Тела вращения в сверхзвуковом потоке

Лекции 22, 23

22.1.Конический и осесимметричный потоки

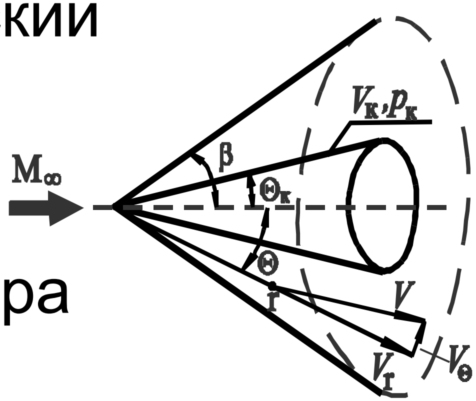
- *Коническим* называют поток, в котором параметры газа на конической поверхности сохраняются постоянными. Они изменяются только при переходе с одной конической поверхности на другую.

- *Осесимметричным* называют течение, обладающее симметрией относительно оси тела (т.е само тело также обладает осевой симметрией). В этом случае течение газа во всех меридиональных плоскостях одинаково, и движение газа можно изучать как плоское в одной из меридиональных плоскостей

22.2.Осесимметричное обтекание острого конуса

- Результаты решения задачи осесимметричного ($\alpha = 0$) обтекания острого конуса используются в следующих случаях:
- а) для определения коэффициента волнового сопротивления конических головных частей корпусов ЛА;
- б) в качестве исходных данных для численного расчета обтекания конусов при $\alpha \neq 0$;
- в) в качестве начальной точки при расчете обтекания тел с криволинейной образующей;
- г) для приближенного расчета распределения давления по поверхности тел более сложной формы

- При симметричном обтекании конуса с углом полураствора $\Theta_к (\Theta_к < \Theta_{max}$ при заданном числе Маха) перед ним возникает присоединенный конический скачок уплотнения с вершиной в вершине конуса.
Задача расчета обтекания конуса сводится к нахождению угла полураствора конического скачка и поля скоростей (и давлений) между скачком уплотнения и конусом.



Осесимметричное обтекание острого конуса

- Для всех плоскостей, перпендикулярных продольной оси конуса, граничные условия одинаковы и течения между конусом и скачком уплотнения геометрически подобны. В сходственных точках этих сечений (на конических поверхностях) параметры потока одинаковы – коническое течение

- Задача решается в полярной системе координат (r, Θ) с полюсом в вершине конуса: $V_r = V_r(\Theta), \quad V_\Theta = V_\Theta(\Theta)$
- Течение между конусом и скачком является *изоэнтропическим и потенциальным* (безвихревым).
- Следовательно $\varphi = \varphi(r, \Theta)$ и $V_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad V_\Theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Theta}$
- Для осесимметричного конического потока потенциал скорости $\varphi(r, \Theta) = r \cdot F(\Theta)$. Тогда

$$V_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = F(\Theta) \qquad V_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta} = F'(\Theta) \Longrightarrow V_\Theta = \frac{dV_r}{d\Theta}$$

- Из уравнения неразрывности $\operatorname{div}(\rho V) = 0$ (для осесимметричного установившегося течения - в сферических координатах): $\operatorname{div}(\rho V) = d(\rho V_\Theta)/d\Theta + 2\rho V_r + \rho V_\Theta \operatorname{ctg}\Theta = 0,$ после преобразований получаем: $\left(1 - \dfrac{V_\Theta^2}{a^2}\right)\dfrac{dV_\Theta}{d\Theta} + \left(2 - \dfrac{V_\Theta^2}{a^2}\right)V_r + V_\Theta \operatorname{ctg}\Theta = 0$

- В итоге получаем систему двух уравнений для расчета V_r и V_Θ:

$$\frac{dV_\Theta}{d\Theta} = -\left[\frac{V_\Theta \operatorname{ctg}\Theta + \left(2 - V_\Theta^2/a^2\right)V_r}{1 - V_\Theta^2/a^2}\right];$$

$$\frac{dV_r}{d\Theta} = V_\Theta.$$

- Граничные условия:
- 1) на поверхности конуса нормальная составляющая вектора скорости равна $V_\Theta\left(\Theta_к\right) = 0$ (из условия непротекания), тогда касательная составляющая скорости направлена по касательной к поверхности конуса и равна скорости на его поверхности:

$$V_r(\Theta_к) = V_к$$

- 2) на поверхности скачка уплотнения составляющие скорости V_r и V_Θ должны удовлетворять основным соотношениям для косого скачка уплотнения:
- а) касательная составляющая скорости при переходе через скачок уплотнения не изменяется:

$$V_r(\beta) = V_\tau = V_\infty \cos\beta \ ;$$

- б) нормальная составляющая V_Θ (она же V_{2n}) должна удовлетворять формуле Прандтля для косого скачка уплотнения:

$$-V_\Theta(\beta) \cdot V_\infty \sin\beta = a_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{k+1} V_\infty^2 \cos^2\beta$$

