дисперсии.

Сущность взаимодействия света с веществом сводится к интерференции падающей (первичной) и вторичных волн (вследствие колебания электронов и ионов вещества).

Электронная теория дисперсии Лоренца рассматривает дисперсию света как результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}$$

$$\rightarrow n^2 = 1 + \frac{n_0 e \chi}{\varepsilon_0 E}$$

ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ: $p = r e$

$$P = \sum N_i e_i r_i$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi P$$

$$D = \varepsilon E = E + 4\pi N e r$$

Задача сводится к определению смещения электрона под действием внешнего, периодически меняющегося поля при учете сил, действующих на электрон, входящий в число атома.

Силы, действующие на электрон

1. Удерживающая сила –упругая
(квазиупругая)

$$F = -br$$

Уравнение движения электрона

$$m\ddot{r} = -br$$

$$r = r_0 \cos \omega_0 t$$

r_0 — амплитуда

$$\omega_0 = \sqrt{b/m}$$

природы атома)

круговая частота собственных колебаний (зависит от

2. Тормозящая сила (колеблющийся электрон
отдает энергию)

$$G = -g \frac{dr}{dt} = -g\dot{r}$$

3. Вынуждающая сила (световая волна, распространяющаяся в среде)

$$E = E_0 \cos \omega t$$

Уравнение дисперсии

$$m\ddot{r} = eE - br - g\dot{r}$$

уравнение движения при вынужденных колебаниях

Решив уравнение, найдем r , $P = Np = Ner$, $\varepsilon = n^2$

Для упрощения рассмотрим уравнение, пренебрегаю силой сопротивления

$$\dot{g} = 0$$

Поле световой волны

$$E = E_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_0 \sin \omega t$$

$\omega_0 = \sqrt{b/m}$ — частота собственного колебания электрона

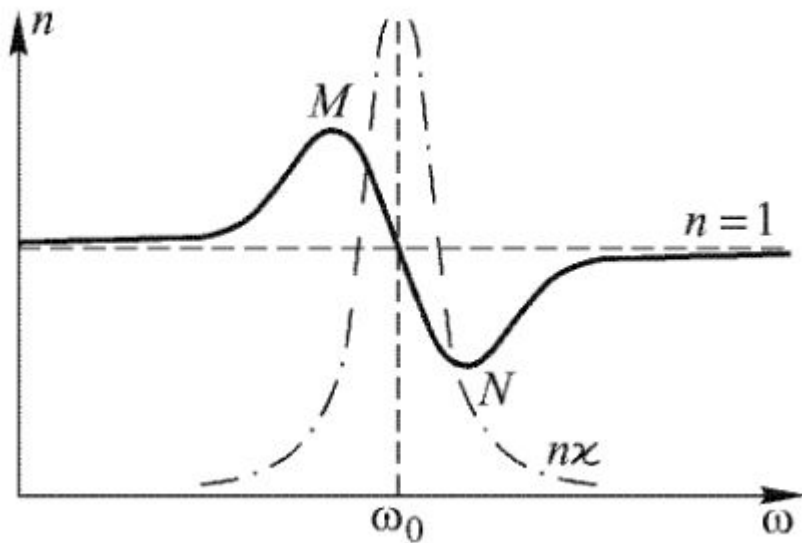
$$r = A \sin \omega t$$

где $A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

$$P = Ner = N \frac{e^2}{m} E_0 \frac{\sin \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$D = \varepsilon E = E + 4\pi P$$

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$



В области от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$ n больше 1, и возрастает при возрастании ω (нормальная дисперсия)

при $\omega = \omega_0$ имеем $n^2 = \pm\infty$ не имеет смысла (аномальная дисперсия)

В области от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \infty$ n^2 n меньше единицы и тоже возрастает

преобразуем

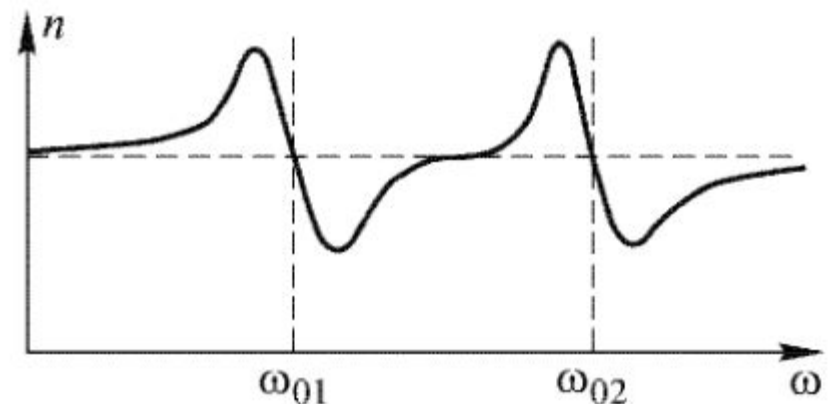
$$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$$

N пропорционально плотности (числу частиц N_0 в единице объема)

$N = fN_0$ f - сила осциллятора

$$n^2 = 1 + 4\pi N_0 \frac{e^2}{m} \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$n^2 = 1 + 4\pi N_0 \sum \frac{f_i e_i^2}{m_i} \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}$$

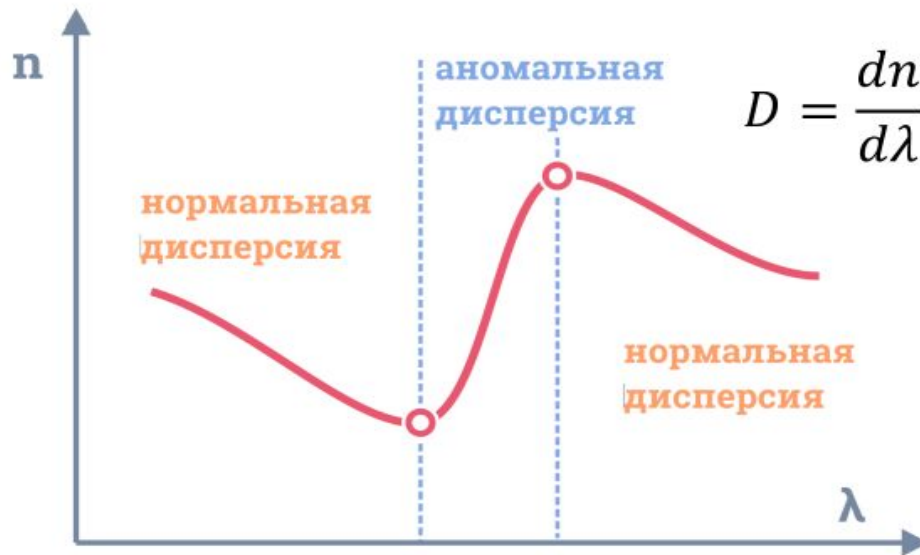


Формула

ЗЕЛЬМЕЙЕРА:

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$n^2 = 1 + \frac{n_0}{\epsilon_0} \sum_i \frac{e_i}{m_i} \frac{1}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}$$



Модель для показателя преломления вещества

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} = n^2(\omega)$$

Для стёкол в оптическом диапазоне длин волн

$$\omega < \omega_0$$

Показатель преломления увеличивается с ростом частоты

