## ❖ Раздел 1. Начала математического анализа

**1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ И СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ.**

- Понятие о пределе последовательности.
- Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
- Суммирование последовательностей.
- Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

**2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ.**

- ✔ Понятие о производной функции, ее геометрический и физический смысл.
- ✔ Производные основных элементарных функций.

**3. ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ.**

- ❑ Нахождение неопределенных интегралов при помощи свойств интегралов
- ❑ Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.

## ❖ Раздел 2. Комбинаторика, статистика и теория вероятностей

1. **ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.**

- Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.
- Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

**2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.**

- Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей.
- Понятие о независимости событий.
- Дискретная случайная величина, закон ее распределения.
- Числовые характеристики дискретной случайной величины.

# § 42. Предел переменной величины

**1. Понятие о числовой последовательности.** Рассмотрим функциональную зависимость $y = x^2$:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | ... |

Здесь значениями аргумента $x$ являются натуральные числа, а функцией является числовая последовательность $y$.

***Числовой последовательностью*** называется нумерованное множество чисел, расположенных в порядке возрастания номеров, т. е. являющееся функцией от натурального аргумента.

В общем виде числовая последовательность записывается следующим образом:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots .$$

Число $u_n$ называется ***общим числом последовательности***.

Зная формулу общего члена последовательности, можно найти любой ее член (например, в арифметической и геометрической прогрессиях).

**2. Характер изменения переменной величины.** В математике и ее приложениях постоянно используются переменные величины.

Переменная величина может быть возрастающей, убывающей или переходить от возрастания к убыванию или наоборот.

Переменные, которые в процессе изменения или только возрастают, или только убывают, называются ***монотонными***.

По характеру изменения переменные величины подразделяются на ограниченные и неограниченные.

Переменная величина $y$ называется ***ограниченной***, если начиная с некоторого ее значения выполняется неравенство $|y| < M$, где $M$ — постоянное положительное число.

Например, значения функции $\sin x$ являются ограниченными величинами, так как $|\sin x| \leq 1$. На отрезке $[-\pi/4; \pi/4]$ значения функции $\operatorname{tg} x$ являются ограниченными величинами.

Некоторые переменные являются неограниченными величинами, например, значения функции тангенса при изменении аргумента от 0 до $\pi/2$ неограниченно возрастают. Каким бы большим ни было положительное число $N$, значение $\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi/2$ превзойдет по своей величине это число $N$.

**3. Бесконечно малая величина.** Среди различных переменных величин особое место занимают бесконечно малые величины.

---

Переменная величина $a$ называется ***бесконечно малой***, если она при своем изменении становится и затем остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$:

$$|a| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

---

Например, дробь $1/x$ при неограниченном возрастании абсолютной величины $x$ является бесконечно малой величиной. Как бы мало ни было данное положительное число $\varepsilon$, при неограниченном возрастании $x$ величина $1/x$ станет и останется меньше $\varepsilon$, т. е. $|1/x| < \varepsilon$.

Легко показать, что функция $y = \sin x$ при $x \to 0$ есть величина бесконечно малая, т. е. $\sin x \to 0$.

Не следует смешивать бесконечно малую величину с ничтожно малой, так как бесконечно малая является величиной переменной, а ничтожно малая остается постоянной.

Иначе говоря, никакая постоянная величина не может быть бесконечно малой, так как она по абсолютной величине не может стать меньше любого, сколь угодно малого наперед заданного положительного числа. Исключение из всех постоянных величин составляет нуль, ибо нуль всегда меньше любого сколько угодно малого положительного числа. Поэтому нуль считается бесконечно малой величиной.

Примерами бесконечно малых величин могут служить значения функций: $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 1$ при $x \to 1$, $y = 2^x$ при $x \to -\infty$.

## 4. Бесконечно большая величина.

Переменная величина $y$ называется ***бесконечно большой***, если, каким бы большим ни было наперед заданное положительное число $N$, абсолютная величина $y$ становится и при дальнейшем изменении остается больше этого числа $N$: $|y| > N$.

Термин «бесконечно большая величина» определяет характер изменения переменной величины, поэтому бесконечность не является числом. Каким бы большим ни было постоянное число, оно является конечным.

Например, функция $y = \operatorname{ctg} x$ при $x \to 0$ неограниченно возрастает, т. е. $\operatorname{ctg} x \to +\infty$. Как бы велико ни было наперед заданное положительное число $N$, найдется такое значение аргумента $x$, близкое к нулю, для которого $\operatorname{ctg} x$ станет и в дальнейшем будет оставаться больше этого числа. Следовательно, $\operatorname{ctg} x$ является величиной бесконечно большой при $x \to 0$.

**5. Связь бесконечно малой величины с бесконечно большой.** Между бесконечно малой и бесконечно большой величинами существует следующая.

I. Если $x$ — величина бесконечно большая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой.

II. Если $x$ — величина бесконечно малая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ является величиной бесконечно большой.

Например, если $y$ — бесконечно большая величина, принимающая значения 1, 10, 100, 1000, ..., $y \to +\infty$, то $1/y$ получает соответственно значения 1, (0,1), (0,01), (0,001), ..., $(1/y) \to 0$, т. е. оказывается бесконечно малой величиной.

Наоборот, если $\alpha$ — бесконечно малая величина, принимающая значения 1, (0,1), (0,001), (0,0001), ..., $\alpha \to 0$, то $1/\alpha$ получает соответственно значения 1, 10, 100, 1000, ..., $(1/\alpha) \to +\infty$, т. е. оказывается бесконечно большой величиной.

## 6. Понятие о пределе переменной.

Пусть переменная $x$ в процессе изменения неограниченно приближается к числу 2 и при этом принимает значения: $x = 2{,}1; 2{,}01; 2{,}001; 2{,}0001, \ldots$; или $x = 1{,}9; 1{,}99; 1{,}999; 1{,}9999, \ldots$ .

В каждом из этих случаев абсолютная величина разности $|x-2| \to 0$, причем в первом случае значения переменных в процессе изменения остаются бóльшими 2, а во втором случае — меньшими 2.

Для приведенных значений переменной $x$ абсолютная величина разности $|x-2|$ принимает значения 0,1; 0,01; 0,001; ..., т. е. модуль $|x-2|$ есть величина бесконечно малая. В этом случае число 2 называется пределом переменной.

---

Постоянная $a$ называется ***пределом*** переменной $x$, если разность $x - a = \alpha$ есть величина бесконечно малая.

---

Для обозначения предела используется символ lim[1].

В частности, для предыдущего примера можно использовать запись $\lim x = 2$.

Говорят также, что переменная x стремится к пределу $a$, если разность $x - a = \alpha$ есть величина бесконечно малая.

Из равенства $x - a = \alpha$ следует, что $x = a + \alpha$. Таким образом, можно сформулировать утверждение.

Переменная величина $x$, имеющая своим пределом число $a$, может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: постоянной $a$ (предела $a$) и бесконечно малой $\alpha$.

Справедливо и обратное утверждение.

Если переменная величина $x$ является суммой числа $a$ и бесконечно малой $\alpha$, то $a$ есть предел переменной $x$.

Из определения предела вытекает следующее.

I. Предел бесконечно малой равен нулю.

Если $\lim a = 0$, то разность $a - 0 = a$ есть величина бесконечно малая.

II. Если $\lim a = 0$. то $a$ есть величина бесконечно малая.

Из равенства $\lim a = 0$ следует, что разность $a - 0$ есть величина бесконечно малая, но $a - 0 = a$; значит, $a$ есть величина бесконечно малая. Другими словами, переменная, имеющая своим пределом нуль, является величиной бесконечно малой.

III. Постоянную можно рассматривать как переменную, принимающую одно и то же числовое значение, а постоянную, равную нулю, — как бесконечно малую.

Покажем, что предел постоянной $c$ равен самой постоянной $c$, т. е. $\lim c = c$. Пусть переменная $x$ принимает одно и то же постоянное значение $c$, тогда $x - c = c - x = 0$, т. е. разность $x - c = 0$ есть величина бесконечно малая. Отсюда следует, что $\lim x = c$, т. е. $\lim c = c$.

Исходя из определения бесконечно малой величины, понятие предела можно сформулировать в следующей форме.

---

Число $a$ называется ***пределом*** переменной величины $x$, если разность $|x - a|$ в процессе изменения $x$ становится и при дальнейшем изменении $x$ остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon$, как бы мало это число ни было: $|x - a| < \varepsilon$.

12

## Пример 4.1

Пусть переменная $y = \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ в процессе изменения аргумента $x$ принимает соответствующие числовые значения. Определить $\lim y$ при $x \to 1$.

*Решение*

Составим таблицу значений аргумента $x$ и функции $y$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1,1 | 1,01 | 1,001 | 1,0001 | ... |
| $y$ | 5,1 | 5,01 | 5,001 | 5,0001 | ... |

*Можно* заметить, что $y \to 5$ при $x \to 1$, но для того, чтобы доказать, что $\lim y = 5$, необходимо показать, что $(y-5) \to 0$, т. е. что разность $(y-5)$ является бесконечно малой величиной.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2+3x-4}{x-1} - 5 = \frac{x^2+3x-4-5x+5}{x-1} = \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1.$$

Сокращение на $(x-1)$ корректно, так как при $x \to 1$ величина $x$ не может принимать значения $x = 1$ и, таким образом, знаменатель не может оказаться равным нулю.

Разность $(x-1) \to 0$ при $x \to 1$, т. е. является величиной бесконечно малой. Поэтому по определению число 5 является пределом переменной $y$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = 5.$$

**7. Основные свойства бесконечно малых.** Рассмотрим свойства бесконечно малых величин.

---

I. Бесконечно малая величина при перемене ее знака на противоположный остается бесконечно малой.

---

В определении бесконечно малой величины (4.1) фигурирует абсолютная величина переменной, поэтому равенство (4.1) справедливо при изменении ее знака.

---

II. Если $\alpha$ и $\beta$ — бесконечно малые, то их сумма и разность тоже величины бесконечно малые.

---

Процесс изменения $\alpha$ и $\beta$ при их приближении к нулю может быть различным, но по определению для сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ величины $\alpha$ и $\beta$ станут и будут оставаться меньше $\varepsilon/2$, т. е. $|\alpha| < \varepsilon/2$, $|\beta| < \varepsilon/2$, следовательно,

$$|\alpha| + |\beta| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Известно, что абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых, т. е. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, поэтому из формулы (4.2) следует, что $|\alpha + \beta| < \varepsilon$. Таким образом, сумма $\alpha + \beta$ есть величина бесконечно малая.

Бесконечно малая $\beta$ при перемене ее знака остается бесконечно малой; из предыдущего заключения следует, что разность $\alpha - \beta$ есть тоже бесконечно малая величина.

---

III. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых слагаемых есть величина бесконечно малая.

---

Это утверждение может быть доказано методом математической индукции с использованием предыдущего свойства.

---

IV. Произведение ограниченной величины $x$ и бесконечно малой $\alpha$ есть бесконечно малая величина.

---

В процессе изменения величин $x$ и $\alpha$ начиная с некоторого момента будут сохраняться неравенства: $|x| < m, |\alpha| < \frac{\varepsilon}{m}$, где $m$ — положительное число, а $\varepsilon$ — некоторое наперед заданное сколь угодно малое положительное число. Перемножив левые и правые части неравенств, получим $|x| \cdot |\alpha| < \varepsilon$.

Известно, что абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин: $|x| \cdot |\alpha| = |x \cdot \alpha|$, поэтому $|x \cdot \alpha| < \varepsilon$, т. е. произведение $x \cdot \alpha$ является бесконечно малой величиной.

V. Произведение постоянной на бесконечно малую есть величина бесконечно малая. Произведение нескольких бесконечно малых есть величина бесконечно малая. Целая положительная степень бесконечно малой есть величина бесконечно малая.

Эти утверждения справедливы, так как любое число и любая бесконечно малая величина являются ограниченными.

VI. Частное от деления двух бесконечно малых может быть величиной постоянной, или бесконечно малой, или бесконечно большой.

**8. Теоремы о пределах.**

**Теорема 4.1.** *Переменная величина не может иметь двух различных пределов.*

*Доказательство.* Допустим, что переменная $x$ имеет два различных предела $A$ и $B$, тогда по определению предела получим $x - A = \alpha$, $x - B = \beta$, где $\alpha$ и $\beta$ — бесконечно малые.

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$x - A - x + B = \alpha - \beta, \text{ или } \alpha - \beta = B - A.$$

Левая часть этого равенства содержит разность двух бесконечно малых, т. е. величину бесконечно малую; правая часть является величиной постоянной. Бесконечно малая может равняться постоянной только в том случае, если постоянная равна нулю, следовательно, $B - A = 0$, $A = B$, т. е. переменная имеет только один предел.

***Следствие.*** Если две переменные величины, имеющие пределы, при всех своих изменениях равны между собой, то равны и их пределы.

**Теорема 4.2.** *Предел суммы конечного числа переменных, имеющих пределы, равен сумме пределов этих переменных.*

*Доказательство.* Пусть переменные $x$ и $y$ имеют пределами числа $A$ и $B$, т. е.

$$\lim x = A, \lim y = B. \tag{4.3}$$

По определению предела имеем: $x - A = \alpha$, $y - B = \beta$, где $\alpha$ и $\beta$ — бесконечно малые. Сложив эти равенства, приходим к соотношению $(x + y) - (A + B) = \alpha + \beta$.

По определению предела имеем $\lim(x + y) = A + B$. Учитывая формулу (4.3), получаем $\lim(x + y) = \lim x + \lim y$.

**Теорема 4.3.** *Предел разности переменных, имеющих пределы, равен разности пределов этих переменных.*

*Доказательство.* Принимая во внимание, что разность можно рассматривать как алгебраическую сумму, теорема 4.2 может быть распространена на разность переменных.

**Теорема 4.4.** *Предел произведения конечного числа переменных, имеющих пределы, равен произведению пределов.*

*Доказательство.* Пусть переменные $x$ и $y$ имеют своими пределами величины $A$ и $B$, тогда по определению предела имеем

$$x = A + \alpha, y = B + \beta,$$

где $\alpha$ и $\beta$ — бесконечно малые. Перемножив эти равенства, получим

$$xy = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta, \text{ или } xy - AB = A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

Левая часть представляет собой разность между произведением переменных $xy$ и постоянной $AB$, а правая часть — сумму бесконечно малых, которая с учетом свойства III является также бесконечно малой величиной. Поэтому разность $(xy - AB)$ — величина бесконечно малая, следовательно, по определению предела $\lim(xy) = AB$, или $\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y$.

Эта теорема может быть доказана для любого конечного числа переменных сомножителей.

*Следствие 1.* Предел произведения постоянной величины на переменную, имеющую предел, равен произведению постоянной на предел переменной, т. е. если $a$ — постоянная, а $x$ — переменная, то

$$\lim(ax) = a\lim x. \qquad (4.4)$$

По теореме 4.4 $\lim(ax) = \lim a \cdot \lim x$, но $\lim a = a$, из чего и следует формула (4.4).

*Следствие 2.* Предел степени переменной, имеющей предел, равен той же степени предела переменной, т. е.

$$\lim x^m = (\lim x)^m. \qquad (4.5)$$

Число $x^m$ является произведением $m$ одинаковых сомножителей $x$, $x^m = \overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m}$, тогда

$$\lim x^m = \lim(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = \lim x \cdot \lim x \cdot \ldots \cdot \lim x = (\lim x)^m.$$

*Следствие 3.* Предел корня из переменной, имеющей предел, равен корню той же степени из предела переменной, т. е.

$$\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}. \qquad (4.6)$$

Представив $\sqrt[m]{x}$ в виде степени $x^{1/m}$, получим

$$\lim \sqrt[m]{x} = \lim x^{1/m} = (\lim x)^{1/m} = \sqrt[m]{\lim x}.$$

**Теорема 4.5.** *Предел частного от деления двух переменных, имеющих пределы, равен частному от деления пределов делимого и делителя при условии, что предел делителя не равен нулю, т. е.*

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \ \lim y \neq 0. \tag{4.7}$$

*Доказательство.* Пусть $\lim x = A$, $\lim y = B$, $B \neq 0$.

Опустим доказательство существования предела $\frac{x}{y}$ ввиду сложности изложения, поэтому докажем только, что этот предел равен частному от деления $\lim x$ на $\lim y$.

Положим $\frac{x}{y} = z$, тогда $x = yz$. Полагая, что $x$, $y$ и $z$ имеют пределы, применим теорему 4.4 о пределе произведения: $\lim x = \lim y \cdot \lim z$, или $A = B \lim z$, из чего следует, что $\lim z = \frac{A}{B}$. С учетом введенных обозначений получим формулу (4.7).

## Вопросы для повторения

1. Какая последовательность называется числовой последовательностью?
2. Каким может быть характер изменения переменной величины?
3. Какому условию должна удовлетворять ограниченная переменная величина? Приведите примеры ограниченных переменных величин.
4. Дайте определение бесконечно малой переменной. Приведите примеры бесконечно малых величин.
5. Какую переменную называют бесконечно большой?
6. Какая связь существует между бесконечно малой и бесконечно большой величинами?
7. Сформулируйте определение предела переменной величины.
8. Перечислите основные свойства бесконечно малых.
9. Перечислите теоремы о пределах переменных и следствия из них.

## § 43. Предел функции

**1. Вычисление предела функции.** Пусть функция $y = f(x)$ имеет своим пределом число $A$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, причем $f(x)$ изменяется в зависимости от изменения переменной $x$. Необходимо учитывать, что при неограниченном стремлении переменной $x$ к числу $a$ $(x \to a)$ само число $a$ исключается из значений, принимаемых переменной $x$. Дадим определение предела функции в точке.

---

Число $A$ называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое что для всех $x$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

---

При вычислении пределов функции используются теоремы, которые сформулируем без доказательств.

**Теорема 4.6.** *Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$, то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:*

$$\lim_{x \to a}(f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x).$$

**Теорема 4.7.** *Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:*

$$\lim_{x \to a}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x)\cdot \lim_{x \to a}\varphi(x).$$

**Теорема 4.8.** *Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$ и предел функции $\varphi(x)$ отличен от нуля, то существует также предел отношения $f(x)/\varphi(x)$, равный отношению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:*

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a}\varphi(x)}.$$

***Следствие 1.*** Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \to a}(kf(x)) = k\lim_{x \to a} f(x).$$

*Следствие 2.* Если $n$ — натуральное число, то справедливы соотношения

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n, \quad \lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

*Следствие 3.* Предел многочлена (целой рациональной функции) $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ при $x \to a$ равен значению этого многочлена при $x = a$, т. е.

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a).$$

4. Предел дробно-рациональной функции

$$F(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

при $x \to c$ равен значению этой функции при $x = c$, если $c$ принадлежит области определения функции, т. е. $\lim\limits_{x\to c} F(x)=F(c)$.

Рассмотрим некоторые нестандартные ситуации, возникающие при вычислении пределов функций.

I. Функция представляет собой дробь, предел знаменателя которой равен нулю. Например, для $f_1=\dfrac{5}{4x-8}$ определим $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}$. Теорему 4.8 о пределе частного применять нельзя, так как $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8)=0$. Таким образом, знаменатель есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\dfrac{1}{4x-8}$ есть величина бесконечно большая, поэтому $\lim\limits_{x\to 2} f_1=\infty$.

II. Функция представляет собой дробь, пределы числителя и знаменателя которой равны нулю. Например, для $f_2 = \dfrac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$ определим $\lim\limits_{x \to 0} f_2$. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить $\lim\limits_{x \to 0} f_2$ нельзя, так как при $x \to 0$ это вычисление сведется к определению отношения двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, значение которого стремится к нулю при $x \to 0$, и таким образом сделать возможным применение теоремы 4.8. При этом не производится сокращения на нуль: по определению предела функции аргумент $x$ стремится к своему предельному значению, никогда не достигая этого значения. Имеем

$$\lim_{x \to 0} f_2 = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x - 2)}{x(2x - 5)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x - 2}{2x - 5} = \frac{3 \cdot 0 - 2}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{2}{5}.$$

Подобный случай будет иметь место и при определении $\lim\limits_{x\to 0} f_3$ для $f_3 = \dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$. Здесь необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})$ и затем, сократив дробь на $x$, вычислить:

$$\lim_{x\to 0} f_3 = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}.$$

## Пример 4.2

Определить $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.

*Решение*

При вычислении такого предела нельзя применить теорему 4.8 о пределе частного, так как при $\alpha \to 0$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к нулю.

Обратимся к рис. 3.9, на котором изображен единичный тригонометрический круг с дугой $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2)$. Очевидно, что $M_1M < \overset{\frown}{AM} < AN$, или $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так как $\sin\alpha > 0$, то, разделив это неравенство на $\sin\alpha$, получим

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha},$$

или

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\cancel{1}}{\cos\alpha}. \quad \cos\alpha \qquad (*)$$

При $\alpha \to 0$ функция $\cos\alpha \to 1$ и неравенство (*) принимает вид

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

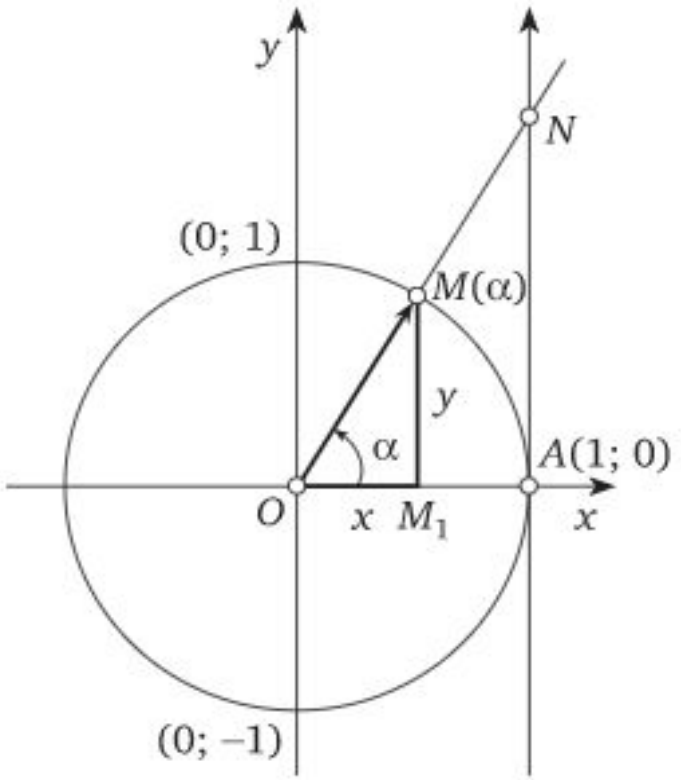



Рис. 3.9

*Эквивалентными* называются бесконечно малые, предел отношения которых равен единице.

В последнем примере $\sin\alpha$ и $\alpha$ — эквивалентные бесконечно малые при $\alpha \to 0$. Величины $\operatorname{tg}\alpha$ и $\alpha$ при $\alpha \to 0$ также оказываются эквивалентными бесконечно малыми:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha/\cos\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}=1\cdot 1=1.$$



Отметим без доказательства, что отношение двух бесконечно малых величин можно заменить отношением эквивалентных величин, например:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

***Пример 18.6.*** Покажем, что $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ (\frac{x}{2}\to 0)}} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1\cdot 1 = 1.$ ●

***Пример 18.7.*** Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение: Обозначим $\arcsin x = t$. Тогда $x = \sin t$ и $t \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$. ●

***Пример 18.8.*** Покажем, что $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$.

Решение: Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}\cdot(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1,$$

то $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$. ●

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;
6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
8. $\ln(1 + x) \sim x$ $(x \to 0)$;
9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
10. $(1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ $(x \to 0)$;

    в частности, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$.