- Система дифференциальных уравнений при данных граничных условиях решается методом численного интегрирования – *методом конечных разностей*. Интегрирование можно начать как с поверхности конуса, задаваясь значением $V_\text{к}$ и $\Theta_\text{к}$, так и с поверхности скачка, задаваясь углом β и числом Маха M_∞ (скоростью V_∞).

Численное интегрирование системы

- Систему дифференциальных уравнений приводят к безразмерному виду и представляют в виде уравнений в конечных разностях

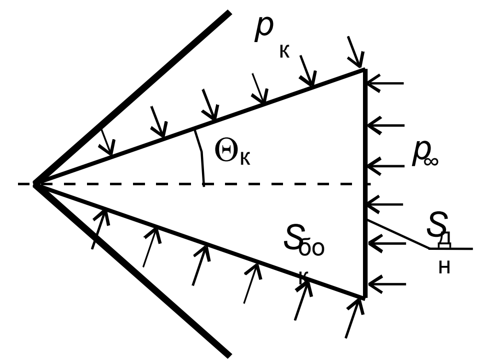
$$\left.\begin{aligned} &\tilde{V}_{\Theta}\left(\Theta_{n+1}\right)=\tilde{V}_{\Theta}\left(\Theta_{n}\right)-\left[\frac{\tilde{V}_{\Theta}\operatorname{ctg}\Theta+\left(2+\tilde{V}_{\Theta}^{2}/\tilde{a}^{2}\right)\tilde{V}_{r}}{1-\tilde{V}_{\Theta}^{2}/\tilde{a}^{2}}\right]_{\Theta=\Theta_{n}}\cdot\Delta\Theta, \\ &\tilde{V}_{r}\left(\Theta_{n+1}\right)=\tilde{V}_{r}\left(\Theta_{n}\right)+\tilde{V}_{\Theta}\left(\Theta_{n}\right)\Delta\Theta. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{A})$$

- Зададимся углом полураствора конуса $\Theta_{к}$ и скоростью $\tilde{V}_{к}$ на его поверхности. Зададимся приращением $\Delta\Theta$, т.е. шагом интегрирования. На нулевом шаге ($n=0, \Theta_0=\Theta_{к}$) имеем следующее: $\tilde{V}_{\Theta}=0$ и $\tilde{V}_r=\tilde{V}_{к}$.
- Первый шаг: $\Theta_1=\Theta_{к}+\Delta\Theta$. Из первого уравнения системы (А) получаем $\tilde{V}_{\Theta}\left(\Theta_1\right)=-2\tilde{V}_{к}\Delta\Theta$. Из второго уравнения найдем $\tilde{V}_r\left(\Theta_1\right)$ на промежуточном конусе с углом Θ_1 и т.д.

- Интегрирование проводим до тех пор, пока не будет выполняться условие (б) на поверхности скачка, также приведенное к безразмерному виду.
- Рассчитываем число M_{∞}, соответствующее заданной скорости на поверхности конуса, затем - параметры p_2, ρ_2, T_2 за скачком уплотнения и параметры поля течения между скачком и конусом, используя формулы изоэнтропического течения.

22.3. Волновое сопротивление изолированного конуса

- Сила лобового сопротивления, действующая на конус, равна $X = p_{\text{к}} \sin \Theta_{\text{к}} S_{\text{бок}} - p_{\infty} S_{\text{дн}} = \left(p_{\text{к}} - p_{\infty} \right) S_{\text{дн}}$,
- так как $S_{\text{бок}} \cdot \sin \Theta_{\text{к}} = S_{\text{дн}}$.
- Поскольку повышенное давление на поверхности конуса создается за счет потерь части механической энергии сверхзвукового потока в скачке уплотнения, то возникающее за счет этого сопротивление называют *волновым*. Тогда коэффициент сопротивления, он же коэффициент волнового сопротивления, равен



К расчету волнового сопротивления конуса

$$c_{x\text{в}} = \frac{X}{S_{\text{дн}} q_{\infty}} = \frac{\left(p_{\text{к}} - p_{\infty} \right) S_{\text{дн}}}{S_{\text{дн}} \frac{k}{2} p_{\infty} \text{M}_{\infty}^{2}} = \overline{p}_{\text{к}}$$

