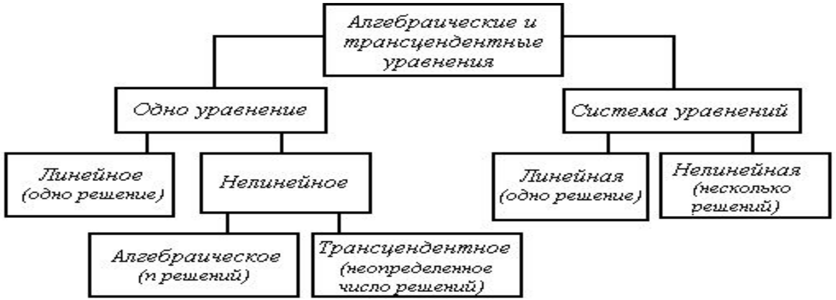
Тема 2. Численные методы решения нелинейных уравнений.

Выбор подходящего метода для решения уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи. Задачи, сводящиеся к решению алгебраических и трансцендентных уравнений, можно классифицировать по числу уравнений и в зависимости от предлагаемого характера и числа решений (Рисунок 1).

Рисунок 1. Классификация уравнений



Одно уравнение будем называть *линейным*, *алгебраическим* или *трансцендентным* в зависимости от того, имеет ли оно одно решение, *n* решений или неопределенное число решений. Систему уравнений будем называть *линейной* или *нелинейной* в зависимости от математической природы входящих в нее уравнений.

Нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса - алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими уравнениями* называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие) называются *трансцендентными.*

Методы решения нелинейных уравнений делятся на две группы:

точные методы;

итерационные методы.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются *итерационные методы* с заданной степенью точности.

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$,

где:

1. Функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*] вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка.
2. Значения *f*(*x*) на концах отрезка имеют разные знаки (*f*(*a*) · *f*(*b*) < 0).
3. Первая и вторая производные *f* ′ (*x*) и *f* ″ (*x*) сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Условия 1) и 2) гарантируют, что на интервале [*a*, *b*] находится хотя бы один корень, а из 3) следует, что *f*(*x*) на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.

Решить уравнение *итерационным методом* значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что:

$$f(\xi) = 0,$$

называется *корнем уравнения* (1) или *нулем* функции $f(x)$.

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационным методом состоит из двух этапов:

1. *отделение корней* - отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка;
2. *уточнение приближенных корней* - доведение их до заданной степени точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных $x = a$ и $x = b$ точках области ее существования.

Пример.

Отделить корни уравнения: $f(x) \equiv \quad - 6x + 2 = 0$.

Составим приблизительную схему: x^3

x	-∞	-3	-1	0	1	3	+∞
f(x)	-	-	+	+	-	+	+

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах [-3, -1], [0, 1] и [1, 3].

Приближенные значения корней (*начальные приближения*) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены графическим способом.

В инженерной практике распространен *графический способ* определения приближенных корней.

Принимая во внимание, что действительные корни уравнения - это точки пересечения графика функции *f*(*x*) с осью абсцисс, достаточно построить график функции *f*(*x*) и отметить точки пересечения *f*(*x*) с осью *Ox*, или отметить на оси *Ox* отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение *равносильным* ему уравнением: $f_1(x) = f_2(x)$,

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция *f*(*x*). Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример.

Графически отделить корни уравнения

$x \lg x = 1$.

Уравнение удобно переписать в виде

равенства : $\lg x = \frac{1}{x}$. Отсюда ясно, что корни уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень уравнения или определим его содержащий отрезок [2, 3].