***Пример 17.6.*** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$.

○ Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$ ●

***Пример 17.7.*** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

○ Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = 1\cdot\dfrac{1}{1} = 1.$ ●

***Пример 18.9.*** Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

○ Решение: Так как $\operatorname{tg} 2x \sim 2x, \sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

***Пример 18.10.*** Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$.

○ Решение: Обозначим $\dfrac{1}{x} = t$, из $x \to \infty$ следует $t \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

***Пример 18.11.*** Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}$.

○ Решение: Так как $\arcsin(x-1) \sim (x-1)$ при $x \to 1$, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3}.$$

**Example 1.**

Find the limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 3x}.$$

*Solution.*

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 4x}{3\sin 3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{4}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}.$$

Since $3x\to 0$ as $x\to 0$, we can write:

$$L=\frac{4}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{4}{3\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{4}{3\cdot 1}=\frac{4}{3}.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (3.88)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]. \qquad (3.89)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (3.90)$$

**1. Сумма синусов.** По формуле (3.88) имеем

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B.$$

Пусть $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$. Решив систему

$$\begin{cases} A+B=\alpha, \\ A-B=\beta \end{cases}$$

относительно аргументов $A$ и $B$, получим $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Тогда

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (3.93)$$

**2. Разность синусов.** Заменим в формуле (3.93) аргумент $\beta$ на аргумент $(-\beta)$:

$$\sin\alpha+\sin(-\beta)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

или

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (3.94)$$

**3. Сумма косинусов.** Заменим в выражении $\cos\alpha + \cos\beta$ косинус каждого аргумента синусом дополнительного аргумента и воспользуемся соотношением (3.93). Тогда

$$\cos\alpha+\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=$$

$$=2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2}=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Таким образом,

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (3.95)$$

**4. Разность косинусов.** Аналогично с помощью формулы (3.94) выводится выражение для разности косинусов:

$$\cos\alpha-\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=$$

$$=2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

т. е.

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (3.96)$$

**Example 2.**

Calculate the limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}.$$

*Solution.*

We factor the numerator:

$$\cos 3x-\cos x=-2\sin\frac{3x-x}{2}\sin\frac{3x+x}{2}=-2\sin x\sin 2x.$$

This yields

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-2\sin x\sin 2x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=-2\cdot 1\cdot\lim_{2x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=-2\cdot 2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=-4.$$

**Example 3.**

Find the limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}.$$

*Solution.*

We use the following trigonometric identity:

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Then we obtain

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x-3x}{2}\cos\frac{5x+3x}{2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos 4x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(2\cos 4x\right).$$

As $\cos 4x$ is a continuous function at $x=0$, then

$$\lim_{x\to 0}\left(2\cos 4x\right)=2\lim_{x\to 0}\cos 4x=2\cdot\cos\left(4\cdot 0\right)=2\cdot 1=2.$$

**Example 4.**

Calculate the limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+a)-\cos(x-a)}{x}.$$

*Solution.*

Using the trig identity

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

we convert the limit in the following way:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+a)-\cos(x-a)}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin a}{x}.$$

Here $\sin a$ is a constant that does not depend on $x$. Therefore,

$$L=-2\sin a\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{1}=-2\sin a.$$

**Example 5.**

Calculate the limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

*Solution.*

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{bx}{ax}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}.$$

Obviously, $ax\to 0$ and $bx\to 0$ as $x\to 0$. Then

$$L=\frac{a}{b}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b}.$$

**Example 6.**

Find the limit

$$\lim_{x\to b}\frac{\sin x-\sin b}{x-b}.$$

*Solution.*

Using the identity

$$\sin x-\sin b=2\sin\frac{x-b}{2}\cos\frac{x+b}{2},$$

convert the limit:

$$L=\lim_{x\to b}\frac{\sin x-\sin b}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{2\sin\frac{x-b}{2}\cos\frac{x+b}{2}}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{\sin\frac{x-b}{2}}{\frac{x-b}{2}}\cdot\lim_{x\to b}\cos\frac{x+b}{2}=\lim_{x\to b}\frac{\sin\frac{x-b}{2}}{\frac{x-b}{2}}\cdot\cos b.$$

Change the variable: $\frac{x-b}{2}=t$. When $x\to b$, then $2t\to 0$ or $t\to 0$. Hence,

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\cos b=1\cdot\cos b=\cos b.$$

**Example 7.**

Find the limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}.$$

*Solution.*

We apply the following transformations:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}\right].$$

As $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, we have

$$L=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos x}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}.$$

Here

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad\text{and}\quad\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

Hence,

$$L=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{4}{4}\right)=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Here $\frac{x}{2}\to 0$ as $x\to 0$. Therefore

$$L=\frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

**Example 8.**

Find the limit

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{\arcsin(1-2x)}.$$

*Solution.*

We make the substitution: $x-\frac{1}{2}=y$. When $x\to\frac{1}{2}$, then $y\to 0$. As a result, we have

$$L=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{\arcsin(1-2x)}=\lim_{y\to 0}\frac{1-4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\arcsin\left(1-2\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{1-4\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)}{\arcsin(1-2y-1)}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-4y^2-4y-1}{\arcsin(-2y)}=\lim_{y\to 0}\frac{-4y^2-4y}{\arcsin(-2y)}=\lim_{y\to 0}\frac{-4y^2-4y}{\frac{\arcsin(-2y)}{-2y}\cdot(-2y)}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{-4y^2-4y}{-2y}}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\arcsin(-2y)}{-2y}}=$$

$$\frac{\lim\limits_{y\to 0}(2y+2)}{\lim\limits_{-2y\to 0}\frac{\arcsin(-2y)}{(-2y)}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}(2y+2)}{1}=\lim_{y\to 0}(2y+2)=2.$$

**Example 9.**

Find the limit

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}.$$

*Solution.*

We use the trigonometric formula:

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Then the limit can be written in the form

$$L=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{x}=\sqrt{2}\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}}{x}=\sqrt{2}\lim_{x\to 0+0}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\sqrt{2}\lim_{x\to 0+0}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{4}{4}}=$$

$$\sqrt{2}\lim_{x\to 0+0}\left(\sqrt{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0+0}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left[\lim_{\frac{x}{2}\to 0+0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\right]^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

III. Функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин при стремлении аргумента к некоторому значению. Например, для функции $f_4 = \frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8}$ определим $\lim\limits_{x\to-2} f_4$. Здесь, выполнив действие вычитания, получим дробь, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю при $x \to -2$. Далее поступаем, как и в случае с функцией $f_2$: сократив дробь на $(x+2)$, находим

$$\lim_{x\to-2} f_4 = \lim_{x\to-2} \frac{x^2-2x-8}{x^3+8} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to-2} \frac{x-4}{x^2-2x+4} = \frac{-2-4}{(-2)^2-2(-2)+4} = -\frac{1}{2}.$$

IV. Некоторые слагаемые функции пределов не имеют. Например, определим $\lim\limits_{x\to\infty} f_5$ для функции $f_5 = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$.

Первые три слагаемых при $x \to \infty$ пределов не имеют, поэтому нет возможности непосредственно воспользоваться следствием 3. Вынося $x^3$ за скобки, получаем

$$\lim_{x\to\infty} f_5 = \lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$$

(при $x \to \infty$ величины $\frac{6}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ и $\frac{1}{x^3}$ — бесконечно малые и их пределы равны нулю).

V. Знаменатель функции является величиной бесконечно большой. Например, определим $\lim\limits_{x\to\infty} f_6$ для $f_6 = \dfrac{5}{4x+1}$. Так как знаменатель при $x \to \infty$ становится величиной бесконечно большой, то обратная ему функция $\dfrac{1}{4x+1}$ становится при $x \to \infty$ бесконечно малой. Произведение бесконечно малой на ограниченную величину $(\dfrac{1}{4x+1} \cdot 5)$ есть величина бесконечно малая, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} f_6 = 0$.

VI. Функция представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой — величины бесконечно большие. Например, определим $\lim\limits_{x\to\infty} f_7$ для функции $f_7 = \dfrac{2x+3}{5x+1}$. При непосредственном применении теоремы 4.8 приходим к выражению $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поэтому для вычисления $\lim\limits_{x\to\infty} f_7$ необходимо числитель и знаменатель разделить на $x$:

$$\lim_{x\to\infty} f_7 = \lim_{x\to\infty} \frac{2+3/x}{5+1/x} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5}.$$

VII. Функция представляет собой разность бесконечно больших величин. Например, определим $\lim\limits_{x\to\infty} f_8$ для функции $f_8 = x - \sqrt{x^2 - 4x}$. Умножив и разделив функцию на выражение $x + \sqrt{x^2 - 4x}$, получим

$$\lim_{x\to\infty} f_8 = \lim_{x\to\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 4x})(x + \sqrt{x^2 - 4x})}{x + \sqrt{x^2 - 4x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x + \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 4/x}} = \frac{4}{2} = 2.$$

**2. Число *e*. Натуральные логарифмы.** Функция $z=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ имеет предел, выражающийся иррациональным числом; это число принято обозначать через $e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Приведем значения функции при увеличивающихся значениях аргумента $n$.

| $n$ | 5 | 10 | 100 | 1000 | 10 000 | 100 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | 2,4883 | 2,5937 | 2,7048 | 2,7169 | 2,7181 | 2,7182 |

Можно заметить, что при $n>10\ 000$ четыре первые знака значения функции остаются неизменными. Число 2,718 является приближенным значением числа $e$. Более точное его значение: $e=2{,}7182818285$.

Если обозначить $\alpha=\frac{1}{n}$, то можно записать:

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}.$$

Число $e$ принято за основание логарифмов, называемых ***натуральными***. Натуральный логарифм числа $N$, как уже было отмечено в § 17 (п. 5), принято обозначать $\ln N=\log_e N$.

**Пример 4.3**

Вычислить: 1) $L_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; 2) $L_2 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

*Решение*

1) $L_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)\cdot 3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)}\right]^3 = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)}\right]^3 = e^3.$

2) $L_2 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

***Пример 17.8.*** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e = e^2. \quad \bullet$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=e\cdot 1=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\cdot e\cdot e=e^{3}.$$

Calculate the limit

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x}.$$

*Solution.*

Substituting $\frac{6}{x}=\frac{1}{y}$, so that $x=6y$ and $y\to\infty$ as $x\to\infty$, we obtain

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{6y}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{6}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{6}=e^{6}.$$

Find the limit

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+3x}.$$

*Solution.*

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+3x} = \lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{3x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 3} = \lim_{3x\to 0} \left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3 = \left[\lim_{3x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3 = e^3.$$

Find the limit

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x.$$

*Solution.*

We first convert the base of the function:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x.$$

Introduce the new variable: $y=\frac{2a}{x-a}$. As $x\to\infty$, $y\to 0$ and, hence,

$$x-a=\frac{2a}{y},\quad x=a+\frac{2a}{y}.$$

Substituting this into the function gives

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{a+\frac{2a}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^a\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2a}{y}}=1\cdot e^{2a}=e^{2a}.$$

Calculate the limit

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}.$$

*Solution.*

First we transform the base:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x}.$$

Let $-\frac{1}{x+1}=y$. Then

$$x+1=-\frac{1}{y},\ \Rightarrow x=-\frac{1}{y}-1\ \text{ and }\ y\to 0\ \text{ as }\ x\to\infty.$$

Now we can find the limit:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}-1}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}}}{\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{+1}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}}{1}=\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Evaluate the limit

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x-1}.$$

*Solution.*

We can write this limit as follows:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+5}{x-2}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5(x-1)}{x-2}}.$$

Replace the variable:

$$\frac{5}{x-2}=y,\ \Rightarrow x-2=\frac{5}{y},\ \Rightarrow x=\frac{5}{y}+2.$$

Here $y\to 0$ as $x\to\infty$. Then the limit is

$$L=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5(x-1)}{x-2}}=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{y\left(\frac{5}{y}+2-1\right)}=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{5+y}=$$

$$\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{5}\cdot\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{y}=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{5}\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)=e^5\cdot 1=e^5.$$

Find the limit

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$$

*Solution.*

Let $x - a = t$. It is easy to see that $t \to 0$ as $x \to a$. Then

$$L = \lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t + a) - \ln a}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln \frac{t+a}{a}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{t}{a}\right).$$

Make one more change of variable:

$$\frac{t}{a} = z, \quad z \to 0 \ \text{ as } \ t \to 0.$$

Hence, the limit becomes

$$L = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{t}{a}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{az} \ln(1 + z) = \frac{1}{a} \lim_{z \to 0} \ln(1 + z)^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{a} \ln\left[\lim_{z \to 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}}\right] = \frac{1}{a} \ln e = \frac{1}{a}.$$

Calculate the limit

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

*Solution.*

The limit can be represented in the following form:

$$L=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}.$$

After taking logarithm, we have

$$\ln L=\ln\left(\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\ln\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\ln\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]\right).$$

We notice that $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Besides that, $\sin x\to 0$ as $x\to 0$, therefore, we can replace the transition $x\to 0$ in the second limit with the equivalent limit $\sin x\to 0$. This yields:

$$\ln L=1\cdot\lim_{\sin x\to 0}\left(\ln\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]\right)=\ln\lim_{\sin x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right].$$

As $\lim\limits_{\sin x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=e$, we get

$$\ln L=\ln e=1.$$

Thus, $L=e$.

## Вопросы для повторения

1. Перечислите теоремы и следствия из них, на которых основано вычисление предела функции.
2. Что представляет собой число *e*?

## § 44. Непрерывность функции

**1. Приращение аргумента и функции.** Для функции $y = f(x)$ разность двух значений аргумента $x_1$ и $x_2$, лежащих в области определения функции, называется ***приращением аргумента*** и обозначается символом $\Delta x$, т. е. $x_2 - x_1 = \Delta x$.

Разность двух значений функции $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ (из множества значений функции, которые она может принимать), соответствующих значениям аргумента $x_1$ и $x_2$, называется ***приращением функции*** и обозначается символом $\Delta y$, т. е. $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$.

Если $x_2 > x_1$, то $\Delta x > 0$; если же $x_2 < x_1$, то $\Delta x < 0$. Соответственно, и приращение функции $\Delta y > 0$, если $y_2 > y_1$, и $\Delta y < 0$, если $y_2 < y_1$.

Пусть аргумент $x$ получил приращение $\Delta x$, тогда новое значение аргумента есть $x + \Delta x$, а соответствующее ему значение функции есть $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Чтобы найти приращение функции, нужно из нового значения функции вычесть первоначальное:

$$\begin{array}{r} -\,y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ y = f(x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \end{array}$$

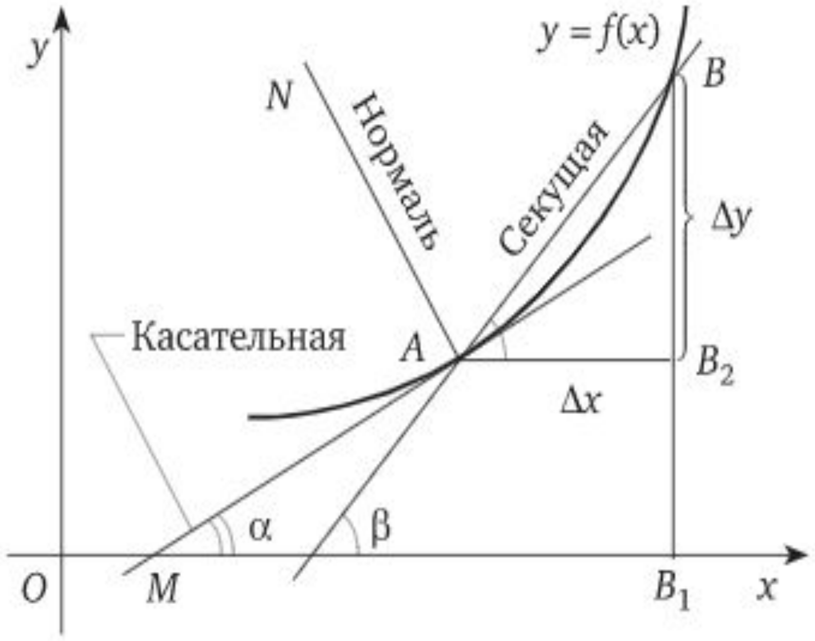



*Рис. 5.1*

## Пример 4.4

Найти приращение функции $y = x^2 + x + 1$, если аргумент $x$ изменил свое значение от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$.

*Решение*

Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 0{,}5$. Вычислим значения функции $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2)$:

$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7;$$

$$y_2 = f(x_2) = f(2{,}5) = 2{,}5^2 + 2{,}5 + 1 = 9{,}75.$$

Тогда $\Delta y = y_2 - y_1 = 9{,}75 - 7 = 2{,}755$.

**2. Непрерывность функции.** Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x=a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Можно дать другое определение непрерывности функции.

---

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x=a$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

---

Если условие непрерывности функции в некоторой точке нарушено, то такую точку называют ***точкой разрыва функции***.

Степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации называют ***элементарными функциями***. Для элементарных функций справедливы следующие утверждения.

I. Область непрерывности элементарной функции совпадает с ее областью определения, т. е. элементарная функция непрерывна во всей области определения.

II. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках.

III. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

Функция называется ***непрерывной в промежутке*** (замкнутом или открытом), если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

**Пример 4.5**

Исследовать на непрерывность функцию $y = 3x$.

*Решение*

Функция $y = 3x$ определена для всех действительных значений аргумента $x$, т. е. $x \in \mathbb{R}$. Область непрерывности функции совпадает с ее областью определения.

Найдем приращение функции $\Delta y$, если аргумент $x$ получает приращение $\Delta x$:

$$\begin{array}{r} -\ y + \Delta y = 3(x + \Delta x) = 3x + 3\Delta x \\ y = 3x \\ \hline \Delta y = 3\Delta x. \end{array}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (3\Delta x) = 3 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ справедливо при любом конечном значении $x$, поэтому функция $y = 3x$ непрерывна при любом значении $x$.

**Пример 4.6**

Исследовать на непрерывность функцию $y = x^2 - 2$ при $x = 3$.

*Решение*

Предел функции:

$$\lim_{x \to 3}(x^2 - 2) = (\lim_{x \to 3} x)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7.$$

Значение функции $f(3) = 3^2 - 2 = 7$, т. е. предел функции при $x \to 3$ равен значению функции при $x = 3$. Следовательно, функция $y = x^2 - 2$ в точке $x = 3$ непрерывна.

Однако не все функции и не при любых значениях аргумента непрерывны. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ при $x = 0$ имеет разрыв; функция $y = \dfrac{2x}{x-5}$ имеет разрыв при $x = 5$; функция $y = \dfrac{3}{x^2-4}$ имеет разрывы при $x = -2$ и $x = 2$; функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет разрывы при $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

## Вопросы для повторения

1. Что называется приращением аргумента и приращением функции?
2. Сформулируйте определения непрерывности функции.
3. Приведите примеры функций, имеющих разрывы.

### 5.4. Непрерывность функции. Типы разрывов

Понятие непрерывности функции часто ассоциируется с непрерывностью нити. На графиках рис. 5.4, *а*, *б* приведены функции, для которых понятия непрерывности и разрывности очевидны.

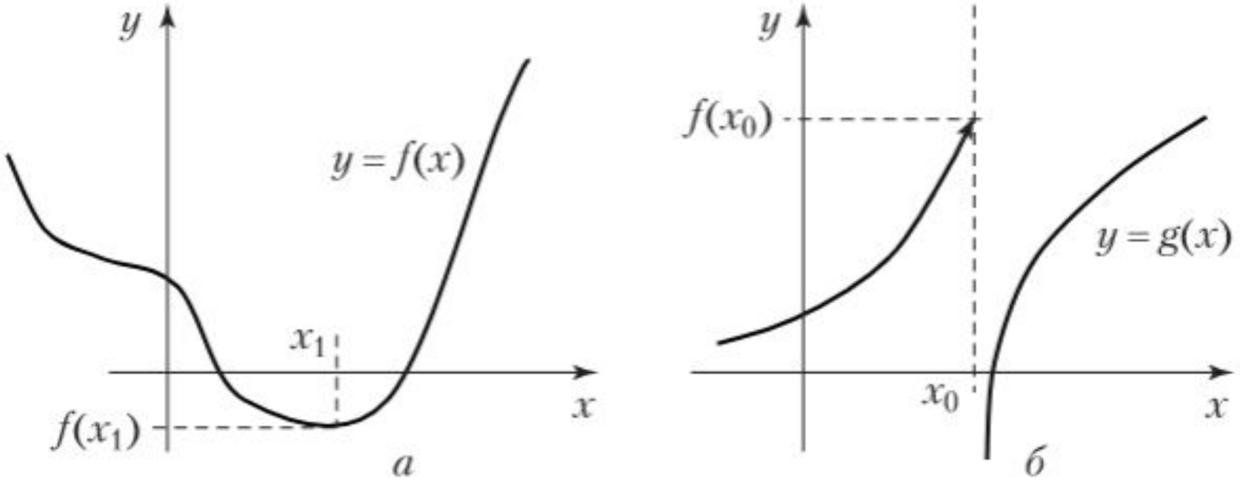



*Рис. 5.4*

На рис. 5.4, *а* приведен график непрерывной функции, а на рис. 5.4, *б* – график функции, которая в точке $x_0$ имеет разрыв, во всех других точках она непрерывна.

Наглядное представление необходимо дать в виде математического определения.

Для этого вначале рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x_1$ на рис. 5.4, *а*. Во-первых, функция определена в точке $x_1$, ее значение равно $f(x_1)$, во-вторых, если переменная $x \to x_1$ не имеет значения справа или слева, то функция $f(x) \to f(x_1)$. Напротив, на рис 5.4, *б* изображена функция, у которой при $x \to x_0 - 0$, т.е. слева, значения $f(x) \to f(x_0)$, но в самой точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ не определена. Если же $x \to x_0 + 0$, то функция $f(x) \to -\infty$. А теперь дадим строгое математическое определение.

**Определение 5.10.** Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = x_1$, если выполняется следующее равенство:

$$\lim_{x\to x_1} f(x) = f(x_1).$$

*Замечание.* Из рассмотренного выше и из определения непрерывности функции в точке очевидно следует, что приведенное условие содержит в себе четыре утверждения:

1) функция определена в точке $x_1$;
2) существует $\lim\limits_{x\to x_1-0} f(x) = A$;
3) существует $\lim\limits_{x\to x_1+0} f(x) = B$;
4) эти пределы равны между собой и равны значению функции в этой точке $A = B = f(x_1)$.

Записанное в определении равенство можно представить как

$$\lim_{x\to x_1} f(x) = f(\lim_{x\to x_1} x) = f(x_1),$$

т.е. если функция непрерывная в точке, то предел от функции равен функции от предела независимой переменной, таким образом, при вычислении предела функции можно перейти к вычислению предела под знаком непрерывной функции.

Если ввести обозначение $x_1 - x = \Delta x$, а $f(x_1) - f(x) = \Delta y$, тогда определение непрерывности функции в точке $x_1$ можно представить в следующем виде.

**Определение 5.11.** Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_1$, если она в ней определена и бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Если какое-либо из четырех утверждений, следующих из определения непрерывности функции, нарушается, то функция становится разрывной. Приведем принятую классификацию точек разрыва функции в точке. Говорят, что функция терпит:

**разрыв первого рода** (конечный разрыв) — если пункты 2) и 3) выполняются, а пункт 4) не выполняется;

**разрыв второго рода** (бесконечный разрыв) — если предел в пункте 2) или 3) равен бесконечности;

**устранимый разрыв** — если не выполняется пункт 1), а пункты 2), 3) и 4) выполняются.

**Пример 5.13.** Исследовать на непрерывность функции:

$$\text{а) } y = \frac{|x-1|(x^2+2)}{x-1}; \quad \text{б) } \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}^3+1}{\boldsymbol{x}+1}; \quad \text{в) } \boldsymbol{y} = \frac{3}{\boldsymbol{x}-2}.$$

*Решение*. а) Функция не определена в точке $x = 1$. Выясним, какого рода разрыв в этой точке. Для этого рассмотрим пределы функции при $x$, стремящемся к 1 слева и справа.

Имеем:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{|x-1|(x^2+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{-(x-1)(x^2+2)}{x-1} = -3$$

и

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{|x-1|(x^2+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = 3.$$

Левый и правый пределы существуют, но они не равны между собой, т.е. пункты 2) и 3) выполняются, а 4) нет, следовательно, функция терпит разрыв первого рода.

б) Функция не определена в точке $x=-1$. Для выяснения типа разрыва рассмотрим правый и левый пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1+0}(x^2-x+1)=3;$$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1-0}(x^2-x+1)=3.$$

Оба предела существуют и равны, но сама функция в точке $x=-1$ не определена, следовательно, функция в точке $x=-1$ имеет устранимый разрыв.