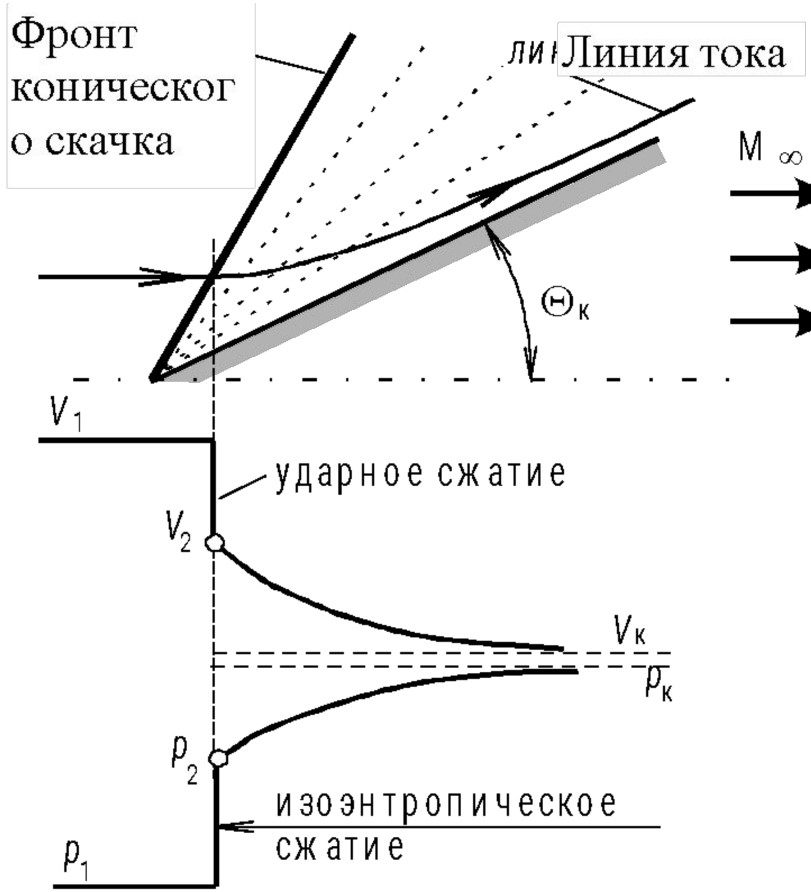
- То есть, коэффициент волнового сопротивления изолированного конуса численно равен коэффициенту давления на его поверхности $\bar{p}_к$.
- Коэффициент давления на поверхности конуса рассчитывается по общему выражению для коэффициента давления:

$$\bar{p}_к = \frac{2}{k}\frac{1}{M_\infty^2}\left(\frac{p_к}{p_\infty} - 1\right)$$

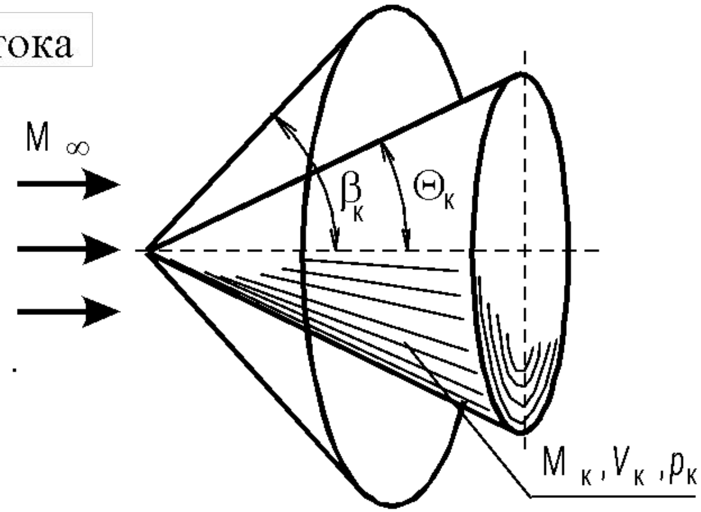
- Скорость потока на поверхности конуса меньше, чем за скачком уплотнения, а угол поворота потока при переходе через конический скачок уплотнения меньше угла конуса (< $\Theta_к$). Угол наклона вектора скорости при перемещении от скачка к конусу увеличивается до $\Theta_к$. Поэтому линии тока в возмущенной области (в отличие от клина) являются криволинейными

