ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.АКМУЛЛЫ»

ИНСТИТУТ
ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ, ЦИФРОВЫХ И НАНОТЕХНОЛОГИЙ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Иррациональные неравенства

Выполнила студентка 2 курса
ПОМ_ИНФ 21-21
Мустафина О.И.

Цель работы

изучения иррациональных неравенств.

Задачи :

- Изучить основные понятия и определения.
- Рассмотреть теоретические основы решения иррациональных неравенств, различные методы и приемы.
- Изучить примеры задач, предложить методы их решения.
- Провести анализ полученных результатов и сделать выводы о применимости изученных методов и приемов решения иррациональных неравенств.

Объект исследования

Иррациональные неравенства

Предмет исследования

различные виды

ИН

и методы их

Иррациональное неравенство-

Это Неравенство, содержащее неизвестные величины или некоторые функции неизвестных величин под знаком радикала.

Иррациональные неравенства

$\sqrt{f(x)} \vee g(x)$, где f(x) и g(x) - некоторые функции переменной x,

□ – знак сравнения($<$, $\leq$, $>$, $\geq$).

Примеры иррациональных неравенств: $\sqrt{x-1} < 2-x$.

Для того, чтобы решить иррациональное неравенство, необходимо найти множество всех значений переменной, которые удовлетворяют данному неравенству. Это множество называется множеством решений неравенства.

Методы решения Иррациональных Неравенств

Способ решения неравенств состоит в преобразовании их к рациональным нераве

1. Метод сведения к эквивалентной системе или совокупности рациональных неравенств;
2. Умножение обеих частей неравенства на сопряженное выражение;
3. Метод введения новой переменной;
4. Решение иррациональных неравенств с использованием свойств входящих в них функций:
   - *Использование монотонности функции*
   - *Использование ОДЗ*
   - *Использование ограниченности функций*
   - *Использование графиков функций*

Наиболее простые иррациональные неравенства имеют вид:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$,

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$,

3) $\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)}$ или $\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)}$.

При решении иррациональных неравенств следует запомнить правила:

- *при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, равносильное данному неравенству.*
- *если обе части неравенства возводят в четную степень, то получится неравенство, равносильное исходному только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.*

Например, возведя в квадрат:

-*верное* неравенство **-2<3,** мы получим *верное* неравенство **4<9;**
-*верное* неравенство **-3<2,** мы получим *неверное* неравенство **9<4;**
-*неверное* неравенство **2<-3,** мы получим *верное* неравенство **4<9;**
-*неверное* неравенство **3<2,** мы получим *неверное* неравенство **9<4.**

Метод сведения к эквивалентной системе или совокупности рациональных неравенств

Иррациональное неравенство

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$$

или $\sqrt[n]{A(x)} \le B(x), n \in N.$

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{A(x)} < B^n(x)$ или $\sqrt{A(x)} \le B^n(x)$ решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то в силу не отрицательности выражения $\sqrt[n]{A(x)}$ неравенства такого вида решают, переходя к системе трех неравенств:

$$\begin{cases} A(x) < B^n(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A(x) \le B^n(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases}$$

Иррациональное неравенство

$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt[n]{A(x)} \ge B(x), n \in N.$

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{A(x)} > B^n(x)$ или $\sqrt{A(x)} \ge B^n(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то в силу не отрицательности выражения $\sqrt[n]{A(x)}$ неравенства такого вида решают, переходя к совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) > B^n(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) \ge B^n(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

возведение в степень обеих частей неравенства

Иррациональное неравенство

$$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)} \text{ или } \sqrt[n]{A(x)} \leq \sqrt[n]{B(x)}, n \in N.$$

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $A(x) < B(x)$ или$A(x) \leq B(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то нужно переходить к системе:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A(x) \geq B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Остальные методы решения ИН:

- Умножение обеих частей неравенства на сопряженное выражение:

-В ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряженное одной из них.

- Метод введения новой переменной:

- Введение новой переменной применяется в том случае, если в уравнении неравенстве неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины.

- Решение иррациональных неравенств с использованием свойств входящих в них функций:

- Аналитического обоснования свойств функции решения - это вопрос опыта и интуиции.
Например: Графический способ даёт приближённое решение,
поэтому всегда требует проверки.

Решение простейших ИН

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{5x-10} > 1$

Решение. Запишем равносильную ему систему рациональных неравенств:

$$\begin{cases} 5x - 10 < 1^2, \\ 5x - 10 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{11}{5}, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Условие $B(x) = 1 \geq 0$ выполнено при всех x, и нет необходимости добавлять его к выписанной системе.