в) Функция не определена в точке $x=2$. Вычисляем правый и левый пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{3}{x-2}=\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 2-0}\frac{3}{x-2}=-\infty.$$

Указанные пределы бесконечные, поэтому данная функция в точке $x=2$ терпит разрыв второго рода.

**7.1.** Найдите точки разрыва, выясните тип разрыва и постройте графики для следующих функций:

(а) $y = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{при } x > 0, \\ x^2 & \text{при } x \leqslant 0; \end{cases}$ (б) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{при } x > 2, \\ 2x - 1 & \text{при } x < 2, \\ 0 & \text{при } x = 2; \end{cases}$

(в) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

**7.2.** Докажите, что функция $y = x^3$ непрерывна при всех значениях $x$.

**7.3.** Найдите все точки разрыва функции $y = \operatorname{ctg} x$. Выясните тип разрыва.

**7.5.** Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x \geqslant 2, \\ x^2 & \text{при } x < 2 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 2$. Постройте график функции.

**7.6.** Найдите точки разрыва, укажите тип разрыва и постройте графики функций:

(а) $y = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ (б) $y = [x]$ — целая часть от $x$;

(в) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| \geqslant 2, \\ 3 & \text{при } |x| < 2. \end{cases}$

**7.7.** Рассмотрите функцию $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 3$. Пусть $\Delta x = -1$. Найдите $\Delta y$.

**7.8.** Рассмотрите функцию $y = \frac{x}{2x^2 + 1}$ в точке $x = 1$. Пусть $\Delta x = \frac{1}{2}$. Найдите $\Delta y$.

**7.9.** Найдите точку разрыва и выясните тип разрыва для функции

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

**7.10.** Для каких значений $x$ функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна?

**7.11.** Как следует выбрать значение $A$, чтобы полученная функция была непрерывна? Постройте график функции

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{при } x \neq 3, \\ A & \text{при } x = 3. \end{cases}$$

В задачах 7.12—7.16 исследуйте на непрерывность функции.

**7.12.** $y = \frac{x^4}{x - 2}$.

**7.13.** $y = \frac{x^3 + 8}{x + 2}$.

**7.14.** $y = \frac{|x|}{x}$.

**7.15.** $y = \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x^2 - 4}$.

**7.16.** $y = \frac{x}{\sin x}$.

# ПРОИЗВОДНАЯ

## § 45. Скорость изменения функции

Если для некоторой функции $y = f(x)$ при изменении аргумента $x$ на некоторую величину $\Delta x$ функция $y$ изменяется на $\Delta y$, т. е. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, то приращение $\Delta y$ функции, соответствующее приращению $\Delta x$ аргумента,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

***Средней скоростью*** изменения функции $y$ для промежутка значений аргумента от $x$ до $x + \Delta x$ называется отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, сколько единиц приращения функции приходится на единицу приращения аргумента.

***Мгновенной (истинной) скоростью*** изменения функции при данном значении аргумента $x$ называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для линейной функции $y = kx + b$ средняя скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ и истинная скорость изменения функции $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ совпадают; числовое значение истинной скорости равно коэффициенту $k$.

## Пример 5.1

Найти среднюю скорость изменения функции $y = 3x^2 - 6$ при изменении $x$ от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3,5$.

*Решение*

*1-й способ.* Приращение $\Delta x = 3,5 - 3 = 0,5$. Значения функции $y_1(x_1) = 3 \cdot 3^2 - 6 = 21$, $y_2(x_2) = 3 \cdot 3,5^2 - 6 = 30,75$. Приращение функции $\Delta y = 30,75 - 21 = 9,75$. Средняя скорость изменения функции $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9,75}{0,5} = 19,5$.

*2-й способ.* Значение функции при $x = x_2$:

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 6 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6.$$

Поэтому $\Delta y = 6x - \Delta x + 3(\Delta x)^2$; приращение аргумента $\Delta x = 0,5$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5^2}{0,5} = 19,5.$$

## Пример 5.2

Прямолинейное движение точки задано уравнением $S = 3t^2 - 2t + 5$, здесь пройденный путь $S$ выражен в метрах, время $t$ — в секундах. Найти скорость движения точки в момент $t_0 = 5$.

*Решение*

Значение $S + \Delta S$ составляет

$$S + \Delta S = 3(t + \Delta t)^2 - 2(t + \Delta t) + 5,$$

поэтому

$$\Delta S = 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t}{\Delta t} = 6t + 3\Delta t - 2.$$

Истинная скорость и движения точки в момент $t$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (6t + 3\Delta t - 2) = 6t - 2.$$

Тогда истинная скорость движения точки в момент $t_0$: $v(5) = 6 \cdot 5 - 2 =$ $= 28$ (м/с).

**Пример 5.3**

Закон падения материальной точки в пустоте выражается формулой $S = \frac{1}{2}gt^2$, где $g$ — ускорение силы тяжести ($g = 9{,}8$ м/с); $t$ — время; $S$ — путь, пройденный точкой за время $t$. Определить скорость движения точки в момент времени $t$.

*Решение*

Подобное движение является неравномерным, так как его закон выражается квадратной функцией. Значение $S + \Delta S$ составляет

$$S + \Delta S = \frac{1}{2}g(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2),$$

поэтому

$$\Delta S = \frac{1}{2}g(2t\Delta t + (\Delta t)^2),$$

следовательно,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}g\frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}g(2t + \Delta t).$$

Поскольку отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ зависит и от $t$, и от $\Delta t$, понятие скорости неравномерного движения может быть отнесено только к определенному моменту времени $t$. Так как средняя скорость зависит от $\Delta t$, она тем точнее характеризует состояние падающей точки в момент $t$, чем меньшим выбирается отрезок $\Delta t$.

Мгновенная скорость $v$ падения точки в момент времени $t$ определяется как $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}$, здесь $v_{ср}$ — средняя скорость. Поэтому

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{1}{2}g(2t + \Delta t)\right) = gt.$$

## Вопросы для повторения

1. Как вычисляется скорость изменения функции?
2. Что называется мгновенной скоростью изменения функции?
3. Чему равны средняя и истинная скорость линейной функции?
4. Как вычисляется мгновенная скорость при неравномерном движении?

## § 46. Производная функции

**1. Определение производной функции.** Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке, $x$ — точка этого промежутка и число $\Delta x$ таково, что $x + \Delta x$ тоже принадлежит этому промежутку. Тогда ***производной функции*** $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y$ к приращению аргумента $\Delta x$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (5.1)$$

если этот предел существует.

Если производная существует для каждого значения $x$ в области определения функции $f(x)$, то она представляет собой новую функцию от аргумента $x$.

Процесс вычисления производной называется ***дифференцированием***.

С физической точки зрения производная от $f(x)$ в точке $x$ представляет собой скорость изменения функции $f(x)$ относительно ее аргумента при данном значении $x$.

Производная функции имеет следующие обозначения: $y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}, y'_x$.

## Алгоритм определения производной функции

I. Вычисляют приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

II. Находят среднюю скорость изменения функции

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

III. Вычисляют истинную скорость изменения функции при стремлении $\Delta x \to 0$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \qquad (5.2)$$

**Пример 5.4**

Определить производную функции $y = x^2$ при $x = 2$.

*Решение*

Вычисляем:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

следовательно, $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Средняя скорость изменения функции

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Тогда истинная скорость изменения функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Находим значение производной при $x = 2$: $y' = 2 \cdot 2 = 4$.

**2. Связь производной функции с непрерывностью.** Сформулируем зависимость между непрерывностью и наличием производной функции.

---

Если функция $f(x)$ имеет производную при некотором значении аргумента $x$, то при этом значении $x$ данная функция непрерывна.

---

Допустим, что при некотором значении $x$ функция $f(x)$ имеет производную, т. е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

По определению предела $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, отсюда $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x$. Находим предел этого выражения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (y'\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha\Delta x).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (y'\Delta x) = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\alpha\Delta x) = 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

---

Функцию $y = f(x)$ при данном значении $x$ называют ***непрерывной***, если бесконечно малому приращению аргумента $x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $y$, т. е. если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

**3. Геометрический смысл производной.** ***Касательной*** к данной кривой в данной ее точке $A$ называется предельное положение секущей $AB$, когда точка $B$, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке $A$.

Прямая, проходящая через точку $A$ перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** к кривой в точке $A$.

Рассмотрим непрерывную кривую $y = f(x)$ (рис. 5.1).

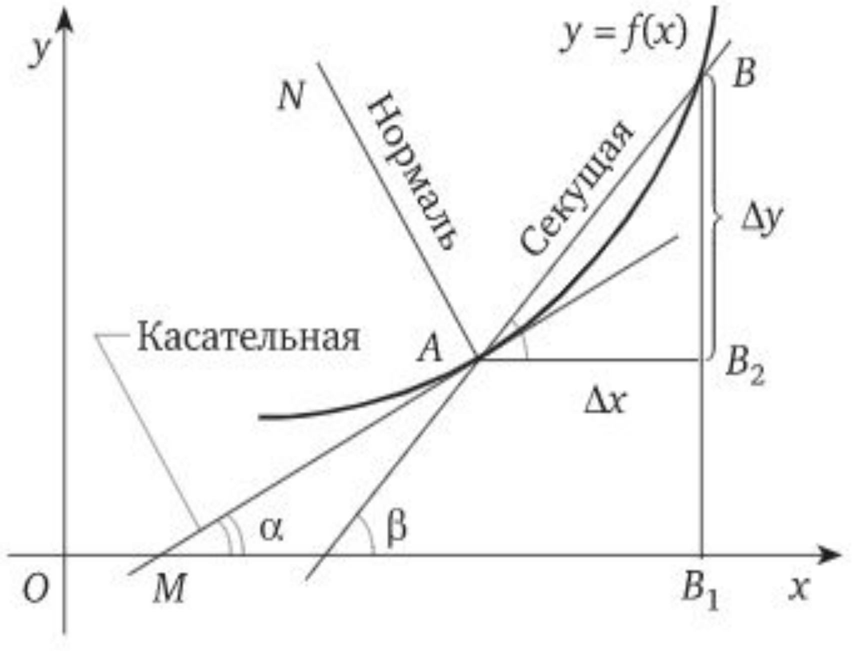


*Рис. 5.1*

Отметим на этой кривой фиксированную точку $A(x; y)$, а также перемещающуюся по кривой точку $B(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Тогда расстояние от точки $B$ до оси абсцисс $BB_1 = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Проведем прямую $AB$, пересекающую кривую $f(x)$ в точках $A$ и $B$, и прямую $AB_2$, параллельную оси $Ox$.

Обозначим в прямоугольном треугольнике $ABB_2$ угол $\angle BAB_2 = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. с геометрической точки зрения $\operatorname{tg}\beta$ равен тангенсу угла наклона секущей $AB$ к оси $Ox$.

При $\Delta x \to 0$ точка $B$, перемещаясь по кривой $f(x)$, неограниченно приближается к точке $A$, секущая $AB$, поворачиваясь около точки $A$, стремится занять предельное положение касательной в точке $A$ к кривой $f(x)$. При этом $\beta \to \alpha$, где $\alpha$ — угол, образуемый касательной $AM$ с положительным направлением оси $Ox$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Из равенства $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = y'_x$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $y'_x = \operatorname{tg} \alpha$, или $y'_x = k$, где $k$ — угловой коэффициент касательной $AM$ к графику функции $y = f(x)$ в точке $A$, равный тангенсу угла наклона касательной к оси $Ox$, т. е.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k. \tag{5.3}$$

Итак, производная функции $y = f(x)$ в точке $A$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

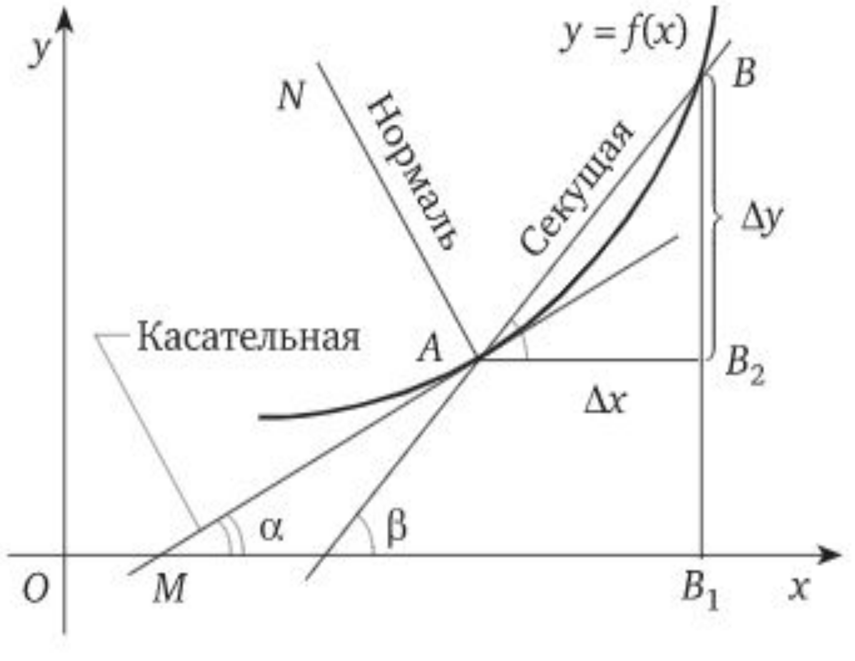
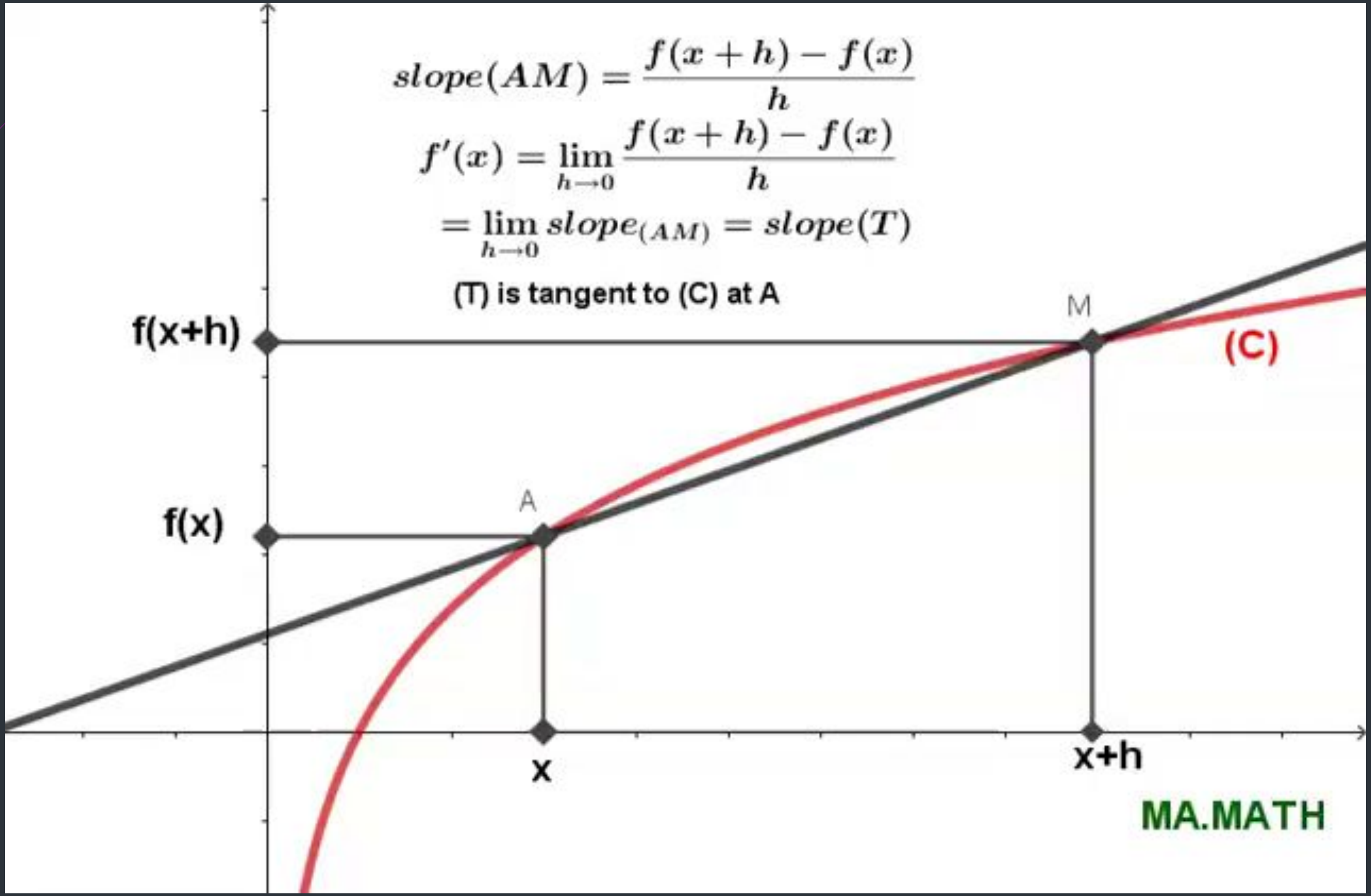



Рис. 5.1


$slope(AM) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$= \lim_{h \to 0} slope_{(AM)} = slope(T)$
(T) is tangent to (C) at A
f(x+h)
f(x)
M
A
(C)
x
x+h
MA.MATH

## Вопросы для повторения

1. Что называется средней скоростью изменения функции?
2. Дайте определение производной функции.
3. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
4. Какая связь существует между непрерывностью функции и ее производной?
5. Объясните геометрический смысл производной.

## § 47. Формулы дифференцирования

**1. Производная постоянной.** Пусть $y = C$, где $C$ — постоянное число. Тогда

$$y + \Delta y = C;\ \Delta y = y + \Delta y - y = C - C = 0;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0;\ \ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Производная постоянной равна 0:

$$C' = 0. \qquad (5.4)$$

**2. Производная функции $y = x$.** В этом случае

$$y + \Delta y = x + \Delta x;\ \Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;\ \ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Производная функции $y = x$ равна 1:

$$x' = 1. \qquad (5.5)$$

**3. Производная алгебраической суммы функций.** Для вывода ограничимся суммой двух слагаемых $y = u + v$, где $u$ и $v$ — функции от аргумента $x$, имеющие производные по $x$:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v;$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v = \Delta u + \Delta v;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}; \; y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Слагаемые правой части являются производными функций $u$ и $v$, поэтому $y' = u' + v'$ или

$$(u + v)' = u' + v'. \tag{5.6}$$

Вывод можно распространить на алгебраическую сумму конечного числа слагаемых.

---

Производная алгебраической суммы конечного числа функций равна сумме производных слагаемых.

---

Например, $y = 1 + x$, тогда $y' = 1$.

**4. Производная произведения двух функций.** Пусть $y = uv$, где $u$ и $v$ — функции от аргумента $x$, имеющие производные по $x$.

Находим:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v;$$

$$\Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}. \qquad (\alpha)$$

Функции $u$ и $v$ не зависят от $\Delta x$, поэтому будем считать их постоянными; по определению $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$.

Функция $u$ дифференцируема, следовательно, она непрерывна, поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$ и последний член в формуле $(\alpha)$ равен нулю. Тогда имеем:

$$(uv)' = uv' + vu'. \qquad (5.7)$$

---

Производная произведения двух функций равна сумме произведений первой функции на производную второй и второй на производную первой.

---

**5. Производная произведения постоянной на функцию.** Пусть $y = Cu$, где $C$ — постоянная, а $u = f(x)$, имеющая производную по $x$. Тогда $y' = (Cu)' = Cu' + uC' = Cu' + u \cdot 0$, т. е.

$$(Cu)' = Cu'. \qquad (5.8)$$

---

Производная произведения постоянной на функцию равна произведению постоянной на производную функции (постоянную можно выносить за знак производной).

---

**6. Производная частного.** Дана функция $y=\dfrac{u}{v}$, где $u$ и $v$ — функции аргумента $x$, имеющие производные по $x$ ($v \neq 0$). Тогда

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v};\ \Delta y=\frac{uv+v\Delta u-uv-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)};\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)};$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Здесь, как и при выводе формулы (5.8), принято, что $u$ и $v$ не зависят от $\Delta x$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$. Итак,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}. \qquad (5.9)$$

---

Производная частного равна дроби, числитель которой есть разность между произведением делителя на производную делимого и произведением делимого на производную делителя, а знаменатель есть квадрат делителя.

---

**7. Следствия производной частного.** Из формулы (5.9) следует:

I. Если знаменатель дроби есть постоянная $C$, $y = \frac{u}{C}$, то $y' = \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'$, т. е.

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'. \tag{5.10}$$

---

**Если знаменатель дроби — постоянная величина, то производная дроби равна производной от числителя, деленной на знаменатель.**

---

II. Если числитель дроби есть постоянное число $C$, $y = \frac{C}{v}$, то $y' = \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{C'v - v'C}{v^2} = \frac{0 - Cv'}{v^2} = -\frac{Cv'}{v^2}$, т. е.

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}. \tag{5.11}$$

---

**Если числитель дроби — постоянная величина $C$, то производная равна числителю $C$, умноженному на производную знаменателя и деленному на квадрат знаменателя, взятому с противоположным знаком.**

---

**8. Понятие о сложной функции.** Пусть дана функция $y = \sqrt{x^2+1}$. Обозначим $x^2+1$ через $u$. Тогда $y = \sqrt{u}$ зависит от $x$ через вспомогательную переменную $u$, а переменная $u$ является функцией аргумента $x$.

Если для функции $y = \lg \sin x$ функцию $\sin x$ обозначить через $u$, то получим $y = \lg u$. В этом случае $y$ также зависит от $x$ через вспомогательную переменную $u$, которая является функцией аргумента $x$.

Такого рода функции называются ***сложными функциями*** или ***функциями от функции***.

В общем виде такие функции могут быть представлены следующим образом:

$$y = f(u),\ u = \varphi(x). \tag{5.12}$$

**9. Производная сложной функции.** Для нахождения производной от сложной функции рассмотрим равенства (5.12).

Если $x$ получит приращение $\Delta x$, то $u$ получит приращение $\Delta u$, а $y$ получит приращение $\Delta y$ ($\Delta u \neq 0$, $\Delta x \neq 0$).

Функции $f(u)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, поэтому из $\Delta x \to 0$ следует, что $\Delta u \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отношения $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ и $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ имеют пределы $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$.

Имеем очевидное равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

из которого следует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x). \qquad (5.13)$$

Иначе, если сложная функция $y(x) = f(\varphi(x))$, то

$$f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x). \qquad (5.14)$$

---

Если $y$ является дифференцируемой функцией от $u$, а $u$ является дифференцируемой функцией от $x$, то производная $y$ по x равна произведению производной функции $y$ по $u$ на производную функции $u$ по $x$.

---

**10. Производная степени с целым положительным показателем.** Пусть функция $y = u^n$, где $u = f(x)$; $n$ — целое положительное число, т. е. $y$ является сложной функцией.

Допустим, что функция $u$ имеет производную по $x$. Рассмотрим, в частности, функцию $y = u^2$. Найдем производную этой функции по формуле (5.7):

$$(u^2)' = (u \cdot u)' = u' \cdot u + u \cdot u' = 2u \cdot u'.$$

Докажем методом математической индукции, что равенство, справедливое для $n$: $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, будет справедливо и для $n + 1$: $(u^{n+1})' = (n + 1)u^n u'$.

Представим $u^{n+1}$ в виде $u^n \cdot u$ и по формуле (5.7) найдем производную произведения:

$$(u^{n+1})' = (u^n \cdot u)' = (u^n)'u + u'u^n = nu^{n-1}u'u + u'u^n =$$

$$= nu^n u' + u'u^n = u^n u'(n + 1) = (n + 1)u^n u'.$$

Следовательно, если $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, то и $(u^{n+1})' = (n + 1)u^n u'$.

Указанный закон верен для $(u^n)'$ и для $(u^{n+1})'$, т. е. он верен для любого целого положительного числа $n$.

Итак, для любого целого положительного показателя $n$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'. \qquad (5.15)$$

Если $u = x$, то

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (5.16)$$

Приведем доказательство того обстоятельства, что формула (5.15) справедлива для любого значения $n \neq 0$.

