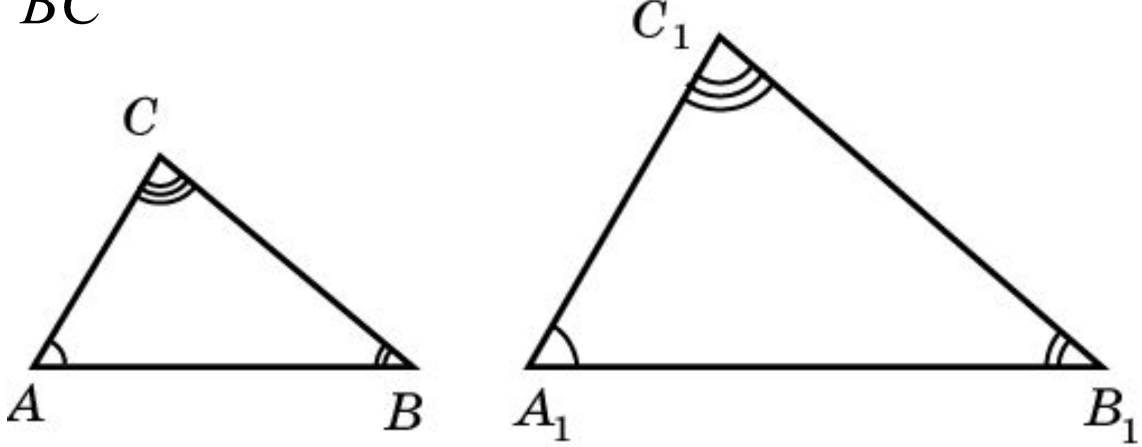
Подобие треугольников

Два треугольника называются подобными, если углы одного соответственно равны углам другого и соответствующие стороны пропорциональны. Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом подобия.

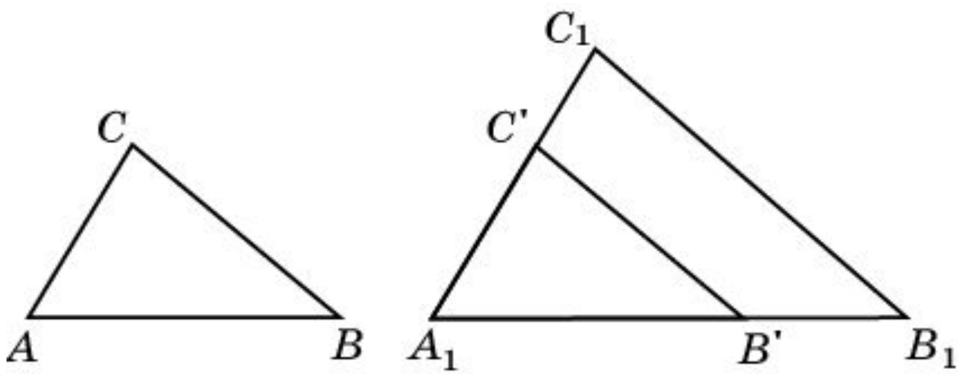
Таким образом, треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и

$\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = k$, где k – коэффициент подобия.



Первый признак подобия

Теорема. (Первый признак подобия.) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



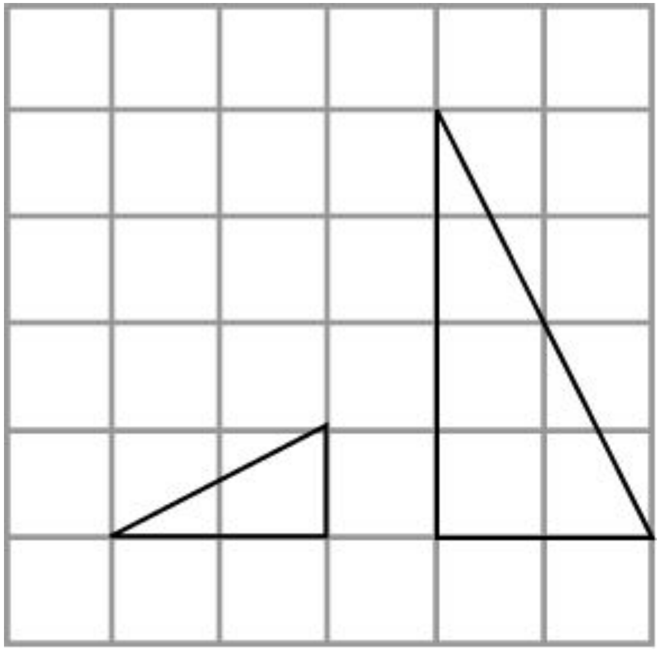
Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тогда и $\angle C = \angle C_1$.