22.4. Отличия обтекания конуса и клина сверхзвуковым потоком

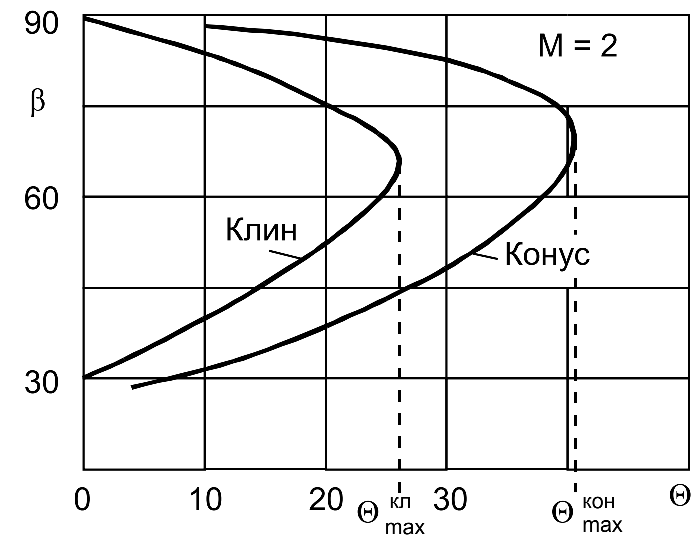
- Угол наклона конического скачка уплотнения меньше угла наклона плоского косого скачка уплотнения, а максимальный угол поворота потока, до которого скачок остается присоединенным к телу, для конуса больше, чем для клина.
- Скорость течения вдоль линий тока уменьшается, а давление возрастает. Следовательно, при обтекании конуса поток испытывает сначала ударное сжатие на скачке уплотнения, а затем изоэнтропическое сжатие в области между скачком и поверхностью конуса. Поэтому волновое сопротивление конуса при прочих равных условиях меньше, чем для идентичного клина.



Фронт
коническог
о скачка
ли
Линия тока
$\Theta_к$
V_1
ударное сжатие
V_2
$V_к$
$p_к$
p_2
изоэнтропическое
сжатие
p_1



M_∞
$\beta_к$
$\Theta_к$
$M_к, V_к, p_к$



90
β
60
30
M = 2
Клин
Конус
0
10
20
$\Theta^{кл}_{max}$
30
$\Theta^{кон}_{max}$
Θ

23.1. Несимметричное обтекание конуса

- При сверхзвуковом обтекании конуса под углом атаки поток около него будет обладать свойством коничес-кого течения с той особенностью, что параметры остаются постоянными не целиком на конической поверхности, а вдоль отдельных прямолинейных образующих конуса. Параметры газа в таком потоке изменяются при переходе от одной образующей, проходящей через вершину конуса, к другой.
- В сферической системе координат уравнение конуса, наклоненного к оси потока под углом атаки имеет вид:

$$\boxed{\Theta = \Theta_к - \alpha\ \cos\varphi - \frac{1}{2}\alpha^{\ 2}\,\mathrm{ctg}\,\Theta_к \sin^2\varphi}$$

Для подветренной образующей $\varphi = 0$, а для наветренной – $\varphi = \pi$.

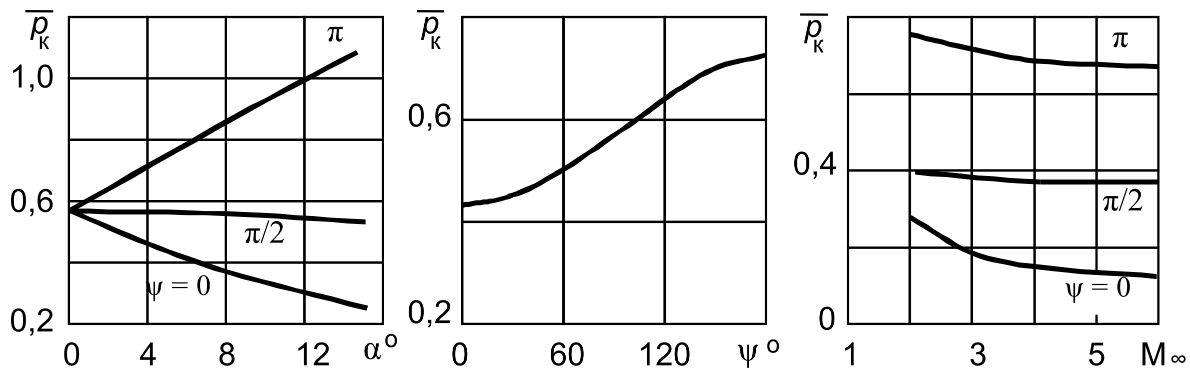
- Из свойств конического потока следует, что значения его параметров не зависят от *r*, а являются функциями переменных Θ и ϕ. Несимметричный конический сверхзвуковой поток в плоскости $\varphi = \mathrm{const}$ за скачком будет изоэнтропическим. Это объясняется тем, что фронт скачка в этой плоскости представляет собой прямую линию и энтропия за скачком будет постоянной, так как условия перехода газа через скачок одинаковы для каждой линии тока. Это же будет наблюдаться в любой другой плоскости. Но т.к. угол наклона скачка β неодинаков в каждой из этих плоскостей, неодинаковой будет и энтропия, являющаяся, таким образом, функцией угла ϕ. Следовательно, в целом несимметричный конический поток за скачком оказывается *неизоэнтропическим.*