Прологарифмируем равенство $y = u^n$ по основанию $e$, тогда $\ln y = n \ln u$; здесь $\ln y$ — сложная функция. Продифференцируем это соотношение по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

откуда $y' = ny \cdot \dfrac{1}{u} \cdot u'$, поэтому

$$y' = nu^n \cdot \frac{1}{u} \cdot u' = nu^{n-1}u',$$

где $n$ — любое число, $n \neq 0$.

Например, пусть $y = 3x^4$, $z = 5x^{-2/5}$. Тогда $y' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$; $z' = 5 \cdot \left(-\dfrac{2}{5}\right) x^{-7/5} = -2x^{-7/5}$.

**11. Производная функции $y=\sqrt{u}$.** При вычислении производной функции $y=\sqrt{u}$, где $u = f(x)$, заменим корень дробным показателем и применим формулу (5.15):

$$(\sqrt{u})'=(u^{1/2})'=\frac{1}{2}u^{1/2-1}u'=\frac{1}{2}u^{-1/2}u'=\frac{u'}{2\sqrt{u}},$$

т. е.

$$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}. \tag{5.17}$$

При $u=x$ имеем

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{5.18}$$

Например, $y=\sqrt{3x^2-1}$, тогда $y'=\frac{3\cdot 2x}{2\sqrt{3x^2-1}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$.

**12. Производная функции $y = \frac{1}{u}$.** При выводе формулы производной функции $\frac{1}{u}$, где $u = f(x)$, заменим $\frac{1}{u}$ на $u^{-1}$, тогда $\left(\frac{1}{u}\right)' = (u^{-1})' = -u^2$; $y' = -\frac{u'}{u^2}$, т. е.

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}. \tag{5.19}$$

При $u = x$ имеем

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{5.20}$$

Например, пусть $y = \frac{1}{x^4}$, тогда $y' = -\frac{4x^3}{(x^4)^2} = -\frac{4}{x^5}$.

**13. Применение формул дифференцирования.** Определим производные некоторых функций.

1) $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 5$.

Используя формулы (5.4)—(5.6), (5.8), (5.16), получаем

$$y' = (4x^3)' + (2x^2)' + x' - 5' = 12x^2 - 4x + 1.$$

2) $z = \dfrac{x-a}{x+a}$.

Учитывая формулы (5.4) и (5.9), получаем

$$z' = \frac{(x-a)'(x+a)-(x+a)'(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{x+a-x+a}{(x+a)^2} = \frac{2a}{(x+a)^2}.$$

3) $u = \sqrt[3]{(x^3+1)^2}$.

По формуле (5.14) находим

$$u' = ((x^3+1)^{2/3})^{2/3} = \frac{2}{3}(x^3+1)^{-1/3}(x^3+1)' = \frac{2}{3}(x^3+1)^{-1/3}\cdot 3x^2 = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

4) $v = x^2\sqrt{x^2-1}$.

Используя формулу (5.14), получаем

$$v' = (x^2\sqrt{x^2-1})' = (x^2)'\sqrt{x^2-1} + (\sqrt{x^2-1})'x^2 =$$

$$= 2x\sqrt{x^2-1} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x(x^2-1)+x^3}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{3x^3-2x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

## Вопросы для повторения

1. Чему равна производная постоянной? Приведите доказательство.
2. Чему равна производная аргумента? Приведите доказательство.
3. Как вычисляется производная алгебраической суммы функции, произведения и частного функций?
4. Какую функцию называют сложной? Приведите примеры сложных функций.
5. Как вычисляется производная сложной функции?
6. Выведите формулу производной степени для целого положительного показателя.

## § 48. Геометрические приложения производной

Геометрический смысл производной обсуждался в § 47 (п. 3). Изобразим кривую, являющуюся графиком функции, и отметим на ней точку $A(x_1; y_1)$ (рис. 5.2).

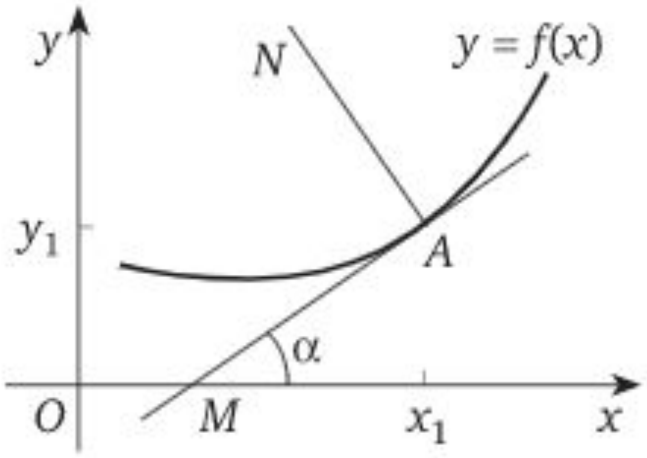



*Рис. 5.2*

Производная функции $y = f(x)$ при $x = x_1$ равна угловому коэффициенту $k_1$ касательной $MA$, проведенной к кривой в точке с абсциссой $x = x_1$:

$$k_{1_{x=x_1}} = f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где $\alpha$ — угол между касательной к данной кривой, проведенной через точку $A$, и положительным направлением оси $Ox$.

Уравнение касательной $MN$ к кривой $y = f(x)$, проходящей через точку $A(x_1; y_1)$, имеет вид

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \qquad (5.21)$$

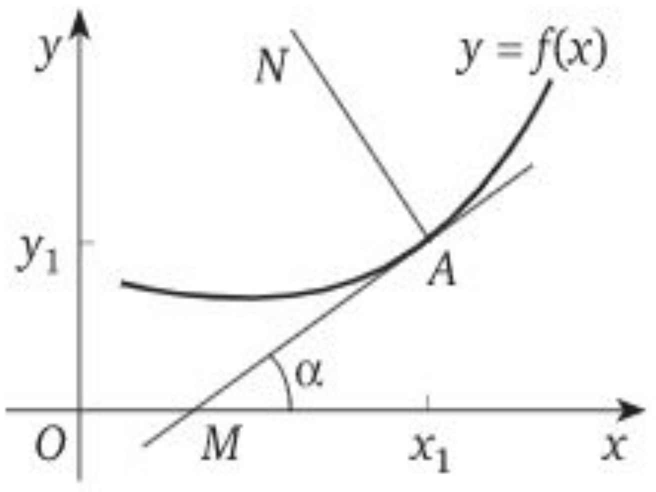


Рис. 5.2

Так как по определению нормаль к кривой в точке перпендикулярна касательной, проведенной в этой точке, а условием перпендикулярности прямых является соотношение $k_1 k_2 = -1$ между их угловыми коэффициентами, то уравнение нормали $NA$ имеет вид

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1). \qquad (5.22)$$

Направление кривой в каждой ее точке определяется направлением касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклона кривой в данной ее точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью $Ox$.

## Пример 5.5

Найти угол наклона параболы $y = x^2 - x + 1$ к оси $Ox$ в точке $x_1 = -1$.

*Решение*

Для вычисления угла наклона кривой найдем $y'(x_1)$: $y' = 2x - 1$; $y'(-1) = -3$; $k = \operatorname{tg}\alpha = -3$. По таблице определяем $\alpha = 108°26'$.

## Пример 5.6

К параболе $y = 3x^2 - x$ в точке $x_1 = -1$ проведены касательная и нормаль. Составить их уравнения.

*Решение*

Ордината точки касания $y(-1)$ составляет $3 \cdot (-1)^2 - (-1) = 4$, т. е. координаты точки касания $(-1; 4)$. Угловой коэффициент $k_{x=-1}$ равен $y'(-1) = (3x^2 - x)'_{x=-1} = (6x - 1)_{x=-1} = -7$.

Составим уравнение касательной, подставив в формулу (5.21) координаты $(-1; 4)$ и значение $k = -7$:

$$y - 4 = -7(x + 1) \Rightarrow 7x + y + 3 = 0.$$

Составим уравнение нормали, воспользовавшись формулой (5.22):

$$y - 4 = -\frac{1}{-7}(x + 1) \Rightarrow x - 7y + 29 = 0.$$

## Пример 5.7

Найти координаты точки $A$, в которой касательная к параболе $y = x^2 - x - 12$ образует угол в 45° с осью $Ox$.

*Решение*

Находим тангенс угла наклона касательной, проведенной в искомой точке к оси $Ox$: $\operatorname{tg}\alpha = y' = (x^2 - x - 12)' = 2x - 1$.

По условию угол $\alpha$ равен 45°, следовательно, $\operatorname{tg} 45° = 1 = 2x - 1$, поэтому $x = 1$. Находим ординату искомой точки: $y(1) = 1^2 - 1 - 12 = -12$. Таким образом, координаты точки $A$: $(1; -12)$.

## Пример 5.8

Найти, под каким углом ось $Ox$ пересекает параболу $y = x^2 + x$.

*Решение*

Уравнение оси $Ox$: $y = 0$. Поэтому решим систему

$$\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Корни этой системы $x_1 = -1$; $x_2 = 0$. Парабола пересекает ось $Ox$ в точках $A(-1; 0)$; $B(0; 0)$.

Находим угловые коэффициенты касательных к параболе в точках $A$ и $B$:

$$y' = (x^2 + x)' = 2x + 1;\ k_{x=-1} = 2 \cdot (-1) + 1 = -1;\ k_{x=0} = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Вычислим углы $\alpha_1$ и $\alpha_2$, образуемые касательными к параболе с осью $Ox$ в точках $A$ и $B$: $k_{x=-1} = \operatorname{tg}\alpha_1 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = 135°$; $k_{x=0} = \operatorname{tg}\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$.

## Вопросы для повторения

1. Чему равна производная при данном значении аргумента с геометрической точки зрения?
2. Запишите уравнения касательной и нормали, проведенных через данную точку на кривой.
3. Как находится направление кривой в каждой ее точке?
4. Как вычисляется угловой коэффициент касательной в данной точке кривой?

## § 49. Физические приложения производной

При прямолинейном движении точки скорость $v$ в данный момент $t = t_0$ есть производная $\frac{dS}{dt}$ от пути $S$ по времени $t$, вычисленная для момента $t_0$.

Ускорение $a$ в данный момент $t = t_0$ есть производная от скорости $v$ по времени $t$, вычисленная для момента $t_0$.

**Пример 5.9**

Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t_0 = 4$ с.

*Решение*

Скорость движения точки в любой момент времени $t$: $v = \frac{dS}{dt} = 6t^2 + 2t$.

Тогда скорость движения точки в момент $t_0$: $v(t_0) = 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 2 = 104$ (м/с).

Ускорение движения точки в любой момент времени $t$: $a = \frac{dv}{dt} = 12t + 2$.

Тогда ускорение движения точки в момент времени $t_0$: $a(t_0) = 12 \cdot 4 + 2 = 50$ (м/с$^2$).

## § 50. Производные тригонометрических функций

**1. Производная синуса.** Пусть дана функция $y = \sin u$, где $u = f(x)$. Находим производную синуса по общему правилу:

$$y + \Delta y = \sin(u + \Delta u);\ \Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin u.$$

Выполним преобразования по формуле разности синусов (3.94):

$$\Delta y = 2\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\sin\frac{\Delta u}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\sin\frac{\Delta u}{2}}{\Delta x}.$$

Умножим числитель и знаменатель полученной дроби на $\frac{\Delta u}{2}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\sin\frac{\Delta u}{2}\cdot\frac{\Delta u}{2}}{\Delta x\cdot\Delta u/2} = \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\Delta u/2}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как функция дифференцируема по $x$, $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta u}{2}}{\Delta u/2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

С учетом примера 4.2 имеем $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta u}{2}}{\Delta u/2} = 1$; $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) = \cos u$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$.

Поэтому

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'. \qquad (5.23)$$

При $u = x$ имеем

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (5.24)$$

**2. Производная косинуса.** Пусть $y = \cos u$, где $u = f(x)$. Поскольку с учетом формулы для функции дополнительного аргумента (3.35)

$\sin(\pi/2 - u) = \cos u$, определение производной косинуса сводится к формуле (5.23):

$$(\cos u)' = \sin(\pi/2 - u)' = [\cos(\pi/2 - u)](\pi/2 - u)' =$$
$$= \sin u \cdot (-u)' = -\sin u \cdot u'.$$

Следовательно,

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'. \tag{5.25}$$

При $u = x$

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5.26}$$

**3. Производная тангенса.** Пусть $y = \mathrm{tg}\, u$, где $u = f(x)$. С учетом определения тангенса и правила дифференцирования сложной функции (5.14) получаем

$$(\mathrm{tg}\, u)' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{(\sin u)' \cos u - (\cos u)' \sin u}{\cos^2 u}.$$

С учетом соотношений (5.23) и (5.25) получим

$$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{(\cos u \cdot \cos u + \sin u \cdot \sin u)u'}{\cos^2 u} = \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u)u'}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

Итак,

$$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'. \tag{5.27}$$

Если $u = x$, то

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2\, x. \tag{5.28}$$

**4. Производная котангенса.** Пусть $y = \operatorname{ctg} u$, где $u = f(x)$. С учетом того, что $\operatorname{ctg} u = \dfrac{1}{\operatorname{tg} u}$, воспользуемся соотношением (5.19):

$$(\operatorname{ctg} u)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} u}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 u} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = -\frac{1}{\sin^2 u / \cos^2 u} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'. \tag{5.29}$$

При $u = x$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x). \tag{5.30}$$

**Пример 5.12**

Определить производные функции: 1) $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; 2) $\varphi(x)=\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x$.

*Решение*

1) Учитывая формулы (5.14) и (5.24), находим

$$f(x)=\frac{(1-\sin x)'(1+\sin x)-(1+\sin x)'(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}=-\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

2) По формулам (5.28) и (5.30) получаем

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=-\frac{4}{(2\sin x\cos x)^2}=-\frac{4}{\sin^2(2x)}.$$

## Вопросы для повторения

1. Приведите формулы для нахождения производных синуса и косинуса.
2. Выведите формулу производной тангенса. При каких значениях аргумента производная тангенса не имеет смысла?
3. Выведите формулу производной котангенса. При каких значениях аргумента производная котангенса не имеет смысла?

## § 51. Производные обратных тригонометрических функций

**1. Производная арксинуса.** Пусть $y = \arcsin u$, где $u = f(x)$. По определению арксинуса

$$\sin y = u. \tag{*}$$

Функция $\sin y$ — сложная, так как $y = y(u)$, а $u = u(x)$, следовательно, $y = y(x)$.

Дифференцируем обе части формулы (*) по $x$:

$$(\sin u)' = u' \Rightarrow \cos y \cdot y' = u',$$

следовательно, $y' = \dfrac{u'}{\cos y}$.

Воспользуемся соотношением $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ (здесь квадратный корень берется со знаком «+», так как $\arcsin u \in [-\pi/2; \pi/2]$, а на этом отрезке $\cos y \geq 0$), тогда

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}},$$

т. е.

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'. \tag{5.31}$$

При $u = x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{5.32}$$

**2. Производная арккосинуса.** Пусть $y = \arccos u$, где $y = f(x)$. Так как $\arccos u = \pi/2 - \arcsin u$, то

$$(\arccos u)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin u\right)' = 0 - (\arcsin u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'.$$

Таким образом,

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'. \quad (5.33)$$

При $u = x$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (5.34)$$

**3. Производная арктангенса.** Пусть $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = f(x)$. Из определения арктангенса следует: $\operatorname{tg} y = u$. Дифференцируя по $x$, получим $(\operatorname{tg} y)' = u'$, $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = u'$, откуда

$$y' = \cos^2 y \cdot u'.$$

Так как $\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$, то $y' = \frac{u'}{1+\operatorname{tg} y^2} = \frac{u'}{1+u^2}$. Следовательно,

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}. \tag{5.35}$$

При $u = x$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{5.36}$$

**4. Производная арккотангенса.** Пусть $y = \operatorname{arcctg} u$, где $u = f(x)$. Так как $\operatorname{arcctg} u = \pi/2 - \operatorname{arctg} u$, то

$$(\operatorname{arcctg} u)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} u\right)' = 0 - (\operatorname{arctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}. \qquad (5.37)$$

При $u = x$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (5.38)$$

**Пример 5.13**

Найти производную функции: 1) $f(x) = 2\arcsin x + \arccos x$; 2) $\varphi(x) = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$; 3) $\psi(x) = (\arccos(3x))^2$.

*Решение*

1) $$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) $$\varphi'(x) = -\frac{1}{1-(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})' = -\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

3) $$\psi' = 2\arccos(3x)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\right)(3x)' = -2\arccos(3x)\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= -\frac{6\arccos(3x)}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

## Вопросы для повторения

1. Выведите формулы производных арксинуса и арккосинуса.
2. При каких значениях аргумента существуют арксинус, арккосинус и их производные?
3. Выведите формулы производных арктангенса и арккотангенса.
4. При каких значениях аргумента существуют арктангенс, арккотангенс и их производные?

## § 52. Производная логарифмической функции

Производная функции $y = \ln u$, где $u = f(x)$, вычисляется по формуле

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}. \tag{5.39}$$

Доказательство, ввиду его сложности, не приводится. Если $u = x$, то

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{5.40}$$

Производная десятичного логарифма $y = \lg u$ вычисляется по формуле

$$(\lg u)' = 0{,}4343\frac{u'}{u}. \tag{5.41}$$

При $u = x$

$$(\lg x)' = 0{,}4343 \cdot \frac{1}{x}. \tag{5.42}$$

Здесь $0{,}4343 = \lg e$ — модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным (см. § 17, п. 5), $\lg N = 0{,}4343 \ln N$.

Также без доказательства приведем выражение для определения производной от логарифма по любому основанию:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{5.43}$$

Значения производных от логарифмов тригонометрических функций:

$$(\ln\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x; \tag{5.44}$$

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x; \tag{5.45}$$

$$(\ln\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}; \tag{5.46}$$

$$(\ln\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{2}{\sin(2x)}. \tag{5.47}$$

**Пример 5.14**

Найти производную функции: 1) $f(x) = \ln(ax^2 + b)$; 2) $\varphi(x) = \ln\sqrt{2x}$; 3) $\psi(x) = \lg(2x + 1)$.

*Решение*

1) По формуле (5.39) находим:

$$f'(x) = \frac{1}{ax^2 + b}(ax^2 + b)' = \frac{2ax}{ax^2 + b}.$$

2) Учитывая формулы (2.12) и (2.15), получаем

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln x)\right)' = \frac{1}{2x}.$$

3) По формуле (5.41) находим $\psi'(x) = \dfrac{0{,}4343}{2x+1}(2x+1)' = \dfrac{0{,}8686}{2x+1}.$

# Вопросы для повторения

1. Выпишите формулы для вычисления производных функций $y = \ln u$, $y = \lg u$.
2. Приведите примеры вычисления производных сложных функций, включающих функции натуральных и десятичных логарифмов.

## § 53. Производные показательных функций

Пусть $y = a^u$ — показательная функция, причем $u = u(x)$, а $a$ — постоянное число. Прологарифмируем выражение для $y$ по основанию $e$:

$$\ln y = u \ln a; \tag{*}$$

здесь $y$ — сложная функция аргумента $x$.

Продифференцируем равенство (*): $\dfrac{y'}{y} = u' \ln a$, тогда $y' = y u' \ln a = a^u u' \ln a$, т. е.

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'. \tag{5.48}$$

При $u = x$

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{5.49}$$

Если $a = e$, то $(e^u)' = e^u \ln e \cdot u' = e^u \cdot u'$, таким образом,

$$(e^u)' = e^u \cdot u', \tag{5.50}$$

при $u = x$

$$(e^x)' = e^x, \tag{5.51}$$

т. е. производная от функции $e^x$ совпадает со значением самой функции.

**Пример 5.15**

Определить производную функции: 1) $f(x)=3^{2x^2}$; 2) $F(x)=\ln x\cdot e^x$; 3) $\varphi(x)=$ $=x^2e^x$; 4) $y(x)=5\ln x+e^x$.

Решение.

1) По формуле (5.48) имеем $f'(x)=3^{2x^2}\ln 3\cdot(2x^2)'=3^{2x^2}\ln 3\cdot 4x$.

2) $F'(x)=(\ln x)'e^x+(e^x)'\ln x=\dfrac{1}{x}e^x+e^x\ln x=e^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$.

3) $\varphi'(x)=(x^2)'e^x+(e^x)'x^2=2xe^x+e^xx^2=xe^x(2+x)$.

4) $\psi'(x)=\dfrac{5}{x}+e^x$.

## Вопросы для повторения

1. Выведите формулу для производной от функции $y = a^u$.
2. Выведите формулу для производной от функции $y = e^u$.
3. Приведите примеры вычисления производных сложных функций, включающих в себя показательные функции.

# Основные формулы дифференцирования

| | |
|---|---|
| $C' = 0$ ($C$ — постоянная) | |
| $x' = 1$ | |
| $(u + v - w)' = u' + v' - w'$ ($u$, $v$, $w$ — функции от $x$) | |
| $(Cu)' = Cu'$ | |
| $(uv)' = u'v + uv'$ | $(\sin x)' = \cos x$ |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ | $(\cos x)' = -\sin x$ |
| $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'$ | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ |
| $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}v'$ | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ |
| $(x^n)' = nx^{n-1}$ | $(\ln\sin x)' = \operatorname{ctg} x$ |
| $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | $(\ln\cos x)' = -\operatorname{tg} x$ |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(\ln\operatorname{tg} x)' = \frac{2}{\sin(2x)}$ |
| $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $(\ln\operatorname{ctg} x)' = -\frac{2}{\sin(2x)}$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a$ | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ | $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

В задачах 7.17—7.28 найдите по формулам производные от функций.

**7.17.** $y = x^7 + 5\cos x.$

**7.18.** $y = x\ln x.$

**7.19.** $y = \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + 7.$

**7.20.** $y = \frac{ax + b}{c}.$

**7.21.** $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + 3x.$

**7.22.** $y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 8.$

**7.23.** $y = \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2.$

**7.24.** $y = \frac{1}{5x^5} + \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{x}.$

**7.25.** $y = \operatorname{tg} x - x.$

**7.26.** $y = x^3 \sin x.$

**7.27.** $y = \frac{x}{1 - 5x}.$

**7.28.** $y = \frac{\sin x}{\cos x - 1}.$

В задачах 7.29—7.50 найдите производные от функций.

**7.29.** $y = \sin 8x + \cos 8x$.

**7.30.** $y = (2 - 7x)^5$.

**7.31.** $y = \sqrt{1 + 3x^2}$.

**7.32.** $y = \sin^2 x$.

**7.33.** $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

**7.34.** $y = \cos \sqrt{x} + \sqrt{\cos x}$.

**7.35.** $y = \mathrm{tg}^3 x + 3\mathrm{tg}\, x$.

**7.36.** $y = \sqrt{\sin 8x}$.

**7.37.** $y = \cos^3 (5 + 2x^2)$.

**7.38.** $y = \dfrac{x^2 + 7}{x^2 - 1}$.

**7.39.** $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$.

**7.40.** $y = \arccos (1 - x)$.

**7.41.** $y = x - \mathrm{arctg}\, 3x$.

**7.42.** $y = \arcsin 2x$.

**7.43.** $y = x \arcsin x$.

**7.44.** $y = \ln (3x + 1)$.

**7.45.** $y = \ln (x^2 - 1) - 2\ln (x - 1)$.

**7.46.** $y = \ln \sin 3x$.

**7.47.** $y = \ln^2 x - \ln x^2$.

**7.48.** $y = e^{\sin 4x}\cos 4x$.

**7.49.** $y = (x^3 - 3x^2 + 6x)e^x$.

**7.50.** $y = \ln \mathrm{tg}\, x$.

**7.51.** $y = \ln (1 - \cos x)$.

**Задачи**

Напишите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x_0$.