Докажем, что $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Отложим на луче A_1B_1 отрезок A_1B', равный AB, и проведем прямую $B'C'$, параллельную B_1C_1. Треугольники $A_1B'C'$ и ABC равны (по второму признаку равенства треугольников). По теореме о пропорциональных отрезках имеет место равенство $\frac{A_1B_1}{A_1B'} = \frac{A_1C_1}{A_1C'}$. Следовательно, имеем равенство $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$. Аналогичным образом доказывается, что имеет место равенство $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$. Следовательно, треугольники подобны.

Упражнение 1

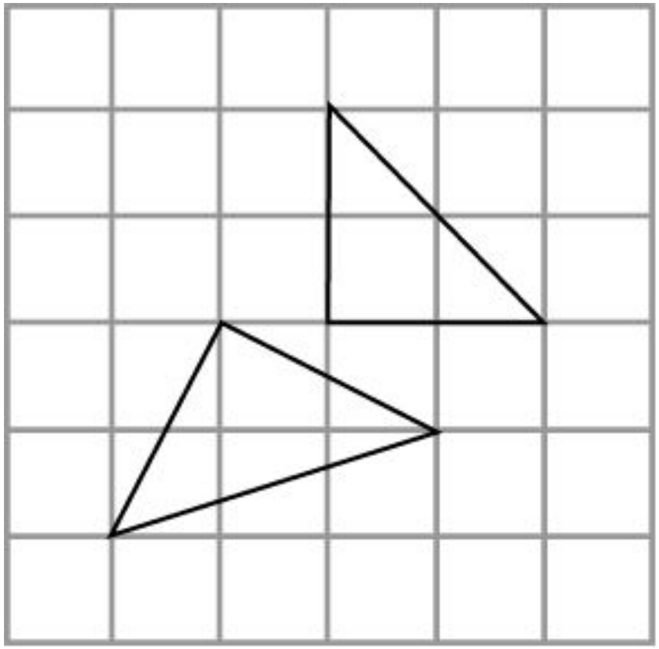
Выясните, подобны ли треугольники, изображенные на рисунке?



Ответ: Да.

Упражнение 2

Выясните, подобны ли треугольники, изображенные на рисунке?



Ответ: Да.

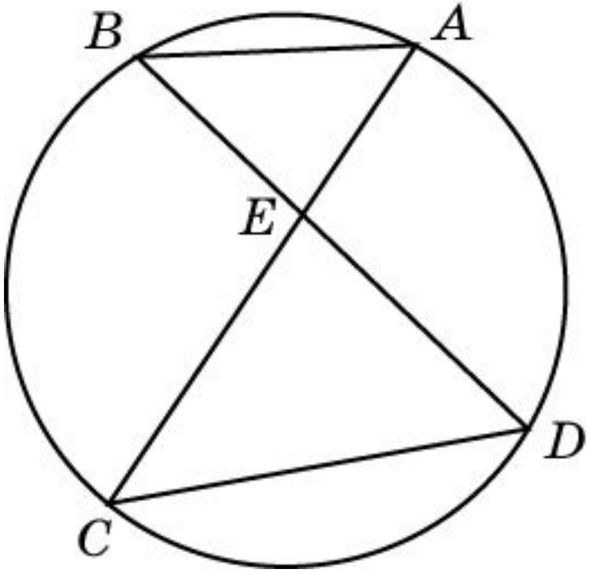
Упражнение 5

Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) 0,5; б) 2.

Ответ: а) 2,5 см, 4 см и 5 см;
б) 10 см, 16 см и 20 см.

Упражнение 16

Пусть AC и BD – хорды окружности, пересекающиеся в точке E. Докажите, что треугольники ABE и CDE подобны.