- Теоретической основой для исследования такого потока являются уравнения движения идеальной среды и уравнение неразрывности в сферической системе координат. Решения системы дифференциальных уравнений находят в виде

$$\left.\begin{array}{l} V_r = V_r^0(\Theta) - \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} U(\Theta)\cos(nx) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

- Здесь параметры с верхним индексом «0» относятся к параметрам симметричного обтекания на конусе с углом Θ. При малых углах атаки значения параметров будут мало отличаться от соответствующих значений при симметричном обтекании, и его влияние достаточно учесть только линейными членами (n = 1).

- Простой логический анализ течения около конуса позволяет сделать вывод, что на его наветренной стороне ($\varphi = \pi$.) давление должно быть больше, чем на подветренной. Это наглядно иллюстрируют приведенные качественные зависимости.

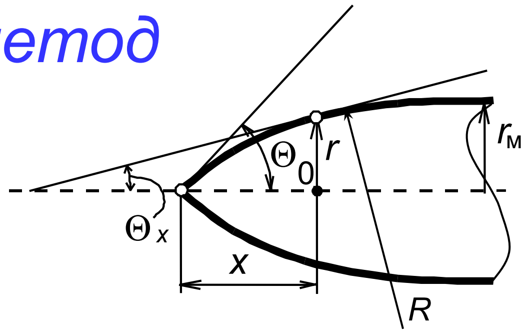


а *б* *в*

- С увеличением угла конуса давление возрастает на всей его поверхности. При малых углах атаки $\left(\alpha \le 5^o\right)$ коэффициент давления практически линейно зависит от α. С увеличением числа Маха набегающего потока коэффициент давления монотонно уменьшается во всех меридиональных плоскостях.

23.2. Приближенный метод расчета

- Для приближенного расчета давления и коэффициента волнового сопротивления заостренных тел вращения произвольной формы применяется *метод касательных (местных) конусов.*
- В случае аналитического задания формы тела определение угла местного конуса выполняется достаточно просто. Так для головной части оживальной формы

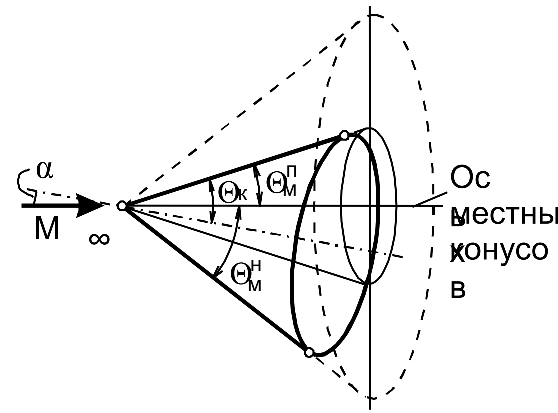


Построение касательного конуса для тела вращения

$$\cos\Theta = \frac{R - r_м + r}{R}$$

- Т.е. производят замену плавной образующей тела вращения на ломаную линию (исходное тело с криволинейной образующей заменяют составным коническим).

- Аналогично, для оценки параметров на поверхности конуса при $\alpha \neq 0$ можно воспользоваться результатами, полученными для $\alpha = 0$.
- При несимметричном обтекании конуса считаем, что каждая образующая конуса, отклоненного на угол α, принадлежит условному конусу с углом $\Theta_м$ (местный угол), симметрично обтекаемому потоком



Построение местных конусов для подветренной и наветренной образующих конуса

- Имея результаты теории симметричного обтекания, можно определить параметры на той образующей, которая принадлежит этому «местному» конусу. Таким образом, основным элементом расчета является угол «местного конуса»:

$$\boxed{\Theta_м = \Theta_к - \alpha \cdot \cos\psi - \frac{1}{2}\alpha^2 \cdot \mathrm{ctg}\Theta_к \cdot \sin^2\psi}$$