**7.52.** К кривой $y = 2x^3$ в точке $x_0 = 1$.

**7.53.** К кривой $y = x^2 + 4$ в точке $x_0 = 2$.

**7.54.** К кривой $y = \dfrac{2}{x^2+1}$ в точке $x_0 = 1$.

**7.55.** К кривой $y = \dfrac{4}{x}$ в точке $x_0 = -4$.

**7.56.** К кривой $y = \sin x$ в точке $x_0 = 0$.

**Задачи**

**7.57.** Найдите производную 6-го порядка от функции $y = x^6 + 7x^3 - 5x + 3$.

**7.58.** Найдите производную 2-го порядка от функции $y = \sin^2 x$.

**7.59.** Найдите производную 5-го порядка от функции $y = \sin 2x$.

**7.60.** Найдите производную 4-го порядка от функции $y = e^{3x} - x^4$.

**7.61.** Найдите производную 20-го порядка от функции $y = \cos x$.

**Теорема 7.4 (правило Лопиталя).** *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если этот предел существует (конечный или бесконечный).*

Другими словами,

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если $\lim\limits_{x\to b} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to b} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\infty$.

Эта теорема позволяет упростить процедуру раскрытия неопределенностей типа

$$\left(\frac{0}{0}\right) \text{ или } \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

если это возможно.

**Пример 7.1.** Вычислить пределы:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x};\quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x};\quad 3)\ \lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2};\quad 4)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

*Решение.* 1) Если под знаком предела подставить предельное значение $x = 0$, то получим неопределенность, а применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{1}=4.$$

2) В данном примере неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ тоже может быть раскрыта с помощью правила Лопиталя. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2},$$

так как неопределенность сохранилась, то возможно применить правило еще раз. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x(\ln 2)^2}=0.$$

3) Подставляя предельное значение $x = 8$ в выражение, стоящее под знаком предела, получим неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8}\frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to 8} 3\sqrt[3]{x^2} = 12.$$

4) Это задание существенно отличается от предыдущих тем, что при подстановке предельного значения $x=0$ в выражение, стоящее под знаком предела, в итоге получается неопределенность $(1^\infty)$. Для приведения этой неопределенности к необходимому виду вместо предложенного предела вычислим предел логарифма от этой функции, получим

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Для раскрытия такой неопределенности правило Лопиталя применимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

При вычислении предела использован первый замечательный предел.

В результате получили, что

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2},$$

тогда предел функции, стоящей под знаком логарифма, должен быть равным

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=1/\sqrt{e}.$$

Рассмотрим примеры, когда правило Лопиталя «не работает».

**Пример 7.2.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x-2}}{\sqrt{4x+1}}.$$

*Решение*. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x-2}}{\sqrt{4x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{9}{2\sqrt{9x-2}}}{\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}}}=\frac{9}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{9x-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

т.е. применение правила ничего не изменило, просто числитель и знаменатель поменялись местами, а неопределенность сохранилась. Повторное применение правила Лопиталя снова поменяет местами числитель и знаменатель, а неопределенность сохранится.

Если же воспользоваться «классическим» правилом раскрытия неопределенности такого вида, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x-2}}{\sqrt{4x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{9-\dfrac{2}{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}}=\frac{3}{2}.$$

## Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

## Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

## § 54. Производная второго порядка

**1. Определение производной второго порядка.** Если существует производная от производной $y'$ функции $y = f(x)$, то она называется ***второй производной***, или производной второго порядка, т. е.

$$y'' = (f'(x))' = f''(x).$$

Для второй производной употребляются следующие обозначения: $y''$, $y''_x$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

**Пример 5.16**

Найти вторую производную функции $y = x^3$.

*Решение*

Находим первую производную: $y' = (x^3)' = 3x^2$. Полагая первую производную функцией, вычисляем вторую производную: $(y')' = (3x^2)' = 6x$, $y'' = 6x$.

**2. Физический смысл второй производной.** Пусть точка движется прямолинейно по закону $S = f(t)$; здесь $S$ — путь, пройденный точкой за время $t$. Скорость движения точки, как было установлено в § 49, есть производная пути по времени $v = S' = f'(t)$.

Если точка движется неравномерно, то скорость за промежуток времени $\Delta t$ получит приращение $\Delta v$. Отношение $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ показывает изменение скорости в единицу времени; оно называется ***средним ускорением*** за промежуток времени от $t$ до $t + \Delta t$.

Если приращение $\Delta t \to 0$, то $t + \Delta t \to t$, а среднее ускорение $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ будет стремиться к ускорению $a$ в данный момент времени $t$, т. е.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = S''.$$

Следовательно, ускорение $a$ прямолинейного движения точки в данный момент времени равно второй производной пути по времени.

**Пример 5.17**

Точка движется прямолинейно по закону $S = 3t^2 - 2t + 4$. Вычислить скорость и ускорение точки в момент времени $t_0 = 6$ с.

*Решение*

Имеем: $v = S' = (3t^2 - 2t + 4)' = 6t - 2$.

При $t = t_0$ $v_0 = 6 \cdot 6 - 2 = 34$ (с).

Ускорение $a$ равно $a = S'' = (6t - 2)' = 6$.

Ускорение является постоянной величиной при любом значении времени $t$, т. е. движение точки происходит с постоянным ускорением.

## Вопросы для повторения

1. Что называется производной второго порядка?
2. Что называется средним ускорением?
3. Что называется ускорением прямолинейного движения тонки?
4. Как по закону движения точки $S = f(t)$ находится ускорение точки?

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

## § 55. Возрастание и убывание функций

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной: если на некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция на этом промежутке возрастает; если же $f'(x) < 0$, то функция на этом промежутке убывает.

На промежутке возрастания функции $y = f(x)$ касательная к графику функции образует с осью абсцисс острый угол и график функции направлен вверх, т. е. $f'(x_2) = k_2 = \operatorname{tg}\alpha > 0$, $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 6.1), а в промежутке убывания функции касательная к графику образует тупой угол и график функции направлен вниз, т. е. $f'(x_1) = k_2 = \operatorname{tg}\beta < 0$, $\pi/2 < \beta < \pi$.

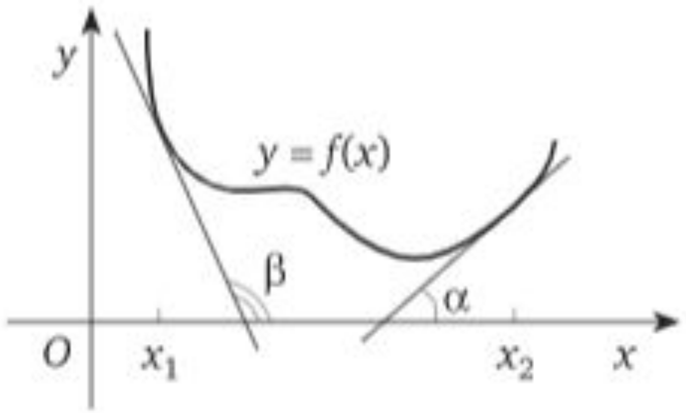



Рис. 6.1

## Пример 6.1

Найти промежутки возрастания и убывания функции: 1) $f(x) = x^2 - 8x + 13$; 2) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 4$; 3) $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 4) $\psi(x) = \ln x$.

*Решение*

1) Производная $f'(x) = 2x - 8$; она принимает значение, равное нулю ($f'(x) = 0$), при $x = 4$. Вычислив значения $f'(x)$ для любого значения $x > 4$ (например, $f'(5) = 2$), заключаем, что на этом интервале производная $f'(x) > 0$, следовательно, функция $f(x)$ на этом интервале возрастает, и наоборот, $f(1) = -6$, при $x < 4$ производная $f'(x) < 0$, следовательно, на этом интервале функция $f(x)$ убывает (рис. 6.2).

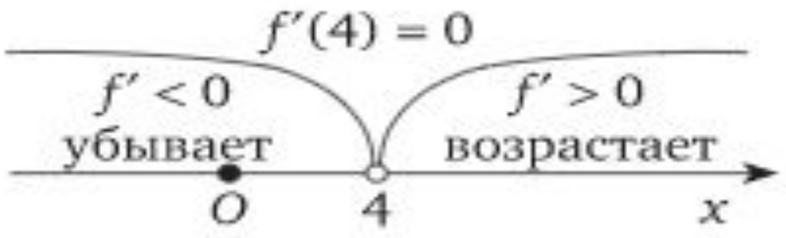



*Рис. 6.2*

2) $F'(x) = 3x^2 - 12x$; корни производной $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Вычислив значения производной на отдельных интервалах, делаем относительно поведения функции заключение, проиллюстрированное рис. 6.3.


*Рис. 6.3*

3) Областью определения функции $\varphi(x)$ является вся числовая прямая кроме точки $x = 0$. Производная $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Производная $\varphi'(x) < 0$ при всех значениях $x$ из области определения функции, следовательно, функция убывает на интервалах $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; +\infty)$.

4) Область определения функции $y(x)$ — интервал $x \in (0; \infty)$. Производная $\psi'(x) = \dfrac{1}{x}$ на этом интервале всегда положительна.

Следовательно, функция $\psi(x)$ является возрастающей на всей области определения.

## Вопросы для повторения

1. Какие функции называются возрастающими и убывающими?
2. Объясните, как применяется производная для нахождения промежутков возрастания и убывания функции.
3. Сформулируйте практическое правило исследования функции на возрастание и убывание.

# § 56. Исследование функций на максимум и минимум

**1. Понятие о максимуме и минимуме функции.** Сформулируем правило определения тех значений аргумента, которые отделяют участки возрастания функции от участков убывания и наоборот.

Рассмотрим графики функций $f(x)$ (рис. 6.4) и $\varphi(x)$ (рис. 6.5). Если слева от некоторого допустимого значения $x = x_0$ функция $y = f(x)$ возрастает, а справа убывает, то значение $x = x_0$ называется ***точкой максимума*** данной функции, т. е. функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет максимум. Если слева от точки $x = x_0$ функция $y = \varphi(x)$ убывает, а справа — возрастает, то значение $x = x_0$ называется ***точкой минимума*** данной функции, т. е. функция $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$ имеет минимум.

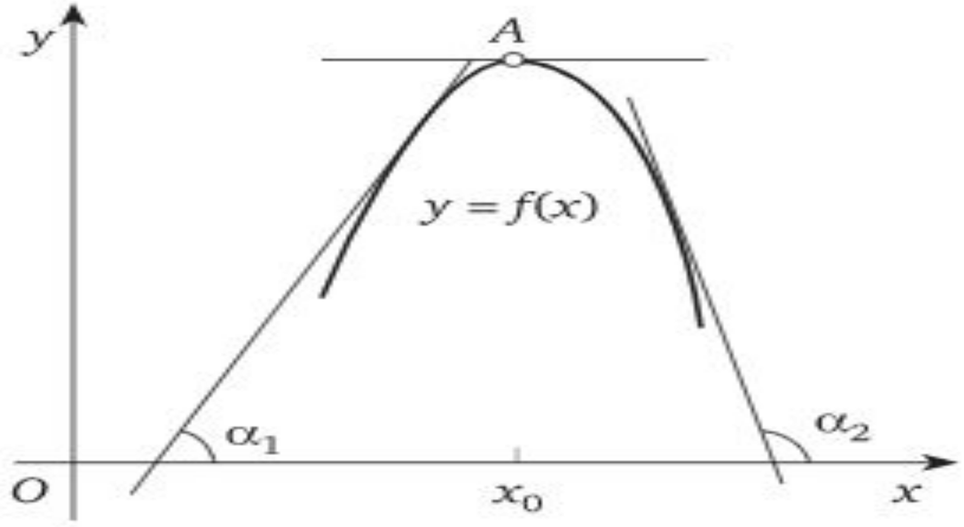



*Рис. 6.4*

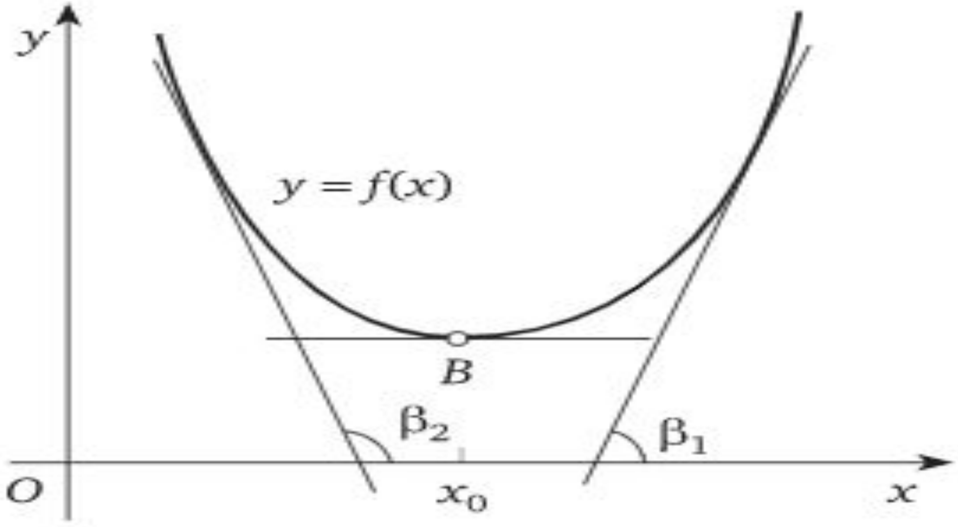



*Рис. 6.5*

Точка максимума служит границей перехода функции от возрастания к убыванию, а точка минимума — границей перехода функции от убывания к возрастанию.

Необходимо отметить, что функция может иметь либо только один максимум (например, функция $y = -x^2$) или только один минимум (например, функция $y = x^2$), либо множество максимумов и минимумов (например, $y = \sin x$), либо не иметь ни максимума, ни минимума (например, $y = \operatorname{tg} x$).

---

Точка $x_0$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка $x_0$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки минимума и точки максимума называются ***точками экстремума***.

**2. Признаки максимума и минимума функции.** Пусть на графике рис. 6.4 точка $A$ соответствует максимуму функции $y = f(x)$ при $x = x_0$. В точках, расположенных левее точки $A$, касательные образуют острые углы с положительным направлением оси $Ox$. Тангенсы этих углов положительны; следовательно, и производные в этих точках положительны, т. е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha_1$; $f'(x) > 0$ при $x < x_0$.

В точках, лежащих правее точки $A$, касательные образуют тупые углы с положительным направлением оси $Ox$, следовательно, и производные в этих точках отрицательны, т. е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha_2$; $f'(x) < 0$ при $x > x_0$.

Так как производная функции непрерывна, то при переходе производной от положительных значений к отрицательным она пройдет через нуль при $x = x_0$, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются ***стационарными***.

Если при переходе через стационарную точку (такую, в которой производная функции равна нулю) $x_0$ функции $f(x)$ ее производная меняет знак с положительного на отрицательный, т. е. слева от точки $x_0$ значение $f'(x) > 0$, а справа от точки $x_0$ значение $f'(x) < 0$, то точка $x_0$ является точкой максимума функции $f(x)$.

Если $f'(x) = 0$ в некоторой точке, то это значит, что угловой коэффициент касательной к графику функции в соответствующей точке также равен нулю, т. е. касательная в этой точке параллельна оси абсцисс.

Исследуем таким же образом график, изображенный на рис. 6.5. Здесь точка $x_0$ соответствует минимуму функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$. Производные в точках, лежащих правее точки $B$, являются положительными (углы $\beta_2$ острые, тангенсы этих углов положительны), и наоборот, производные в точках, лежащих левее точки $B$, являются отрицательными (углы — тупые, соответствующие тангенсы меньше нуля). Так как производная функции непрерывна, то при переходе производной от отрицательных значений к положительным она обратится в нуль при $x = x_0$.

Если при переходе через стационарную точку $x_0$ функции $f(x)$ ее производная меняет знак с отрицательного на положительный, то точка $x_0$ является точкой минимума функции $f(x)$.

Признаки экстремума функции являются необходимыми и достаточными.

Отметим, что функция может иметь экстремум в точке, в которой эта функция не имеет производной (в качестве примера можно указать функцию $y(x) = |x|$; $f'(0)$ не существует; $x = 0$ — точка минимума функции). Стационарные точки, а также такие, в которых функция не имеет производной, в совокупности называются ***критическими точками*** этой функции.

Существуют функции, в которых первая производная, обращаясь в нуль при $x = x_0$, не меняет знака при переходе аргумента через $x_0$. В таком случае функция в этой точке не имеет экстремума. Пример подобной функции $y = y(x)$ приведен на графике рис. 6.6. Таким образом, обращение первой производной в нуль является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

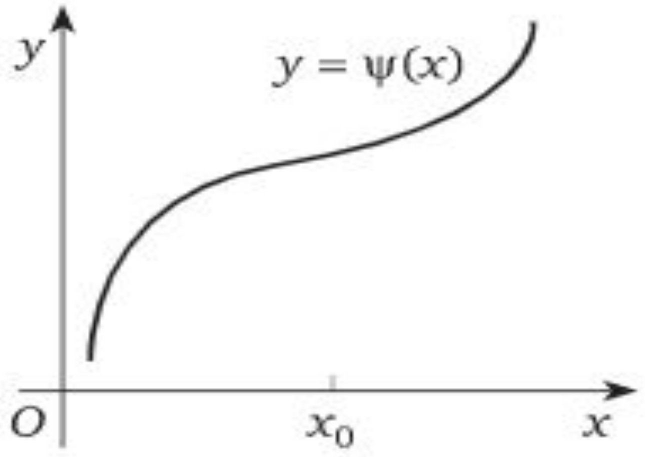



*Рис. 6.6*

**3. Практические правила исследования функции на максимум и минимум с помощью первой производной.** Необходимо придерживаться следующего *алгоритма*:

I. Найти производную $f'(x)$ функции $f(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка $x = x_0$ есть точка минимума, если производная меняет знак при переходе через $x = x_0$. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой $x = x_0$, знак производной не меняется, то в точке $x = x_0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

IV. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

## Пример 6.2

Исследовать на экстремум функции: 1) $f(x) = x^2 - 4x$; 2) $\varphi(x) = -x^2 + 5x - 6$; 3) $\psi(x) = x^3 - 3x^2$.

*Решение*

1) Находим $f'(x) = 2x - 4$. Полагая $f'(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$. В этой точке $f(2) = -4$. Слева от точки $x = 2$ производная $f'(x)$ имеет отрицательные значения, справа — положительные. Характер графика $f(x)$ представлен на рис. 6.7.

2) Находим $\varphi'(x) = -2x + 5$. Приравнивая производную к нулю, получаем критическую точку $x = 2{,}5$. В этой точке $\varphi(2{,}5) = 0{,}25$. Слева от критической точки $x = 2{,}5$ производная функции $\varphi(x)$ имеет положительные значения, справа — отрицательные. График соответствующей функции представлен на рис. 6.8.

3) Находим $\psi'(x) = 3x^2 - 6x$. Уравнение производной имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. В этих точках $\psi(0) = 0$ и $\psi(2) = -4$. Производная имеет положительные значения слева от точки $x = 0$ и справа от точки $x = 2$ и отрицательные значения между этими точками. График, приведенный на рис. 6.8, характеризует функцию $\psi(x)$.

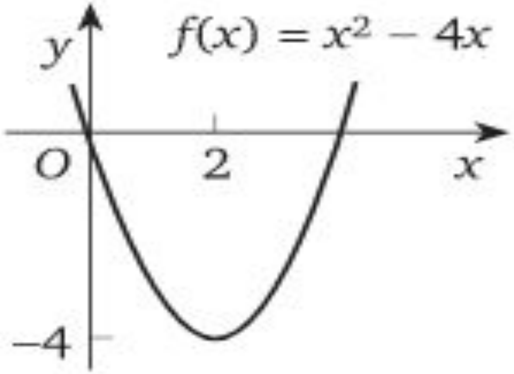



*Рис. 6.6*

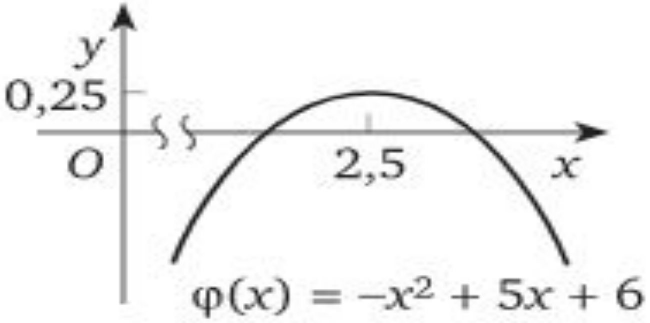



*Рис. 6.7*

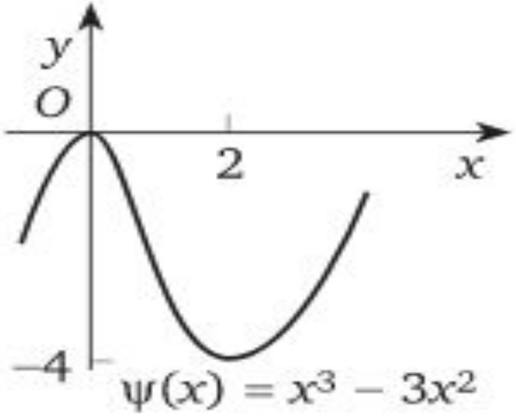



*Рис. 6.8*

**4. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной.** Как уже отмечалось выше, если $f'(x)$ — производная от функции $y = f(x)$, то производная от $f'$ (если она существует) называется второй производной (или производной второго порядка).

**Алгоритм исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью второй производной**

I. Найти производную $f'(x)$.
II. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.
III. Найти вторую производную $f''(x)$.
IV. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то исследование функции нужно произвести с помощью первой производной.
V. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

**Пример 6.3**

Исследовать на экстремум с помощью второй производной функции: 1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$; 2) $\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

*Решение*

1) Находим производную: $f'(x) = 2x - 2$. Из уравнения $f'(x) = 0$ получаем критическую точку $x = 1$. Находим вторую производную: $f''(x) = 2$. Так как вторая производная в критической точке положительна, то при $x = 1$ функция имеет минимум: $f_{\min} = f(1) = -4$.

2) Находим производную: $\varphi'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ и корни производной: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Определим вторую производную: $\varphi''(x) = 6x - 18$. Знаки второй производной в критических точках: $\varphi''(2) = 6 \cdot 2 - 18 < 0$, т. е. при $x = 2$ функция имеет максимум; $\varphi''(4) = 6 \cdot 4 - 18 > 0$, т. е. при $x = 4$ функция имеет минимум. Вычислим значения функции в точках $x_1$ и $x_2$:

$$\varphi_{\max} = \varphi(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 12 = 8;$$

$$\varphi_{\min} = \varphi(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 12 = 4.$$

Итак, функция имеет максимум в точке (2; 8) и минимум в точке (4; 4).

**5. Наименьшее и наибольшее значения функции.** Сформулируем алгоритм определения наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной в некотором промежутке.

I. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках.

II. Найти значения функции на концах промежутка.

III. Сравнить полученные значения: минимальное и максимальное из них являются соответственно минимумом и максимумом функции в рассматриваемом промежутке.

## Пример 6.4

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на отрезке $x \in [0; 3]$.

*Решение*

Имеем: $f'(x) = 2x - 4$; $2x - 4 = 0$, т. е. $x = 2$ — критическая точка. Находим $f(2) = -1$. Вычисляем значения функции на концах промежутка: $f(0) = 3$, $f(3) = 0$. Наименьшее значение функции $f(2) = -1$ и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение $f(0) = 3$ и достигается на левом конце промежутка (рис. 6.9).

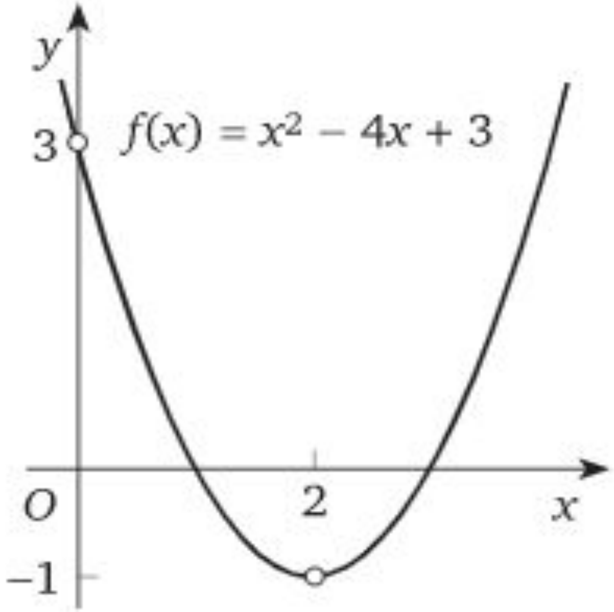



*Рис. 6.9*

## Пример 6.5

Из всех прямоугольников с одинаковым периметром найти тот, у которого площадь наибольшая.