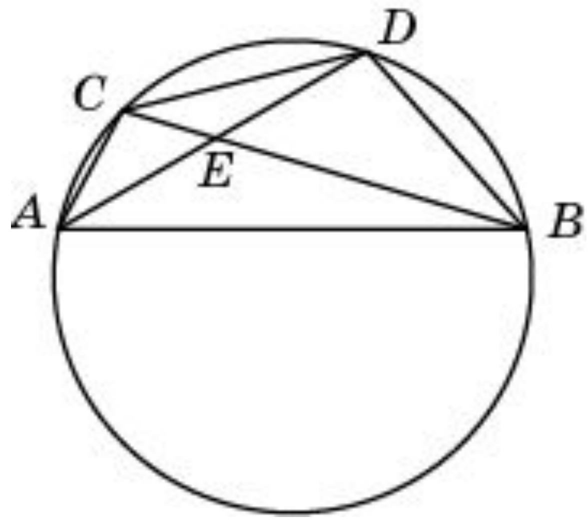
Доказательство: Угол A треугольника ABE равен углу D треугольника CDE, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности.

Аналогично, угол B равен углу C.

Следовательно, треугольники ABE и CDE подобны по первому признаку.

Упражнение 17

На рисунке $AE = 3$, $BE = 6$, $CE = 2$. Найдите DE.



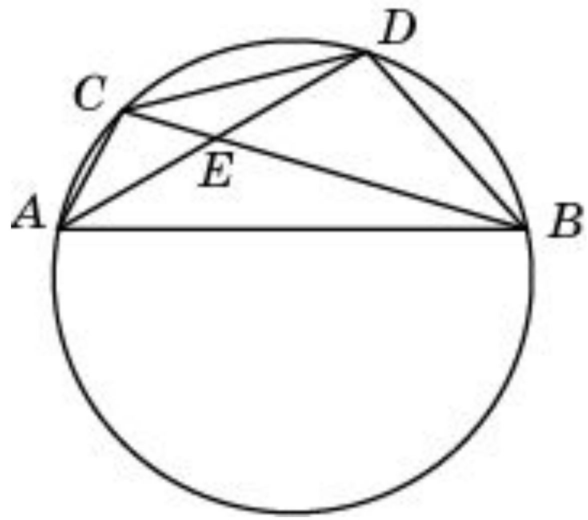
$$\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{DE}$$

Ответ: 4.

Упражнение 18

На рисунке $AB = 8$, $BE = 6$, $DE = 4$. Найдите CD.



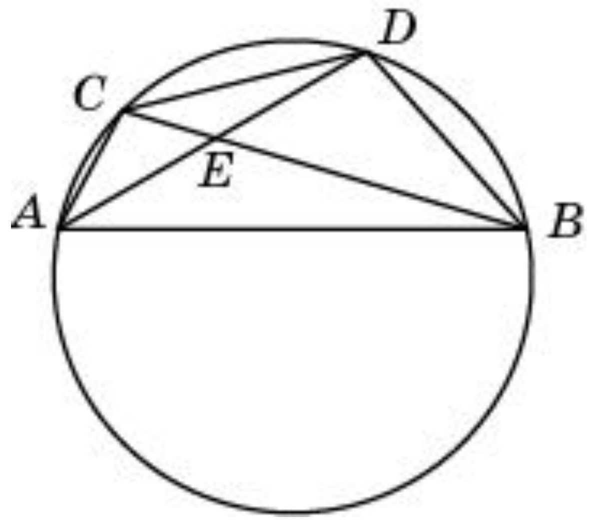
$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$$

$$\frac{8}{CD} = \frac{6}{4}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$.

Упражнение 19

На рисунке $CE = 2$, $DE = 5$, $AE = 4$. Найдите BE.



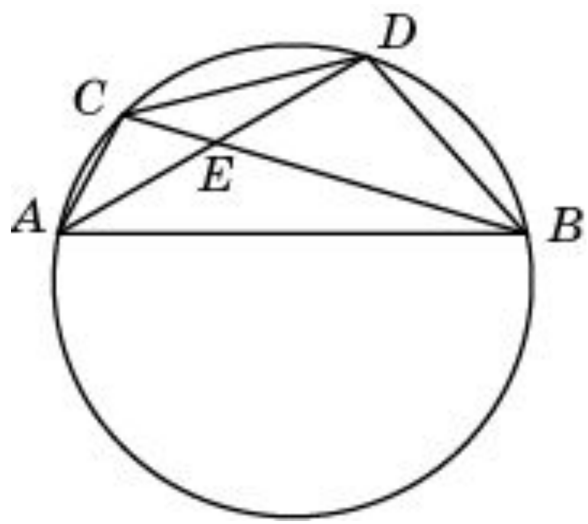
$$\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{BE}{5}$$

Ответ: 10.

