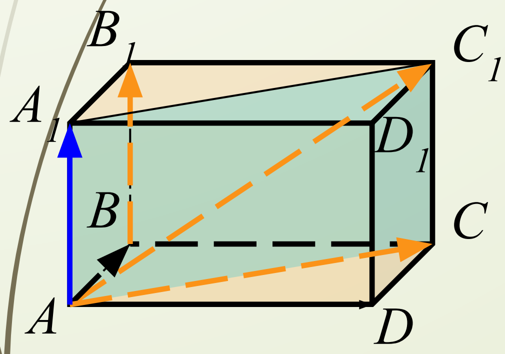
Компланарные векторы в пространстве

Определение компланарных векторов

Компланарные векторы *– векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

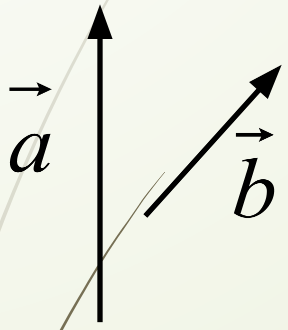
Пример:

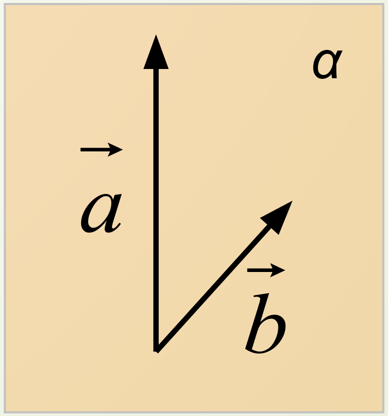


$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ – *компланарны, т.к.*
$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$, *а векторы* $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)

О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.





$\vec{a} \in \alpha$

$\vec{b} \in \alpha$

$\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ – *компланарны*

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

$\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ – *компланарны* *если* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a} = k\vec{b}$

Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ *можно разложить по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *т.е. представить в виде*

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{b}}$$

где x *и* y – *некоторые числа, то векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*

Доказательство

Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b};$

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}?$

Справка *Решение*

2) *Известно, что векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*

Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c};$

б) $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{c}, 2\vec{b}-3\vec{c}?$

Справка *Решение*

Решение

а) векторы $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ коллинеарны,
векторы $\vec{b}$ и $3\vec{b}$ коллинеарны,
значит векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ компланарны

б) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ компланарны,
векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ компланарны,
значит векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ компланарны

Решение

а) если векторы $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$ компланарны,

то существуют такие x и y, что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n, что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом,

значит векторы компланарны

Решение

б) если векторы $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+2\vec{c},\ 2\vec{b}-3\vec{c}$

компланарны, то существуют такие x и y, что

$$\vec{a}+\vec{b}=x(\vec{a}+2\vec{c})+y(2\vec{b}-3\vec{c})$$

$$\vec{a}+\vec{b}=x\vec{a}+2x\vec{c}+2y\vec{b}-3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1-x)+\vec{b}(1-2y)+\vec{c}(-2x+3y)=0$$

$$\begin{cases}1-x=0\\1-2y=0\\3y-2x=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

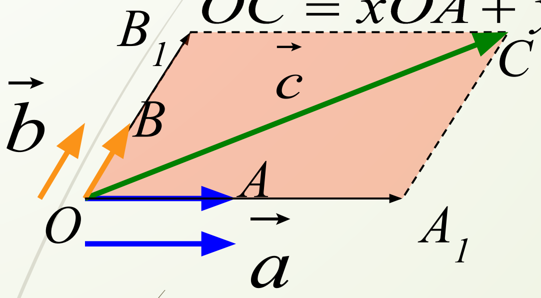
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{c}+\frac{1}{2}(2\vec{b}-3\vec{c})$$

искомые x и y существуют,

значит векторы компланарны

Доказательство признака компланарности

$$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$$



Дано:

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

x, y – некоторые числа

Доказать:

$\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *– компланарны*

Доказательство:

Пусть $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– не коллинеарны*

O – произвольная точка

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1} \in (OAB)$

$\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ *лежат в одной плоскости*

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *– компланарны ч.т.д*

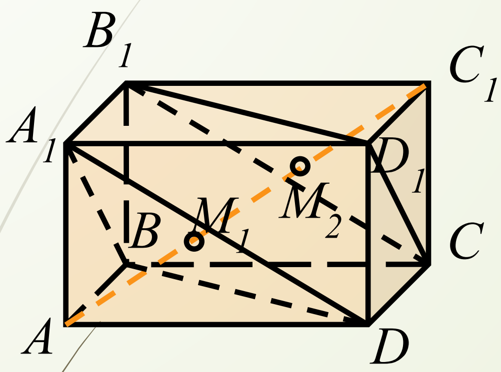
Свойство компланарных векторов

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде:*

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{b}}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Задача 1. Задача на доказательство



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1 - пар - д$

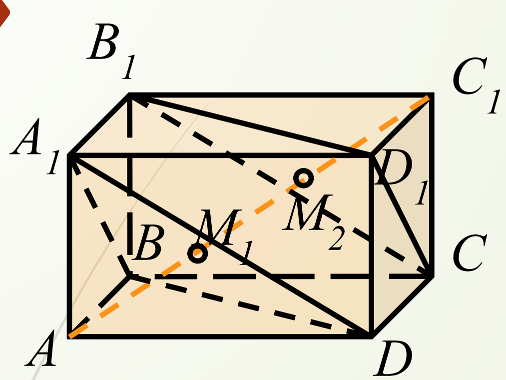
M_1, M_2 *– точки пересечения медиан* ΔA_1BD *и* ΔD_1CB_1 *соответственно*

Доказать:

$AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$

Решение

Решение



$Дано:$

$ABCDA_1B_1C_1D_1 - пар-д$

M_1, M_2 – точки пересечения медиан ΔA_1BD и ΔD_1CB_1 соответственно

$Доказать:$

$AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$

$Доказательство:$

Рассм. тетраэдр AA_1BD

M_1 – центроид ΔA_1M_1B

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ по правилу пар – да

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$M \in AC_1\ AM_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

аналогично $M_2 \in AC_1\ C_1M_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$

следовательно $AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$ ч.т.д.