Ответ: $\left[2; \frac{11}{5}\right)$

Решение более сложных ИН

Рассмотрим решение иррациональных неравенств следующего вида

$$\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} < C(x)$$

Поскольку $A(x) \geq 0$ **,** $B(x) < 0$**, то должны выполнятся условия** $A(x) \geq 0$**,** $B(x) \geq 0$ **,** $\sqrt{B(x)} < C(x)$ **(соответственно** $\sqrt{A(x)} < C(x)$**). На множестве, где эти условия выполняются, данное неравенство равносильно неравенству** $A(x) < (C(x) - \sqrt{B(x)})^2$ **(соответственно неравенству** $B(x) < (C(x) - \sqrt{A(x)})^2$ **), которое сводится к разобранным выше типам неравенств.**

Решение более сложных ИН

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2$

Решение. Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными, и его можно было возвести в квадрат:

$$\sqrt{2x+3}>\sqrt{x-2}+2 \Rightarrow$$

$$2x+3>x-2+4\sqrt{x-2}+4 \Rightarrow$$

$$x+1>4\sqrt{x-2}.$$

Мы пришли к простейшему стандартному неравенству, равносильно системе:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x+1>0, \\ 16(x-2)<x^2+2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ x^2-14x+33>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ \left[\begin{cases} x<3, \\ x<11. \end{cases}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\leq x<3$$

Ответ: $[2;3)$

Решение более сложных ИН

Пример 3. Решение неравенства $x^2 + 14x + 9 + 8\sqrt{-x^2 - 14x - 24} \le 0$

Решение. $x^2 + 14x + 24 - 15 + 8\sqrt{-x^2 - 14x - 24} \le 0$

Обозначим $\sqrt{-x^2 - 14x - 24} = t \Rightarrow -t^2 - 15 + 8t \le 0 \Rightarrow t^2 + 15 - 8t \ge 0 \Rightarrow$(t-3)(t-5) ≥ 0

1) способ: $(\sqrt{-x^2 - 14x - 24} - 3)(\sqrt{-x^2 - 14x - 24} - 5) \ge 0$

$$\begin{cases} (-x^2 - 14x - 33)(-x^2 - 14x - 49) \ge 0 \\ -x^2 - 14x - 24 \ge 0 \\ => \ x^2 + 14x + 24 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x+11)(x-7)^2 \ge 0 \\ (x+2)(x+12) \le 0 \end{cases}$$

2) способ: вместо рационализации, сначала определить область значений относительно t, $\left[\begin{array}{l} t \ge 5 \\ t \le 3 \end{array}\right. \Rightarrow$

обратная замена и рационализация $\left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2 - 14x - 24} \ge 5 \\ \sqrt{-x^2 - 14x - 24} \le 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2 - 14x - 24 \ge 25 \\ 0 \le -x^2 - 14x - 24 \le 9 | -25 \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 14x + 49 \le 0 \\ 16 \le x^2 + 14x + 49 \le 25 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x+7)^2 \le 0 \\ 16 \le (x+7)^2 \le 25 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4 \le x + 7 \le 5 \\ -5 \le x + 7 \le -4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ -3 \le x \le -2 \\ -12 \le x + 7 \le -11 \end{array}\right.$$

Ответ: $[-12; -11] \cup [-7] \cup [-3; -2]$

Решение примера из ЕГЭ

Пример 4. ***Задание №14(507894)***

Решите неравенства. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1} \leq 0,$

Равносильная система:

Возводим в квадрат неравенство $\begin{cases} x^2-2x+1 \geq 0, \\ x^2+x \geq 0, \\ \dfrac{(x^2-2x+1)-(x^2+x)}{x^2+x-1} \leq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0, \\ x(1+x) \geq 0, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+x-1} \leq 0, \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \in R, \\ x \geq 0, \\ x \leq -1, \\ \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} < x \leq \dfrac{1}{3}, \\ x > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}; -1\right] \cup \left[0; \dfrac{1}{3}\right] \cup \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right).$

Заключение

Иррациональные неравенства – довольно сложный раздел школьного курса математики, и на его изучение отведено крайне мало времени, то становится ясно, что учащиеся как правило это раздел усваивают с трудом.

В данном исследовании были рассмотрены основные методы решения иррациональных неравенств. Мы начали с определения иррациональных выражений, а затем перешли к решению иррациональных неравенств с помощью различных методов.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!