Упражнение 20

На рисунке $CE = 4$, $CD = 10$, $AE = 6$. Найдите AB.



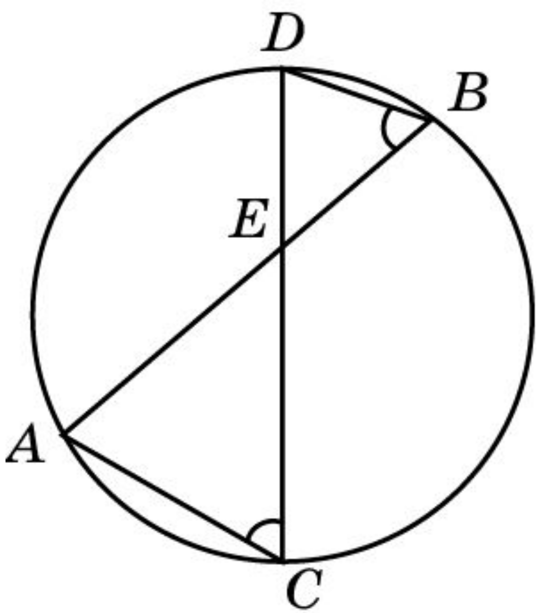
$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\frac{AB}{10} = \frac{6}{4}$$

Ответ: 15.

Упражнение 23

Докажите, что произведение отрезков любой хорды, проведенной через внутреннюю точку круга, равно произведению отрезков диаметра, проведенного через ту же точку.

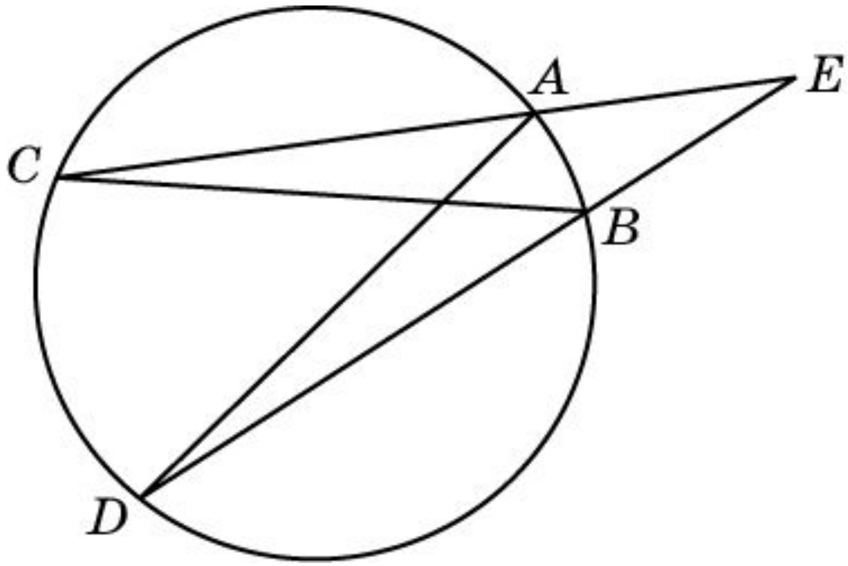


Решение. Пусть дан круг с центром в точке O, хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке E. Докажем, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$Треугольники ACE и DBE подобны. Следовательно,

$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$, значит, $AE \cdot BE = CE \cdot DE$

Упражнение 24

Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающая окружность соответственно в точках A, C и B, D. Докажите, что треугольники ADE и BCE подобны.