*Решение*

Обозначим периметр прямоугольника через $p$, длину одной из сторон прямоугольника через $x$, тогда длина другой стороны равна $(p-2x)/2 = p/2 - x$. Обозначив площадь прямоугольника через $y$, получим

$$y = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = \frac{p}{2}x - x^2 \left(0 < x < \frac{p}{2}\right).$$

Исследуем функцию на максимум и минимум с помощью второй производной: $y' = p/2 - 2x$; критическая точка $x = p/4$. Вторая производная $y'' = -2$. Вторая производная отрицательна, следовательно, функция имеет максимум при $x = p/4$. Таким образом, из всех прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

## Пример 6.6

Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $S = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8$. Найти максимальную скорость движения тела ($S$ (м), $t$ (с)).

*Решение*

Скорость движения тела — первая производная от пути по времени:

$$v = S' = -3t^2 + 18t - 24.$$

Исследуем функцию $v(t)$ на максимум и минимум с помощью второй производной: $v' = -6t + 18$; критическая точка $t = 3$; $v'' = -6$. Вторая производная отрицательна, следовательно, скорость является наибольшей при $t = 3$. Найдем величину скорости в момент $t = 3$: $v(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 24 = 3$ (м/с).

## Вопросы для повторения

1. Дайте определение максимума и минимума функции.
2. Приведите примеры функций, имеющих один максимум или минимум, множество максимумов и минимумов.
3. Приведите примеры функций, не имеющих ни максимума, ни минимума.
4. Укажите необходимые и достаточные признаки максимума и минимума функции.
5. Укажите признаки существования максимума и минимума функции.
6. В каких случаях функция не имеет ни максимума, ни минимума?
7. Изложите практические правила исследования функции на максимум и минимум с помощью первой производной.
8. Как исследуется функция на максимум и минимум с помощью второй производной?
9. Как находятся наименьшее и наибольшее значения функции?

# § 57. Направление выпуклости графика

Кривая $y = f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** в промежутке $a < x < b$, если она лежит выше касательной к кривой, проведенной в любой точке этого промежутка (рис. 6.10).

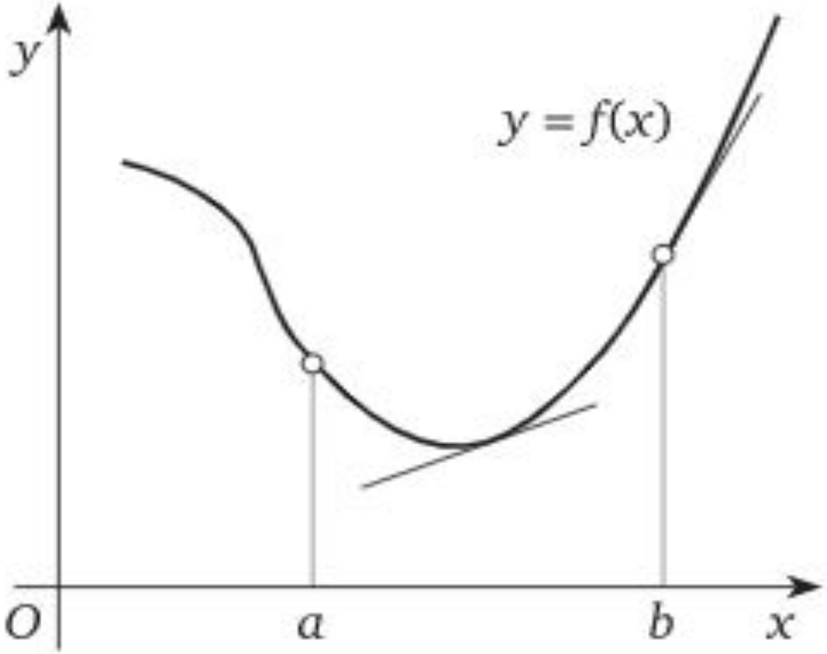



*Рис. 6.10*

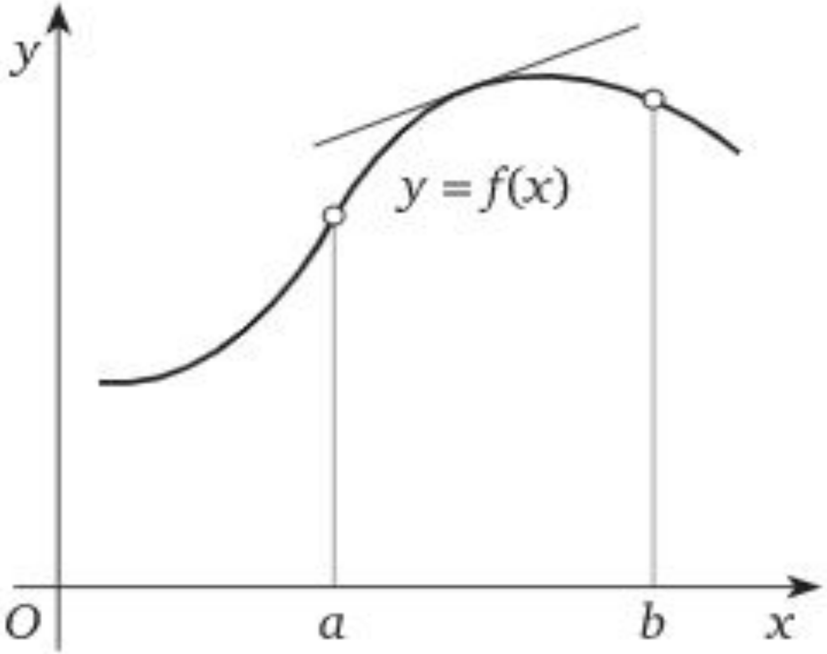



*Рис. 6.11*

Кривая $y = f(x)$ называется ***выпуклой вверх*** в промежутке $a < x < b$, если она лежит ниже касательной к кривой, проведенной в любой точке этого промежутка (рис. 6.11).

Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются ***промежутками выпуклости графика функции***.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком ее второй производной.

Если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз в этом промежутке; если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх в этом промежутке.

**Пример 6.7**

Исследовать на выпуклость кривую $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

*Решение*

Находим первую и вторую производные $f(x)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Подставляя значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$, получим $f''(-2) = \frac{2}{(-2)^3} < 0$, $f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$. Следовательно, в точке $x = -2$ кривая выпукла вверх, а в точке $x = 1$ — выпукла вниз.

## Пример 6.8

Найти промежутки выпуклости кривой: 1) $\varphi(x) = x^3$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x - 4$.

*Решение*

1) Находим $\varphi'(x) = 3x^2$, $\varphi''(x) = 6x$. В промежутке $x \in (-\infty; 0)$ имеем $\varphi''(x) < 0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вверх; в промежутке $x \in (0; +\infty)$ вторая производная $\varphi''(x) > 0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вниз (рис. 6.12).

2) находим $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$. Вычисляем корни второй производной: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. В промежутках $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (1; +\infty)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$, т. е. в этих промежутках кривая выпукла вниз, а в промежутке $x \in (0; 1)$ имеет место неравенство $f''(x) < 0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вверх. Более подробно эта зависимость $f(x)$ будет исследована в примере 6.10.

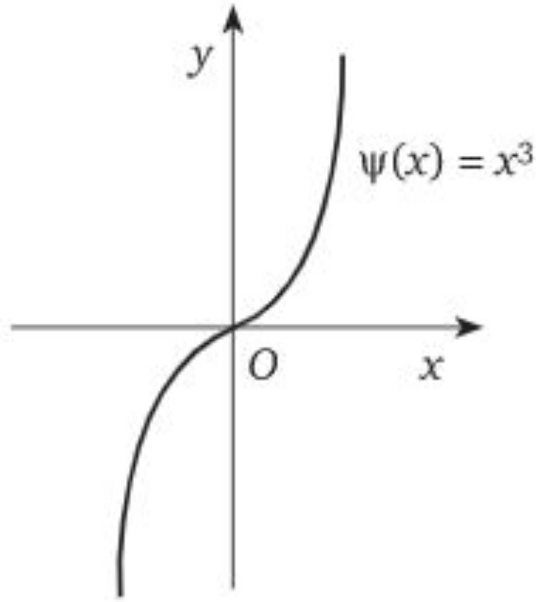



*Рис. 6.12*

## Вопросы для повторения

1. Как определяется выпуклость кривой вверх и вниз?
2. Что понимается под промежутком выпуклости графика функции?
3. Как исследуется функция на направление выпуклости с помощью второй производной?

# § 58. Точки перегиба

Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется ***точкой перегиба***.

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

---

**Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$**

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка $x = x_0$ разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то $x = x_0$ является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

---

## Пример 6.9

Найти точку перегиба кривой: 1) $f(x) = 6x^2 - x^3$; 2) $\varphi(x) = x + \sqrt[3]{x^5} - 2$.

*Решение*

1) Находим $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$. Полагая $f''(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$. Так как в промежутке $-\infty < x < 2$ имеем $f''(x) > 0$, а в промежутке $2 < x < +\infty$ имеем $f''(x) < 0$, то при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба. Находим ординату этой точки: $f(2) = 16$. Итак, точка перегиба имеет координаты (2; 16).

2) находим $\varphi'(x) = (x + x^{5/3} - 2)' = 1 + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, $\varphi''(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Здесь критической является точка $x = 0$, в которой вторая производная терпит разрыв.

Вторая производная $\varphi''(x) < 0$ в промежутке $-\infty < x < 0$ и $\varphi''(x) > 0$ в промежутке $0 < x < +\infty$, т. е. кривая $\varphi(x)$ имеет точку перегиба при $x = 0$; координаты этой точки (0; −2).

## Пример 6.10

Построить график функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, используя предыдущие исследования.

*Решение*

1. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $x \in \mathbb{R}$.
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной и не является периодической.
3. Находим точку пересечения графика с осью $Oy$. при $x = 0$ значение функции $f(0) = -3$. Точки пересечения графика функции с осью $Ox$ найти затруднительно, так как для этого необходимо решить кубическое уравнение $f(x) = 0$.
4. Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Критические точки функции $f(x)$: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Эти точки делят область определения функции на три промежутка: $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$.

В первом и последнем из них $f'(x) > 0$, в промежутке $x \in (1; 3)$ производная $f'(x) < 0$. Следовательно, в промежутках $x \in (-\infty; 1)$, $x \in (3; +\infty)$ функция возрастает, а в промежутке $x \in (1; 3)$ — убывает. При переходе через точку $x_1$ производная меняет знак с «плюса» на «минус», а при переходе через точку $x_2$ — с «минуса» на «плюс». Таким образом, $(1; 1)$ — точка максимума, а $(3; -3)$ — точка минимума.

Находим вторую производную $f''(x) = 6x - 12$; из решения уравнения $f''(x) = 0$ получаем $x = 2$. Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка $x \in (-\infty; 2)$ и $x \in (2; +\infty)$. В первом из них $f'' < 0$, т. е. кривая выпукла вверх, а во втором $f'' > 0$, т. е. кривая выпукла вниз. Получили точку перегиба $(2; -1)$.

По полученным точкам построим приближенный график данной функции (рис. 6.13.).

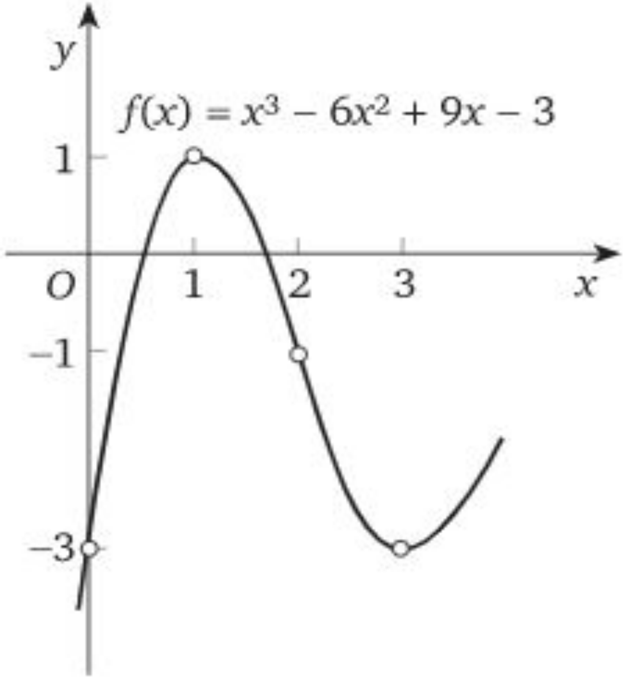



*Рис. 6.13*

## Вопросы для повторения

1. Какие точки графика называются точками перегиба?
2. Как исследуется функция на точки перегиба с помощью второй производной?
3. Сформулируйте правила исследования функции на точки перегиба.
4. Что необходимо знать для построения графика функции?

# ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

## § 59. Сравнение бесконечно малых величин

Приведем примеры сравнения бесконечно малых величин при делении их друг на друга; в этих ситуациях могут представиться различные варианты. Пусть $\alpha$, $\alpha^2$ и $2\alpha$ — бесконечно малые. Тогда возможно:

1) отношение $\alpha^2/\alpha = \alpha$ — бесконечно малая величина;
2) отношение $\alpha/\alpha = 1/\alpha$ — бесконечно большая величина;
3) отношение $2\alpha/\alpha = 2$ — конечная величина;
4) отношение $\alpha/\alpha = 1$.

Первое отношение показывает, что $\alpha^2$ составляет малую часть от $\alpha$, следовательно, стремится к нулю быстрее, чем $\alpha$. Из второго отношения очевидно, что делитель $\alpha$ стремится к нулю быстрее, чем делимое $\alpha$, т. е. при $\alpha \to 0$ величина $1/\alpha \to \infty$, следовательно, является величиной бесконечно большой. Из третьего отношения следует, что бесконечно малые $\alpha$ и $2\alpha$ стремятся к нулю с одинаковой скоростью, поэтому при их изменении отношение $2\alpha/\alpha$ остается постоянным.

Введем следующие определения.

I. Если $\alpha$ и $\beta$ — бесконечно малые величины и $\lim(\alpha/\beta) = 0$, то $\alpha$ называется бесконечно малой ***высшего порядка малости*** по сравнению с $\beta$.

II. Если $\lim(\alpha/\beta) = a$ $(a \neq 0)$, то бесконечно малые $\alpha$ и $\beta$ ***одного порядка малости***.

III. Если $\lim(\alpha/\beta) = \infty$, то $\alpha$ называется бесконечно малой ***низшего порядка малости*** по сравнению с $\beta$.

IV. Если $\lim(\alpha/\beta) = 1$, то бесконечно малые $\alpha$ и $\beta$ называются ***эквивалентными***.

**Пример 7.1**

Сравнить порядки малости следующих величин: 1) $x^2+x^3$ и $x$, если $x\to 0$; 2) $5x+3x^2$ и $x$, если $x\to 0$; 3) $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x\to 0$; 4) $\sqrt{x}$ и $x$ при $x\to 0$.

*Решение*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+x^2)=0$; бесконечно малая $(x^2+x^3)$ имеет высший порядок малости по сравнению с $x$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(5+3x)=5$; бесконечно малые $(5x+3x^2)$ и $x$ одного порядка малости.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin x/\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$; величины $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ одного порядка малости.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$; бесконечно малая $\sqrt{x}$ имеет низший порядок малости по сравнению с $x$.

## Вопросы для повторения

1. Перечислите различные варианты сравнения бесконечно малых величин.
2. Приведите примеры бесконечно малых высшего порядка малости.
3. Приведите примеры бесконечно малых одного порядка малости.
4. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?
5. Когда отношение бесконечно малых стремится к бесконечности?

# § 60. Дифференциал функции

**1. Понятие о дифференциале функции.** Пусть даны функция $y=f(x)$, ее производная $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. По определению предела переменной имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$, где $\alpha$ — бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, следовательно,

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x. \tag{7.1}$$

При уменьшении $\Delta x$ первое слагаемое $y'\Delta x$ уменьшается пропорционально $\Delta x$, второе слагаемое $\alpha\Delta x$ уменьшается быстрее, чем $y'\Delta x$. Сравним их: $\frac{\alpha\Delta x}{y'\Delta x}=\frac{\alpha}{y'}$, т. е. отношение $\frac{\alpha}{y'}$ — бесконечно малая при $y'\neq 0$. Отсюда следует, что $\alpha\Delta x$ — бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с $y'\Delta x$.

В формуле (7.1) первое слагаемое $y'\Delta x$ называется ***главной частью приращения функции*** $y=f(x)$.

Главная часть $y'\Delta x$ приращения функции $y=f(x)$ называется ***дифференциалом функции***. Дифференциал функции $y=f(x)$ обозначается символом $dy$, т. е.

$$dy=y'\Delta x. \tag{7.2}$$

Дифференциал аргумента $y = x$ найдем по формуле (7.2): $dx = x'\Delta x = \Delta x$ или

$$dx = \Delta x, \tag{7.3}$$

т. е. дифференциал аргумента равен приращению аргумента, поэтому равенство (7.2) запишем в виде

$$dy = y'dx. \tag{7.4}$$

Из формулы (7.4) следует возможность нового обозначения производной:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \tag{7.5}$$

т. е. производная функции $y = f(x)$ есть отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Заменив в выражении (7.1) слагаемое $y'\Delta x$ дифференциалом функции $dy$, получим

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{7.6}$$

В выражении (7.6) слагаемое $\alpha\Delta x$ есть величина бесконечно малая высшего порядка малости по отношению к $dy$, поэтому слагаемое $\alpha\Delta x$ можно отбросить, допустив незначительную ошибку, и тем меньшую, чем меньше $\Delta x$.

Получили важное для приближенных вычислений равенство

$$\Delta y \approx dy. \tag{7.6}$$

Для линейной функции $y = kx + b$ значение $\Delta y = dy$.

***Дифференциалом второго порядка*** называется дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2y = f'(x)dx^2. \tag{7.8}$$

## Пример 7.2

Найти дифференциалы первого порядка функции: 1) $y = (x^3 - 2)^4$; 2) $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

*Решение*

По формуле (7.4) имеем:

1) $dy = ((x^3 - 2)^4)'dx = 4(x^3 - 2)^3 \cdot (x^3 - 2)'dx = 4(x^3 - 2)^3 \cdot 3x^2dx = 12x^2(x^3 - 2)^3dx$;

2) $dz = (\sqrt{x^2 - 1})'dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}(x^2 - 1)'dx = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}dx = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

## Пример 7.3

Найти дифференциалы второго порядка функции $y = e^{-x}$.

*Решение*

По формуле (7.8)

$$y' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x};\ y'' = (-e^{-x})'' = -e^{-x}(-x)' = e^{-x};$$

$$d^2y = y''dx^2 = e^{-x}dx^2.$$

**2. Геометрический смысл дифференциала функции.** На рис. 7.1 изображен график функции $y = f(x)$, направленный выпуклостью вниз. На кривой отмечены точки $M$ и $N$ с координатами $(x; y)$ и $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ соответственно. В точке $M$ к кривой проведена касательная, которая пересекает ось абсцисс под углом $\alpha$. Обозначим через $P_1$ проекцию точки $N$ на ось $Ox$, через $P$ — проекцию точки $M$ на вертикаль, опущенную из точки $N$ на ось $Ox$, и через $T$ — точку пересечения касательной с этой вертикалью. Тогда

$$P_1N = y + \Delta y = f(x + \Delta x),\ PN = \Delta y.$$

Угловой коэффициент $k$ касательной равен производной функции $f(x)$, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha = y' = f'(x)$.

Из треугольника $MPT$ имеем: $PT = \operatorname{tg}\alpha \cdot MP$; по формуле (7.3) $\Delta x = dx$, т. е. $MP = dx$, следовательно, учитывая формулу (7.4), получаем

$$PT = y'dx = dy.$$

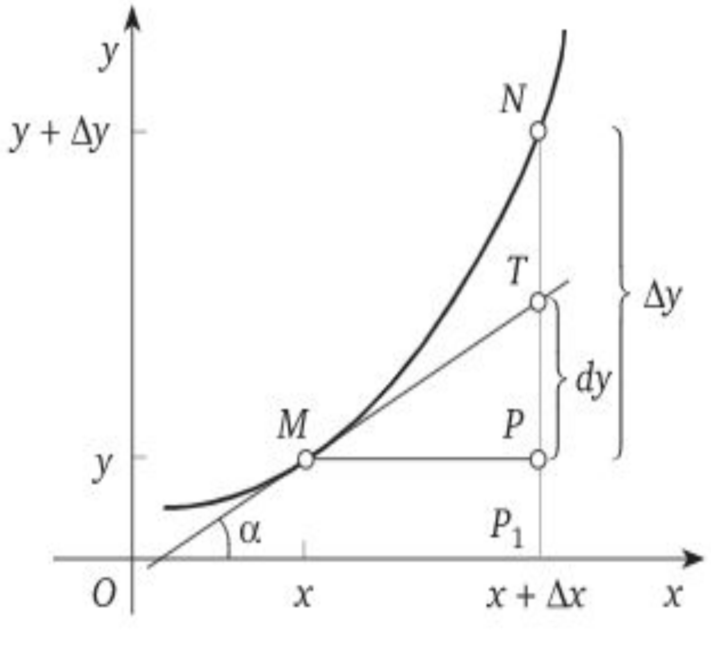


Рис. 7.1

Дифференциал $dy$ функции $y = f(x)$ представляет собой приращение ординаты касательной, проведенной в данной точке кривой.

Найдите дифференциал функции.

**7.83.** $y = \sin 2x - x^2$.

**7.84.** $y = x^3 + \ln 5x$.

**7.85.** $y = \sin^2 9x$.

**7.86.** $y = x^5 - 3x^4 + 2x$.

**7.87.** $y = \sqrt{1 + x^3}$.

**7.88.** $y = \ln \sin x$.

**7.89.** $y = x \ln x - x$.

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 62. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства

**1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл.** Одной из главных задач дифференциального исчисления является задача нахождения скорости изменения какой-либо функции, т. е. задача нахождения производной (или дифференциала). На практике часто приходится решать обратную задачу: зная скорость изменения функции, найти эту функцию; эта операция называется интегрированием. Это означает, что необходимо найти функцию $F(x)$ по одному из выражений $dF(x) = f(x)dx$ или $F'(x) = f(x)$, где $f(x)$ — известная функция.

Искомая функция $F(x)$ называется первообразной функцией по отношению к функции $f(x)$.

---

***Первообразной функцией*** для данной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ (или, что то же самое, дифференциал которой равен $f(x)dx$).

---

Например, первообразной функцией для функции $3x^2$ является $x^3$, ибо $(x^3)' = 3x^2$. Но эта первообразная не единственная, а только одна из многих, так как функции $x^3 - 3$, $x^3 + 2$ и вообще $x^3 + C$, где $C$ — произвольная постоянная, тоже являются первообразными для $f(x) = 3x^2$, ибо $(x^3 + C)' = 3x^2$.

Действительно, если на некотором промежутке функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то для этой последней будет первообразной и любая функция вида

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{8.1}$$

где $C$ — постоянная.

Покажем, что этим выражением исчерпывается все множество первообразных, т. е. что любую первообразную для $f(x)$ можно получить из равенства (8.1) при некотором значении $C$.

Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две функции, являющиеся первообразными для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда на этом промежутке

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

из чего следует, что $\Phi(x) - F(x) = C$ и поэтому $\Phi(x) = F(x) + C$.

Обращаясь к геометрической интерпретации только что доказанного утверждения, можно сказать, что графики всех первообразных для данной функции $f(x)$ представляют собой семейство таких кривых, которые могут быть получены из любой из них путем ее сдвига вдоль оси ординат (рис. 8.1).