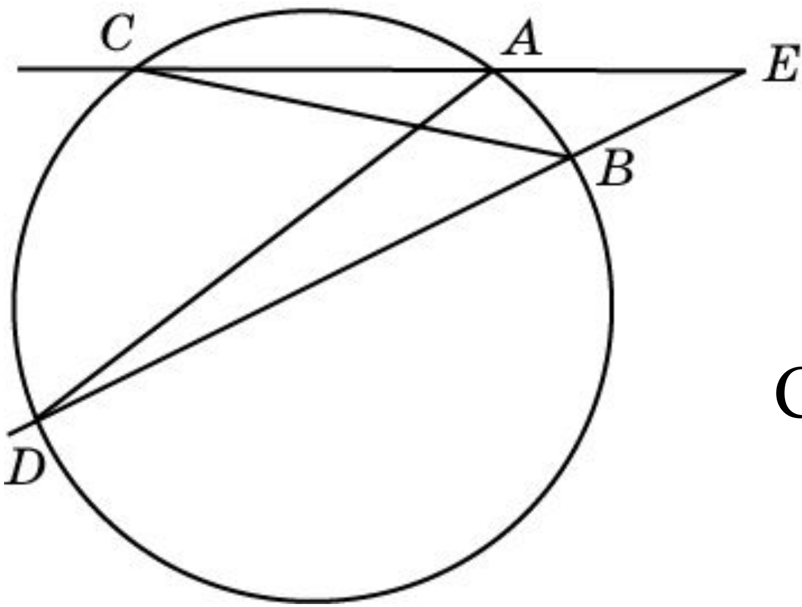


Доказательство: Угол D треугольника ADE равен углу C треугольника BCE, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Угол E этих треугольников общий.

Следовательно, треугольники ADE и BCE подобны по первому признаку.

Упражнение 25

Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающая окружность соответственно в точках A, C и B, D. Докажите, что $AE \cdot CE = BE \cdot DE$.

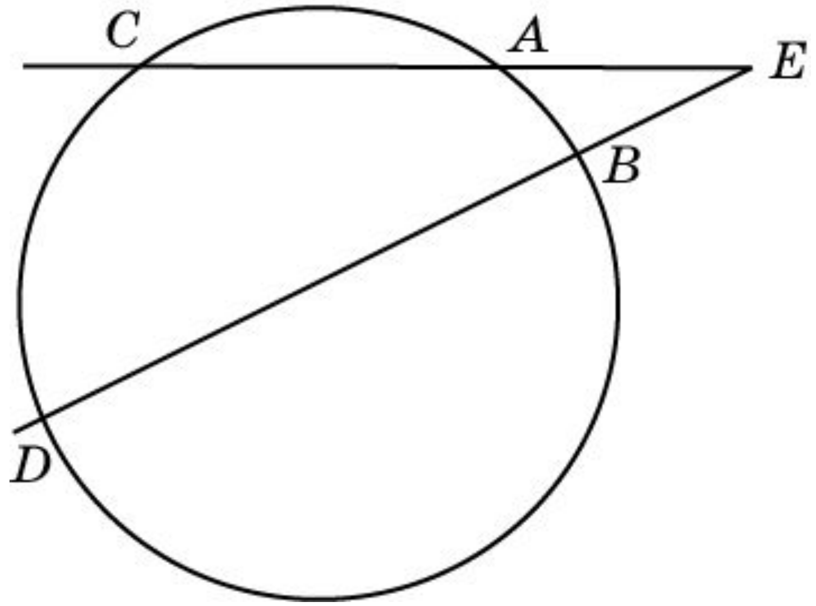


Доказательство: Треугольники ADE и BCE подобны. Значит, $AE : DE = BE : CE$.

Следовательно, $AE \cdot CE = BE \cdot DE$.

Упражнение 26

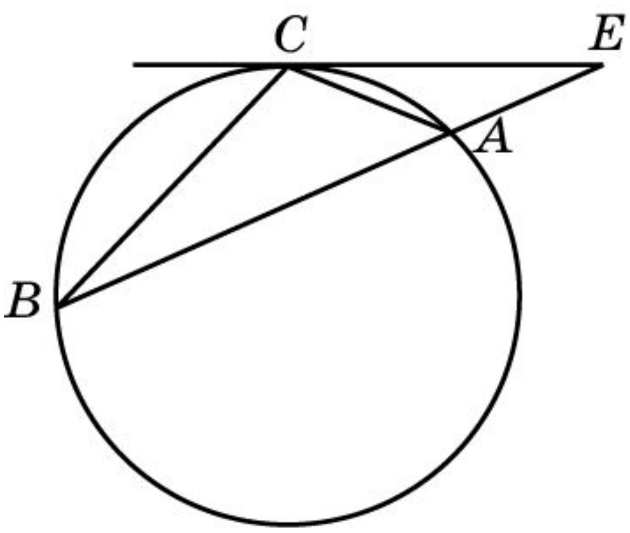
На рисунке $AE = 9$, $BE = 8$, $CE = 24$. Найдите DE.



Ответ: 27.

Упражнение 27

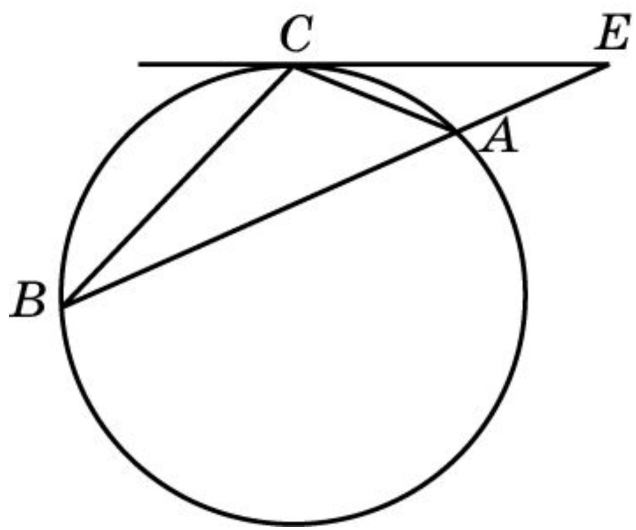
Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C – точка касания). Докажите, что треугольники EAC и ECB подобны.



Доказательство. У треугольников EAC и ECB угол E общий. Углы ACE и CBE равны, как углы, опирающиеся на одну хорду. Следовательно, треугольники EAC и ECB подобны.

Упражнение 28

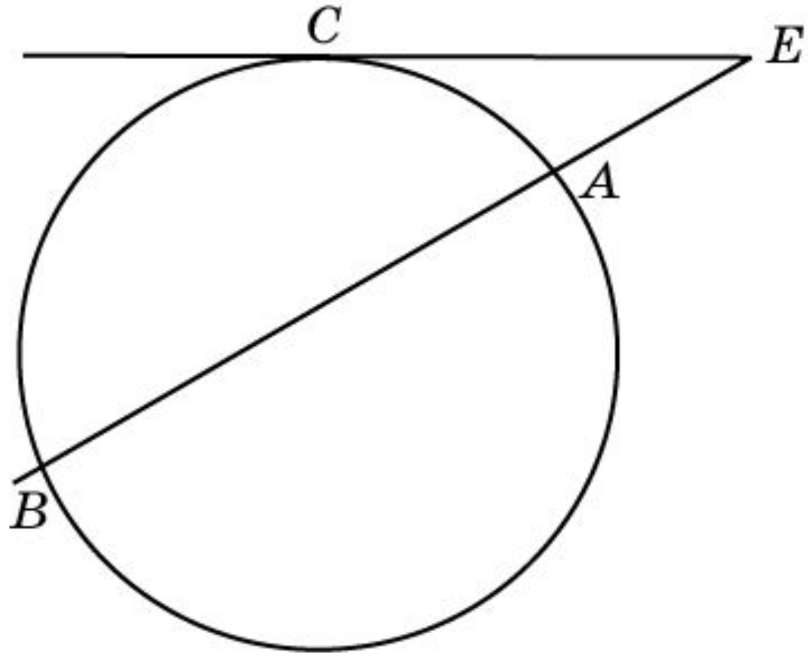
Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C – точка касания). Докажите, что произведение отрезков AE и BE секущей равно квадрату отрезка CE касательной.



Доказательство. Треугольники EAC и ECB подобны. Следовательно, $AE:CE = CE:BE$, значит, $AE \cdot BE = CE^2$.