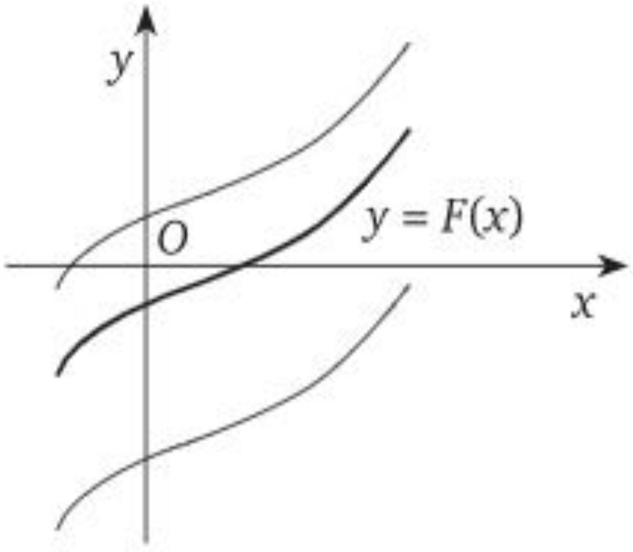



*Рис. 8.1*

---

Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функция для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где $C$ — произвольная постоянная, называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

---

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, знак $\int$ — *знаком интеграла.*

Согласно определению неопределенного интеграла, можно записать

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{8.2}$$

Операция нахождения первообразной по данной функции называется ***интегрированием***[1].

**Пример 8.1**

Найти: 1) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{x}$.

*Решение*. 1) Находим функцию, производная которой равна $\frac{1}{\cos^2 x}$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следовательно, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

2) Находим функцию, производная которой равна $\frac{1}{x}$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, где $x \in$ $\in (0; +\infty)$. Следовательно, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Заметим, что $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, следовательно, $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, где $-\infty < x < 0$ или $0 < x < +\infty$.

## 2. Основные свойства неопределенного интеграла.

I. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \qquad (8.3)$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx. \qquad (8.4)$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения неопределенного интеграла.

II. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (8.5)$$

Для доказательства воспользуемся определением неопределенного интеграла: $\int f(x)dx = F(x) + C$, но $dF(x) = f(x)dx$, $f(x) = F'(x)$, следовательно, $\int dF(x) = F(x) + C$.

III. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \qquad (8.6)$$

Докажем формулу (8.6): $\left(\int af(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x)$, из чего следует формула (8.6).

IV. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int (f_1(x) - f_2(x) + f_3(x))dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx. \qquad (8.7)$$

По формуле (8.3) имеем $\left(\int (f_1(x) - f_2(x) + f_3(x))dx\right)' = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)$, из чего и следует формула (8.7).

**3. Табличные неопределенные интегралы.** Принимая во внимание, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, получим табличные интегралы с помощью таблицы производных.

Приведем таблицу первообразных (постоянная $C$ везде опущена и подразумевается).

**Таблица неопределенных интегралов**

I. $\int dx = x$. II. $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$ $(n \neq -1)$. III. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$.

IV. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln|a+bx|$. V. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$. VI. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$.

VII. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3$. VIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$. IX. $\int e^x dx = e^x$.

X. $\int \ln x\,dx = x \ln x - x$. XI. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$. XII. $\int \cos x\,dx = \sin x$.

XIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x$. XIV. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$. XV. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$.

**Таблица основных интегралов**

1. $\int u^\alpha\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u\,du = e^u + C;$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C\right);$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C\right);$

7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \left(\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \left(\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$

11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$

16. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \dfrac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \dfrac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

В задачах 8.1—8.12 найдите неопределенные интегралы.

**8.1.** $\int (5x^4 - 6x^2 + 1)\,dx.$

**8.2.** $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) dx.$

**8.3.** $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2\sqrt{x}}\,dx.$

**8.4.** $\int \frac{2x^6+1}{x^3}\,dx.$

**8.5.** $\int \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$

**8.6.** $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

**8.7.** $\int e^x\left(1 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x}\right) dx.$

**8.8.** $\int \frac{(x-5)^2}{x^2}\,dx.$

**8.9.** $\int \left(10x^4 + 2\sqrt{x} - \frac{6}{x^2}\right) dx.$

**8.10.** $\int \left(\frac{4}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 10\right) dx.$

**8.11.** $\int (6x^2 + 3\sqrt{x} - 8)\,dx.$

**8.12.** $\int \frac{2+5\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x}\,dx.$

# § 63. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием принято называть вычисление неопределенных интегралов путем приведения их к табличным с применением основных свойств.

Отметим, что если операция дифференцирования совершается формально, то далеко не так обстоит дело с интегрированием — например, нет формул для интегрирования произведения или частного функций. Поэтому существуют обширные таблицы интегралов (приведенная выше является весьма неполной) и возникает задача — так преобразовывать вычисляемые интегралы, чтобы их можно было свести к табличным.

Один из приемов, используемых при вычислении интегралов, называется ***методом замены переменных***. Он заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из табличных формул интегрирования.

## Пример 8.2

Вычислить методом замены переменных интегралы:

1) $\int \operatorname{tg} x dx$; 2) $\int \sin(ax+b)dx$; 3) $\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$.

*Решение*

1) Так как $\sin x dx = -d(\cos x)$, то

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

2) Так как $d(ax+b) = adx$, то $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$. Следовательно,

$$\int \sin(ax+b)dx = \int \sin(ax+b)\frac{1}{a}d(ax+b) = \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)d(ax+b) =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$

3) Так как $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+1)$, то

$$\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x^2+1) + C.$$

## Пример 8.3

Найти интегралы методом замены переменной: 1) $I_1 = \int (2x^3+1)^4 x^2 dx$;

2) $I_2 = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$.

*Решение*

1) Положим $2x^3 + 1 = u \Rightarrow 6x^2dx = du \Rightarrow x^2dx = (1/6)du$. Таким образом,

$$I_1 = \frac{1}{6}\int u^4 du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{30}u^5 + C = \frac{1}{30}(2x^3+1)^5 + C.$$

2) Положим $x^2 + 1 = u \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow xdx = (1/2)du$. Находим

$$I_2 = \int (x^2+1)^{-3} dxu = \frac{1}{2}\int u^{-3} du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C.$$

**Пример 8.4**

Методом замены переменной найти интегралы:

1) $I_1 = \int \mathrm{tg}(kx)dx$; 2) $I_2 = \int \frac{du}{\sin u}$; 3) $I_3 = \int \frac{du}{\cos u}$.

*Решение*

1) Имеем $I_1 = \int \frac{\sin(kx)}{\cos(kx)}dx$. Положим $\cos(kx) = u \Rightarrow -k\sin(kx)dx = du \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin(kx)dx = -(1/k)du$. Следовательно,

$$I_1 = -\frac{1}{k}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{k}\ln|u| + C = -\frac{1}{k}\ln|\cos(kx)| + C.$$

2) Так как $\sin u = 2\sin(u/2)\cos(u/2)$, то

$$I_2 = \int \frac{du}{2\sin(u/2)\cos(u/2)}.$$

Разделив и умножив знаменатель на $\cos(u/2)$, получим

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\operatorname{tg}(u/2)\cos^2(u/2)}.$$

Положим $\operatorname{tg}(u/2) = z$; тогда $\frac{1}{\cos^2(u/2)} \cdot \frac{1}{2} du = dz \Rightarrow \frac{du}{\cos^2(u/2)} = 2dz$. Таким образом,

$$I_2 = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$$

3) Имеем $I_3 = \int \frac{du}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)}$. Положим $\frac{\pi}{2} + u = z \Rightarrow du = dz$. Поэтому

$$I_3 = \int \frac{dz}{\sin z} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi/2 + u}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C.$$

## Пример 8.5

Найти интегралы методом замены переменных:

1) $I_1 = \int 3^{5x^2} x dx$; 2) $I_2 = \int e^{-3x^2+1} x dx$; 3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(a > 0)$.

*Решение*

1) Положим $5x^2 = u \Rightarrow 10xdx = du \Rightarrow xdx = (1/10)du$. Таким образом,

$$I_1 = \frac{1}{10}\int 3^u du = \frac{1}{10}\frac{3^u}{\ln 3} + C = \frac{3^{5x^3}}{10\ln 3} + C.$$

2) Положим $-3x^2 + 1 = u \Rightarrow -6xdx = du \Rightarrow xdx = -(1/6)du$. Таким образом,

$$I_2 = -\frac{1}{6}\int e^u du = -\frac{1}{6}e^u + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2+1} + C.$$

3) Имеем $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2[1-(x/a)^2]}}$. Положим $x/a = u \Rightarrow dx = du$. Таким образом,

$$I_3 = \frac{1}{a}\int \frac{adu}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

При помощи подстановок $ax + b = u$ и $\frac{m}{k}x = u$ нетрудно вычислить следующие интегралы (постоянная $C$ везде опущена и подразумевается):

I. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$.

II. $\int g^{ax+b}dx = \frac{1}{a\ln g}g^{ax+b}$.

III. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$.

IV. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$.

V. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)$.

VI. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}(ax+b)$.

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - m^2x^2}} = \frac{1}{m}\arcsin\frac{m}{k}x$ $(m > 0)$.

Отыскание функции по заданной производной или по дифференциалу — задача неопределенная, так как $f(x)dx$ означает множество первообразных функций вида $y = F(x) + C$, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым $C$; величина $C$ может принимать любые числовые значения, если на первообразную функцию не наложено никаких начальных условий. Чтобы из множества первообразных функций выделить одну определенную функцию, должны быть заданы начальные условия. Под начальными условиями понимается задание частных значений $x$ и $y$ для первообразной функции $y = F(x) + C$, по которым находится определенное значение $C$, удовлетворяющее этим начальным условиям.

## Пример 8.6

Найти функцию, производная которой $y' = 2x - 3$, если при $x = 2$ эта функция принимает значение, равное 6.

*Решение*

Имеем $y' = 2x - 3$, или $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$, т. е. $dy = (2x - 3)dx$.

Интегрируя обе части последнего равенства, находим значение

$$\int dy = \int (2x - 3)dx;\ C_1 + y = x^2 - 3x + C_2.$$

Полагая $C_2 - C_1 = C$, получим $y = x^2 - 3x + C$. Нашли общее выражение функций, имеющих своей производной $y' = 2x - 3$.

Вычислим $C$ при заданных значениях $x = 2$ и $y = 6$. Подставив в выражение для функции эти значения, получим $6 = 2^2 - 3 \cdot 2 + C$, откуда $C = 8$. Таким образом, функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям, имеет вид $y = x^2 - 3x + 8$.

## Задачи

В задачах 8.13—8.36 найдите интегралы.

8.13. $\int (\sin 8x + e^{3x})\, dx.$

8.14. $\int \frac{dx}{5x+3}.$

8.15. $\int (e^{2x} + e^{-2x})\, dx.$

8.16. $\int \operatorname{tg} x\, dx.$

8.17. $\int \sin^5 x \cos x\, dx.$

8.18. $\int \frac{x^3}{5-x^4}\, dx.$

8.19. $\int x e^{x^2}\, dx.$

8.20. $\int \frac{\cos x}{2\sin x + 1}\, dx.$

8.21. $\int \frac{\ln x + 3}{x}\, dx.$

8.22. $\int \operatorname{tg} 5x\, dx.$

8.23. $\int e^{\cos x} \sin x\, dx.$

8.24. $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

8.25. $\int \frac{x}{x+3}\, dx.$

8.26. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$

8.27. $\int \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx.$

8.28. $\int \frac{2\ln x}{x}\, dx.$

8.29. $\int (5+2x)^{11}\, dx.$

8.30. $\int \frac{e^{3x}}{7+2e^{3x}}\, dx.$

8.31. $\int \frac{x}{2-x^2}\, dx.$

8.32. $\int \operatorname{ctg} 3x\, dx.$

8.33. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 3)}.$

8.34. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}\, dx.$

8.35. $\int x^3 e^{x^4}\, dx.$

8.36. $\int x(x^2+7)^5\, dx.$

## § 64. Геометрические приложения неопределенного интеграла

Рассмотрим случаи использования неопределенного интеграла при построении графика функции.

**Пример 8.7**

Найти уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $2x$.

*Решение*

Согласно условию угловой коэффициент $k = 2x$. Известно, что $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$; следовательно, $\frac{dy}{dx} = 2x$, т. е. $dy = 2xdx$. Интегрируя, получим $\int dy = \int 2xdx$; $y = x^2 + C$.

Найдено семейство кривых, для которых угловой коэффициент касательной в любой точке равен $2x$. Эти кривые отличаются друг от друга на постоянную $C$. При $C = 0$ получим параболу $y = x^2$ с вершиной в начале координат (рис. 8.2), при $C = 1$ — параболу $y = x^2 + 1$ с вершиной в точке (0; 1), при $C = -2$ — параболу $y = x^2 - 2$ с вершиной в точке (0; −2) и т. д.

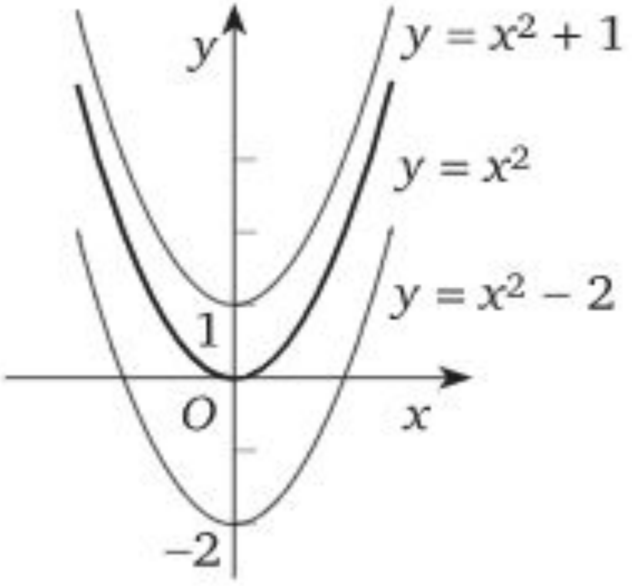



Рис. 8.2

## Пример 8.8

Составить уравнение линии, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания равен $y/x$.

*Решение*. Согласно условию угловой коэффициент $k = \frac{y}{x}$; так как $k = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, из чего, разделив переменные, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}; \ln y = \ln x + C.$$

Произвольную постоянную полагаем для удобства равной $\ln C$.

Потенцируя, получим $y = Cx$ — уравнение семейств прямых, проходящих через начало координат.

**Пример 8.9**

Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 1), у которой касательная в любой точке кривой имеет угловой коэффициент, равный ординате точки касания.

*Решение*. Согласно условию имеем угловой коэффициент $k = \frac{dy}{dx} = y$, т. е. $\frac{dy}{y} = dx$. Интегрируя, получим

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx; \ln y = x + C.$$

Из начальных условий находим $\ln 1 = 0 + C$, т. е. $C = 0$; следовательно, $y = e^x$.

# § 65. Физические приложения неопределенного интеграла

Рассмотрим несколько ситуаций, когда при решении задач кинематики используются неопределенные интегралы.

**Пример 8.10**

Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 4$. Найти закон ее движения, если за время $t = 2$ с точка прошла 20 м.

*Решение*

Обозначим путь, пройденный точкой за время $t$, через $S$. Так как $v = \frac{dS}{dt} = 3t^2 + 4$, то $dS = (3t^2 + 4)dt$. Интегрируя, получим

$$\int dS = \int (3t^2 + 4)dt;\ S = t^3 + 4t + C.$$

Используя начальные условия, найдем $20 = 2^3 + 4 \cdot 2 + C$, т. е. $C = 4$. Итак, закон движения точки имеет вид $S = t^3 + 4t + 4$.

## Пример 8.11

Найти закон движения свободно падающего тела при постоянном ускорении $g$, если в начальный момент движения тело находилось в покое.

*Решение*

Известно, что ускорение $a$ прямолинейно движущегося тела есть вторая производная пути $S$ по времени $t$ или производная от скорости $v$ по времени $t$, т. е. $a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Так как $a = g$, то $\frac{dv}{dt} = g \Rightarrow du = gdt$. Интегрируя, получим

$$\int dv = \int gdt;\ v = gt + C_1.$$

Используя начальные условия ($u = 0$ при $t = 0$), имеем $0 = g \cdot 0 + C_1$ т. е. $C_1 = 0$. Таким образом, скорость движения тела изменяется по закону $v = gt$.

Найдем теперь закон движения тела. Так как $v = \frac{dS}{dt}$, то $\frac{dS}{dt} = gt$, или $dS = gtdt$. Интегрируя, получим

$$\int dS = \int gtdt;\ S = \frac{gt^2}{2} + C_2.$$

Используя начальные условия ($S = 0$ при $t = 0$), имеем $0 = g \cdot 0^2/2 + C_2$, $C_2 = 0$. Итак, закон движения падающего тела имеет вид $S = \frac{gt^2}{2}$.

# Вопросы для повторения

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какая функция называется первообразной для данной функции $f(x)$?
3. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. Дайте определение подынтегральной функции и подынтегрального выражения.
6. Какой геометрический образ соответствует неопределенному интегралу $\int f(x)dx$?
7. Как проверяется результат интегрирования?
8. При каком условии справедливо равенство $\int f(x)dx = F(x) + C$?
9. Чему равны производная и дифференциал неопределенного интеграла?
10. Чему равен неопределенный интеграл от дифференциала функции $F(x)$?
11. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
12. Укажите ограничения на параметр $n$ для табличного интеграла $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; (x > 0)$.
13. Выпишите формулу для интеграла $\int x^n dx$ при $n = -1$.
14. В чем заключается метод замены переменных при отыскании неопределенного интеграла?

# 1. Составьте таблицу неопределенных интегралов.

Авторство вопроса: Борзилов Владимир Анатольевич

Соедините элементы попарно (неверно соединенную пару можно разбить, щелкнув на крестик)

| | |
|---|---|
| $\int \cos x\,dx$ | $\sin x + C$ |
| $\int a^x dx$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $\int \sin x\,dx$ | $-\cos x + C$ |
| $\int \ln x\,dx$ | $x \ln x - x + C$ |
| $\int dx$ | $x + C$ |

211

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x + C$ |
| $\int x^n dx$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$ |
| $\int \sqrt{a + bx}dx$ | $\frac{2}{3b}(\sqrt{a + bx})^3 + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x + C$ |
| $\int \frac{1}{a + bx}dx$ | $\frac{1}{b}\ln\lvert a + bx\rvert + C$ |
| $\int \frac{dx}{1 + x^2}$ | $\operatorname{arctg} x + C$ |

2. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?

Авторство вопроса: Борзилов Владимир Анатольевич

Выберите один правильный ответ

- Разность двух первообразных есть величина постоянная
- Первообразные отличаются знаком
- Ничем не отличаются, первообразная для данной функции всегда одна
- Частное двух первообразных есть величина постоянная

3. Как проверяется результат интегрирования?

Авторство вопроса: Борзилов Владимир Анатольевич

Выберите один правильный ответ

- вычитанием
- дифференцированием
- суммированием
- повторным интегрированием

4. Вычислите неопределенный интеграл $\int \operatorname{tg} x \, dx$ методом замены переменной.

Авторство вопроса: Борзилов Владимир Анатольевич

Выберите один правильный ответ

- $-\ln|\cos x| + C$
- $\dfrac{1}{\cos^2 x} + C$
- $-\dfrac{1}{\sin^2 x} + C$
- $\ln|\sin x| + C$

**Таблица основных интегралов**

1. $\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u\,du = e^u + C;$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C\right);$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C\right);$

7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C;$

15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

*Пример 29.2.* Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x}\,dx$.

○ Решение: $\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = x + \ln|x| + C$.

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула 2 таблицы интегралов);

2) $\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$ (формула 1);

3) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$ (формулы 10 и 1);

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$

5) $\int \sin^2 6x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 12x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,d(12x)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$ (формулы 1 и 6);

6) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$;

7) $\int \operatorname{tg} u\,du = \int \frac{\sin u\,du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ (вывод формулы 7);

8) $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du +$
$+ \int \frac{\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) + \int \operatorname{tg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\sin\frac{u}{2}\right| -$
$-\ln\left|\cos\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$ (вывод формулы 11);

9) $\int x(x+2)^9\,dx = \int (x+2-2)(x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,dx -$
$-2\int (x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,d(x+2) - 2\int (x+2)^9\,d(x+2) =$
$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2\frac{(x+2)^{10}}{10} + C$ (формула 1);

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x \cdot \sin^2 x} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-5}\,d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^{-4} x}{-4} + C =$
$= \frac{1}{4\operatorname{ctg}^4 x} + C$ (формула 1);

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(x-1)^2}} =$
$= \ln\left|x-1+\sqrt{3-2x+x^2}\right| + C$ (формула 14);

12) $\int\left(4x^3-\frac{5}{\cos^2 2x}+3^{1-x}\right)dx=4\int x^3\,dx-\frac{5}{2}\int\frac{d(2x)}{\cos^2 2x}-$
$-\int 3^{1-x}\,d(1-x)=x^4-\frac{5}{2}\operatorname{tg}2x-\frac{3^{1-x}}{\ln 3}+C$ (формулы 1, 9, 3);

13) $\int x^3\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\int(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot x\cdot(x^2+1-1)\,dx=$
$=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{4}{3}}\,d(1+x^2)-\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\,d(1+x^2)=$
$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$

## Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \text{ где } t = \varphi(x)$$

***Пример 30.1.*** Найти $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$.

Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4\,dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^t\,dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

***Пример 30.2.*** Найти $\int x \cdot \sqrt{x-3}\,dx$.

Решение: Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3$, $dx = 2t\,dt$. Поэтому

$$\int x \cdot \sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3) \cdot t \cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int (t^4 + 3t^2)\,dt = 2\int t^4\,dt + 6\int t^2\,dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C.$$

***Пример 30.3.*** Получить формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C.$$

❑ Обозначим $t = \sqrt{u^2+a^2} + u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}\,du + du, \quad \text{т. е.} \quad dt = \frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u} = \frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C.$$ ■

***Пример 30.4.*** Найти $\int x\cdot(x+2)^{100}\,dx$.

● Решение: Пусть $x+2=t$. Тогда $x=t-2$, $dx=dt$. Имеем:

$$\int x\cdot(x+2)^{100}\,dx = \int (t-2)\cdot t^{100}\,dt = \int t^{101}\,dt - 2\int t^{100}\,dt =$$

$$= \frac{t^{102}}{102} - 2\cdot\frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C.$$ ●

***Пример 30.5.*** Найти $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

Решение: Обозначим $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = -\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2 - (t+\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} \ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Здесь используется формула 16 таблицы основных интегралов. ●

## 30.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям.*** Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, $k$ — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за $dv$ обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за $u$ обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где $a$ и $b$ — числа. За $u$ можно принять функцию $u = e^{ax}$.

***Пример 30.6.*** Найти $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = 2x+1 & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x}\,dx & \Longrightarrow & v = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \quad \bullet$$

***Пример 30.7.*** Найти $\int \ln x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x + C. \quad \bullet$$

***Пример 30.8.*** Найти $\int x^2 e^x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int e^x \cdot x\,dx. \tag{30.2}$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x\,dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^x\,dx \Longrightarrow du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x \cdot x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C. \tag{30.3}$$

Поэтому (см. (30.2)) $\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2(x \cdot e^x - e^x + C)$. ●

***Пример 30.9.*** Найти $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = \operatorname{arctg} x & \Longrightarrow & du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad ●$$

Пример. Найти интеграл $\int x\ln x\,dx$.

Введем обозначения $\ln x = u$, $x dx = dv$. Тогда $\frac{1}{x}dx = du$, $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$. Имеем

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример. Найти $\int x\sin x\,dx$.

Введем обозначения: $x = u$, $\sin x\,dx = dv$. Тогда $dx = du$, $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$. $\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$.

## Задачи

В задачах 8.37—8.44 найдите интегралы.

**8.37.** $\int \ln x\,dx$.

**8.38.** $\int x\sin 5x\,dx$.

**8.39.** $\int x\cos x\,dx$.

**8.40.** $\int xe^{x/3}\,dx$.

**8.41.** $\int x^3\ln x\,dx$.

**8.42.** $\int \frac{x}{e^{5x}}\,dx$.

**8.43.** $\int x^2\ln 3x\,dx$.

**8.44.** $\int \ln(2x+3)\,dx$.

**8.45.** $\int e^x\cos x\,dx$.

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 66. Основные свойства и вычисление определенного интеграла

**1. Понятие об определенном интеграле.** Сформулируем без доказательства теорему Ньютона — Лейбница[1].

**Теорема Ньютона — Лейбница.** *Пусть $f$ — данная функция, $F$ — ее произвольная первообразная. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{9.1}$$

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется ***определенным интегралом***.