Упражнение 29

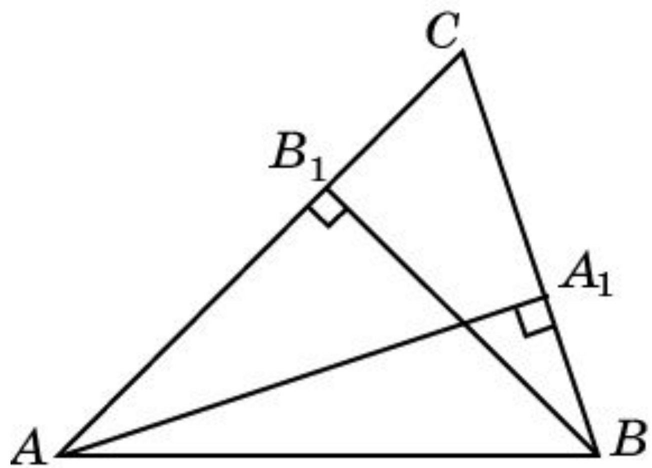
На рисунке $AE = 6$, $BE = 24$. Найдите CE.



Ответ: 12.

Упражнение 30

В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1AC и B_1BC подобны.

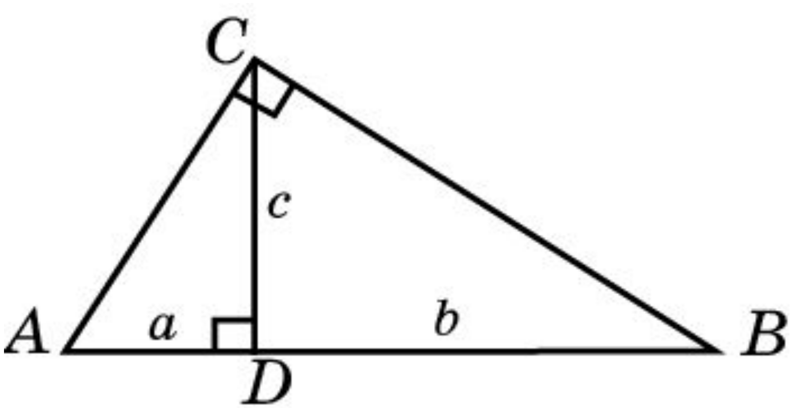


Доказательство. Треугольники A_1AC и B_1BC прямоугольные и имеют общий угол C. Следовательно, они подобны по двум углам.

Упражнение 31

Докажите, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.

(Средним геометрическим двух положительных чисел a и b называется положительное число c, квадрат которого равен ab, т.е. $c = \sqrt{a \cdot b}$).



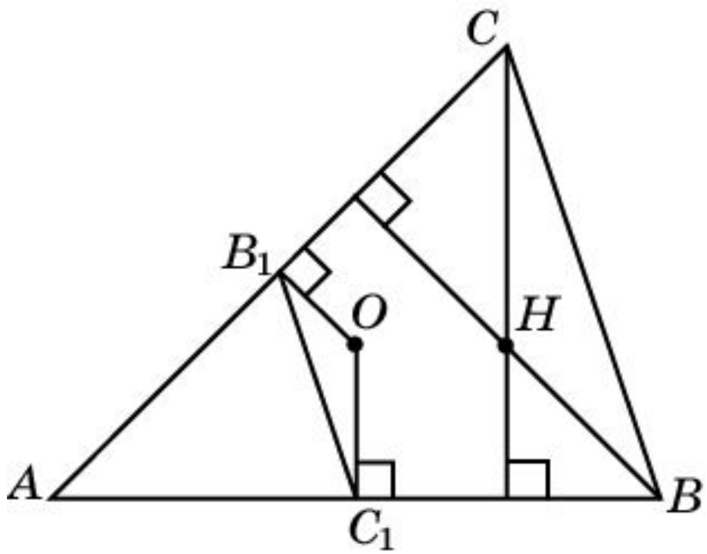
Решение: Треугольники ADC и CDB подобны. Следовательно,

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$$

, или $CD^2 = AD \cdot BD$, т.е. CD является средним геометрическим AD и BD.

Упражнение 32

В треугольнике ABC точка H – точка пересечения высот, точка O – центр описанной окружности. Докажите, что длина отрезка CH в два раза больше расстояния от точки O до прямой AB.



Решение: Пусть B_1, C_1 – середины сторон AC и AB треугольника ABC. Треугольники HBC и OB_1C_1 подобны, $BC = 2B_1C_1$. Следовательно, $CH = 2OC_1$.