Формула (9.1) носит название формулы Ньютона — Лейбница.

Разность $F(b) - F(a)$ записывают в виде $F(x)\Big|_a^b$.

**Алгоритм нахождения определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$.**

I. Найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$.
II. Вычислить значение $F(x)$ при $x = b$ ($b$ называется верхним пределом).
III. Вычислить значение $F(x)$ при $x = a$ ($a$ называется нижним пределом).
IV. Вычислить разность $F(b) - F(a)$.

Приведем примеры:

$$\int_2^3 x dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_2^3 = \frac{1}{2}(3^2 - 2^2) = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2};$$

$$\int_0^{\pi/6} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/6} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

**2. Основные свойства определенного интеграла.** Перечислим основные свойства определенного интеграла.

I. При перестановке пределов интегрирования знак определенного интеграла изменяется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

II. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

III. Определенный интеграл суммы функций равен сумме определенных интегралов этих функций:

$$\int_a^b (f(x)+\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Например,

$$\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \left(\frac{3^4}{4}+3\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}+(-1)\right) = \left(20\frac{1}{4}+3\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right) = 24.$$

**3. Определенный интеграл как площадь.** Пусть непрерывная при всех значениях аргумента положительная функция $y = f(x)$ изображена на рис. 9.1.

Кривая $f(x)$, ось $Ox$, неподвижная ордината $f(a)$ и переменная ордината $f(x)$ ограничивают некоторую криволинейную трапецию.

Обозначим через $A$, $A_1$, $B$ и $B_1$ точки с координатами $(a; f(a))$, $(a; 0)$, $(x; f(x))$, $(x; 0)$ соответственно. Тогда площадь фигуры $AA_1B_1B$ будет переменной величиной, зависящей от $x$; обозначим эту площадь через $S$. Если аргумент $x$ получит приращение $\Delta x$, то площадь $S$ получит приращение $\Delta S$, равное криволинейной площади $BB_1E_1E$. Здесь координаты точки $E$: $(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$, точки $E_1$ — $(x + \Delta x; 0)$. Проведем прямую $BD \parallel Ox$ и прямую $NE \parallel Ox$ до пересечения с продолженной ординатой $B_1B$.

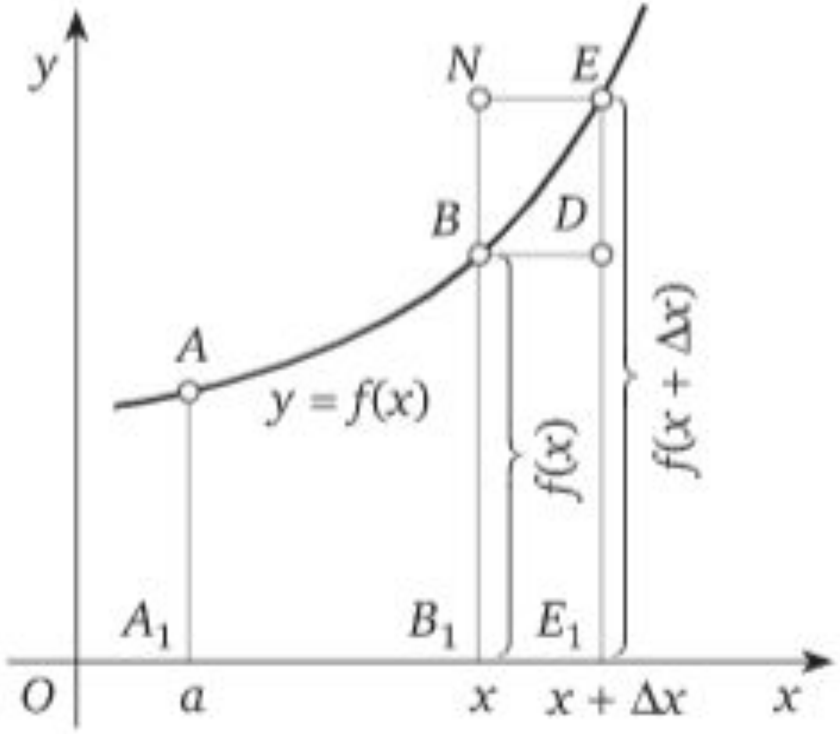


*Рис. 9.1*

Имеем

$$S_{B_1BDC_1} < \Delta S < S_{B_1NCC_1},$$

или

$$f(x)\Delta x < \Delta S < f(x + \Delta x)\Delta x. \qquad (9.2)$$

Разделив полученное неравенство на $\Delta x$ ($\Delta x > 0$), получим

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x + \Delta x). \qquad (9.3)$$

При $\Delta x \to 0$ значение $f(x+\Delta x) \to f(x)$, следовательно, отношение $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to$ $\to f(x)$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$, но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$ является производной функции $S$, т. е. $\frac{dS}{dx} = f(x)$, откуда

$$dS = f(x)dx. \tag{9.4}$$

Проинтегрировав обе части предыдущего равенства, получим $\int dS = \int f(x)dx$, или

$$S + C_1 = \int f(x)dx. \tag{9.5}$$

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$, тогда

$$\int f(x)dx = F(x) + C_2. \tag{9.6}$$

Из сравнения равенств (9.5) и (9.6) получим

$$S + C_1 = F(x) + C_2,$$

или

$$S = F(x) + C,\ C_2 - C_1 = C. \tag{9.7}$$

Для вычисления $C$ в равенстве (9.7) положим $x = a$, тогда площадь $AA_1B_1B = S = 0$. Следовательно, $0 = F(a) + C$, откуда $C = -F(a)$.

Равенство (9.7) примет вид $S = F(x) - F(a)$, что можно записать в виде определенного интеграла: $F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$.

Итак, переменная площадь $S$ примет вид

$$S = \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a). \tag{9.8}$$

Для вычисления постоянной площади, ограниченной площадью криволинейной трапеции $AA_1B_1B$, положим в формуле (9.8) $x = b$, тогда

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{9.9}$$

Следовательно, площадь фигуры $S$, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) > 0$), осью $Ox$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, выражается определенным интегралом

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{9.10}$$

В этом выражении заключается *геометрический смысл определенного интеграла*.

## Пример 9.1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями: 1) $y=x^2, y=0, x=2, x=3$; 2) $y^2=x, y=0, x=1, x=4$; 3) $y=\sin x, y=0, x=0, x=\pi$; 4) $y=x^2, y=2x$.

*Решение*

1) Данная фигура изображена на рис. 9.2. По формуле (9.10)

$$S=\int_2^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3=6\frac{1}{2}\text{(кв. ед.)}.$$

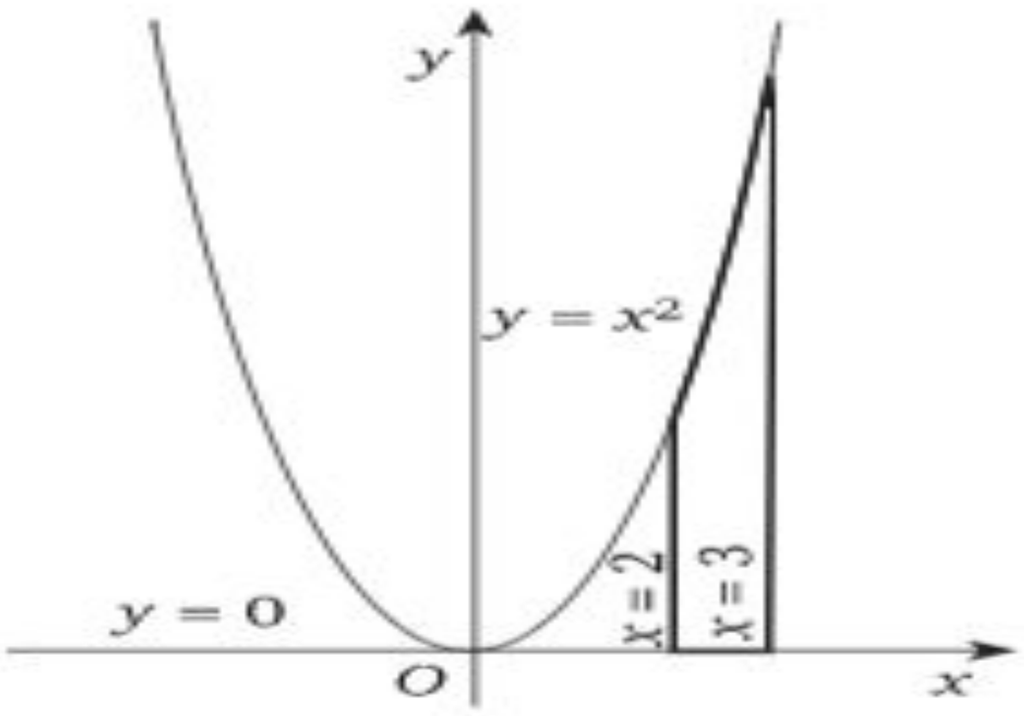



*Рис. 9.2*

2) Данная фигура изображена на рис. 9.3. По формуле (9.10), где $f(x)=\sqrt{x}$,

$$S_1=\int_1^4\sqrt{x}dx=\frac{2x^{3/2}}{3}\bigg|_1^4=\frac{2}{3}(8-1)=4\frac{2}{3}\text{(кв. ед.)}.$$

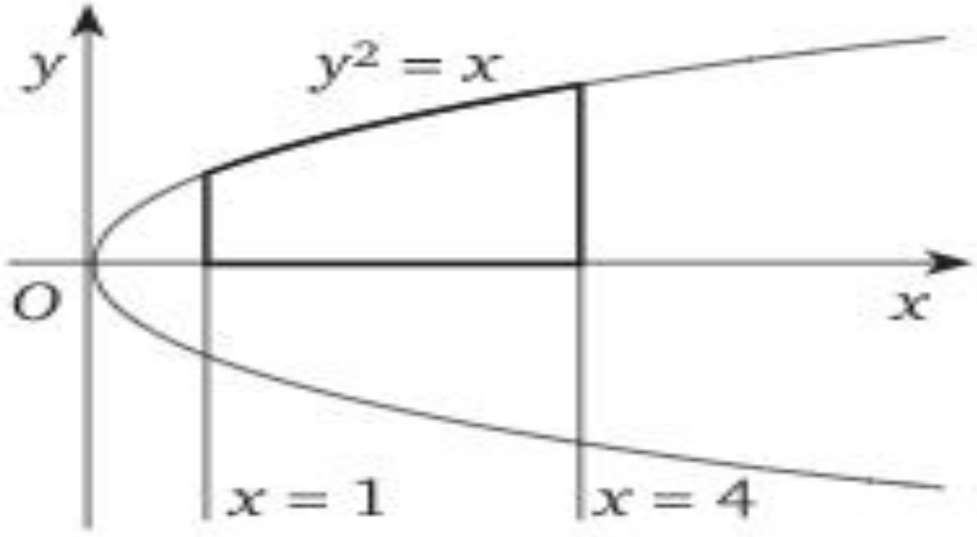



*Рис. 9.3*

3) Искомая площадь ограничена полуволной синусоиды и осью $Ox$:

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2\text{ (кв. ед.).}$$

4) Данная фигура представлена на рис. 9.4. Для вычисления точек пересечения заданных линий необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2x \end{cases}\Rightarrow x_1=0,\ x_2=2.$$

Искомая площадь равна разности площадей:

$$S=\int_0^2 2xdx-\int_0^2 x^2dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=4-\frac{8}{3}=1\frac{1}{3}\text{ (кв. ед.).}$$

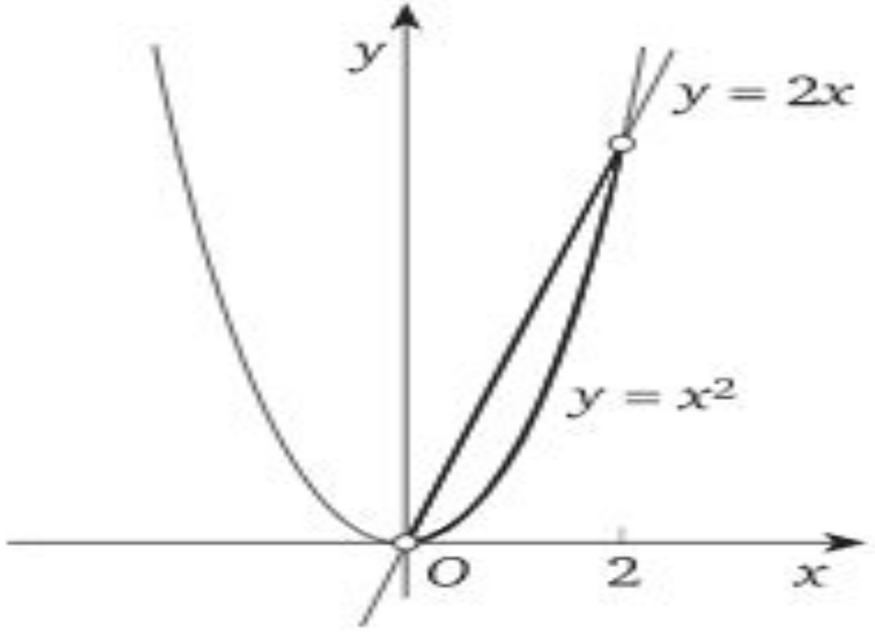



Рис. 9.4

В задачах 8.46—8.55 вычислите определенные интегралы и выясните их геометрический смысл.

**8.46.** $\int_1^3 \frac{dx}{x}$.

**8.47.** $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$.

**8.48.** $\int_{-1}^1 x^2\, dx$.

**8.49.** $\int_{-1}^1 x^3\, dx$.

**8.50.** $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx$.

**8.51.** $\int_0^1 e^x\, dx$.

**8.52.** $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$.

**8.53.** $\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$.

**8.54.** $\int_1^e \ln x\, dx$.

**8.55.** $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\, x\, dx$.

В задачах 8.56—8.63 вычислите интегралы.

**8.56.** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$.

**8.57.** $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$.

**8.58.** $\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\, dx$.

**8.59.** $\int_0^{\pi/2} \sin 3x\, dx$.

**8.60.** $\int_1^2 e^{3x}\, dx$.

**8.61.** $\int_{-1}^1 xe^x\, dx$.

**8.62.** $\int_1^3 \frac{x^2}{x^3+1}\, dx$.

**8.63.** $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x\, dx$.

**4. Определенный интеграл как предел суммы.** Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в промежутке $a < x < b$. Пусть функция в этом промежутке является положительной и возрастающей.

Выделим площадь фигуры $AA_1B_1B$ (обозначим ее через $S$), ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью $Ox$ (рис. 9.5). Здесь точки $A$, $A_1$, $B$, $B_1$ имеют координаты $(a; f(a))$, $(a; 0)$, $(b; f(b))$, $(b; 0)$ соответственно. Эта площадь равна

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{9.11}$$

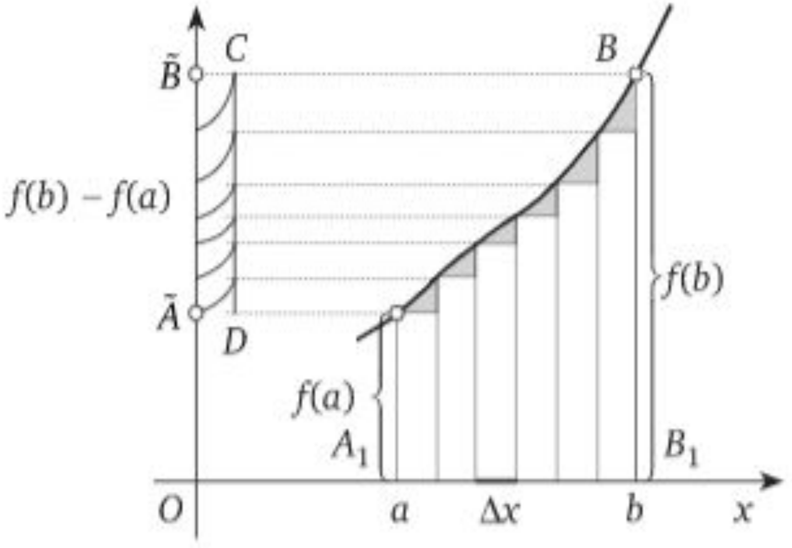


Рис. 9.5

Разделим отрезок $A_1B_1$ на $n$ равных частей, каждую из которых обозначим через $\Delta x$. Площадь фигуры состоит из суммы площадей прямоугольников ($S_\square$) и суммы площадей криволинейных треугольников ($S_\triangle$): $S = S_\square + S_\triangle$. Тогда

$$S - S_\square = S_\triangle. \tag{9.12}$$

Абсциссы точек деления обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, а соответствующие им ординаты — через $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$.

Сумма площадей всех прямоугольников

$$S_\square = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x,$$

или

$$S_\square = \sum_a^b f(x)\Delta x. \tag{9.13}$$

Если число делений $n$ отрезка $A_1B_1$ неограниченно увеличивать, то $\Delta x \to 0$ и величины $S_{\square}$ и $S_{\triangle}$ станут переменными. При этом условии $S_{\triangle}$ будет величиной бесконечно малой. Расположим криволинейные треугольники в прямоугольнике $\tilde{A}\tilde{B}CD$: основанием этого прямоугольника является отрезок $\Delta x$, высотой — отрезок $(f(b) - f(a))$, а площадью — произведение $|f(b) - f(a)|\Delta x$. При этом

$$S_{\triangle} < |f(b) - f(a)|\Delta x. \qquad (9.14)$$

При $\Delta x \to 0$ произведение постоянной $|f(b) - f(a)|$ на бесконечно малую $\Delta x$ есть величина бесконечно малая, тогда и $S_{\triangle}$ — бесконечно малая.

Таким образом, левая часть формулы (9.12) — величина бесконечно малая, тогда по определению предела равенство (9.13) принимает вид

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} S_{\square} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\Delta x. \qquad (9.15)$$

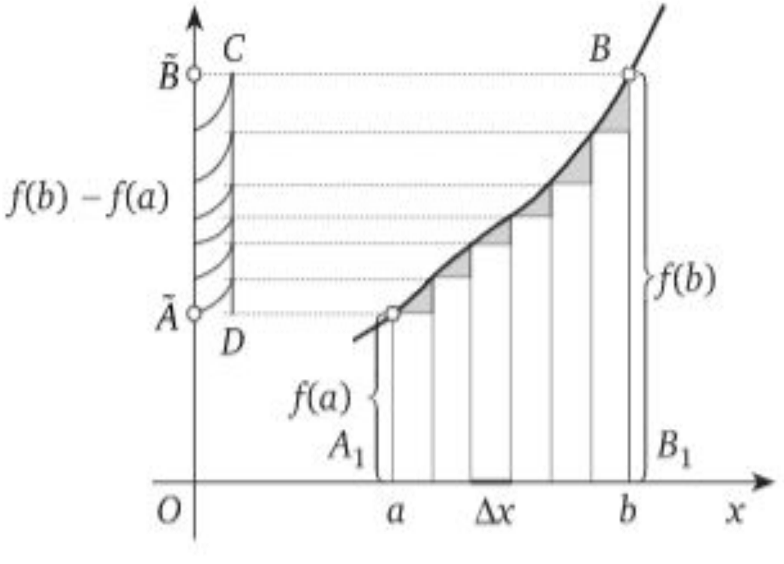


Рис. 9.5

Сравнивая формулы (9.11) и (9.15), получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\Delta x. \tag{9.16}$$

Правая часть равенства (9.16) называется ***пределом интегральной суммы***.

Определенный интеграл с конечными пределами равен пределу интегральной суммы, число слагаемых которой неограниченно растет и каждое слагаемое стремится к нулю.

Отметим, что вывод не зависит от вида функции (она может быть убывающей, возрастающей, возрастающей на одних участках и убывающей на других).

Итак, интегрирование есть процесс суммирования, т. е. нахождение целого путем суммирования его частей. Отметим, что символ $\int$ есть удлиненная буква $S$.

**5. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной.** При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ преобразуется с помощью подстановки $u = \varphi(x)$ или $x = \psi(u)$ в определенный интеграл относительно новой переменной $u$. При этом старые пределы интегрирования $a$ и $b$ заменяются соответственно новыми пределами интегрирования $\alpha$ и $\beta$, которые находятся из исходной подстановки.

**Пример 9.2**

Вычислить определенные интегралы:

1) $I_1 = \int_2^3 (2x-1)^3 dx$; 2) $I_2 = \int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$; 3) $I_3 = \int_{\sqrt{2}/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

*Решение*

1) Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $2x-1=u$. Дифференцируя, получаем $2dx = du$, откуда $dx = (1/2)du$. Находим новые пределы интегрирования. Подставляя в соотношение $2x-1=u$ значения $x=2$ и $x=3$, соответственно получим $u_{x=2} = 2\cdot 2-1=3$, $u_{x=3}=2\cdot 3-1=5$. Следовательно,

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_3^5 u^3 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{1}{8}(5^4-3^4) = 68.$$

2) Положим $2x^3+1=u$; тогда $6x^2dx=du$, $x^2dx=du/6$. Вычисляем новые пределы интегрирования: $u_{x=0}=2\cdot 0^3+1=1$, $u_{x=1}=2\cdot 1^3+1=3$. Таким образом,

$$I_2=\frac{1}{6}\int_1^3 u^4du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}\Big|_1^3=\frac{1}{30}(3^5-1^5)=8\frac{1}{15}.$$

3) Преобразуем подкоренное выражение: $4-9x^2=4[1-(3x/2)^2]$. Положим $3x/2=u$, откуда $dx=(2/3)du$. Найдем новые пределы интегрирования:

$$u_{\sqrt{2}/3}=(3/2)(\sqrt{2}/3)=\sqrt{2}/2,\ u_{\sqrt{3}/3}=(3/2)(\sqrt{3}/3)=\sqrt{3}/2.$$

Следовательно,

$$I_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{3}\arcsin u\Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{36}.$$

# § 67. Физические приложения определенного интеграла

**1. Вычисление пути, пройденного точкой.** Путь $S$, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t)$, $v \geq 0$, за промежуток времени от $t_1$ до $t_2$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (9.17)$$

**Пример 9.3**

Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь $S$, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

*Решение*

По формуле (9.17) имеем

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = (t^3 + t^2 + t)\Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110 \text{ (м)}.$$

**Пример 9.4**

Скорость движения точки $v = 9t^2 - 8t$ (м/с). Найти путь $S$, пройденный точкой за четвертую секунду.

*Решение*

Здесь пределами интегрирования являются $t_1 = 3$, $t_2 = 4$. Следовательно,

$$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = (3t^3 - 4t^2)\Big|_3^4 = 83 \text{ (м)}.$$

**Пример 9.5**

Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1 = 6t^2 + 2t$ (м/с), второе — со скоростью $v_2 = 4t + 5$ (м/с). На каком расстоянии $S$ друг от друга они окажутся через 5 с?

*Решение*

Очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = (2t^3 + t^2)\Big|_0^5 = 275 \text{ (м)};$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = (2t^3 + 5t)\Big|_0^5 = 75 \text{ (м)};$$

Таким образом, $S = S_1 - S_2 = 200$ (м).

## Пример 9.6

Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = 39{,}2 - 9{,}8t$ (м/с). Найти наибольшую высоту $H_{max}$ подъема тела.

*Решение*

Тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени $t_0$, когда $v = 0$, т. е. $39{,}2 - 9{,}8t_0 = 0$, следовательно, $t_0 = 4$ (с). Находим:

$$H_{max} = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)dt = (39{,}2t - 4{,}9t^2)\Big|_0^4 = 78{,}4 \text{ (м)}.$$

**2. Вычисление работы.** Работу $A$, произведенную переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси $Ox$ материальной точки от $x = a$ до $x = b$, находим по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx. \tag{9.18}$$

При решении задач на вычисление работы силы, связанных с растяжением-сжатием пружин, основываются на соотношении

$$F = kx, \tag{9.19}$$

где $F$ — сила; $x$ — абсолютное удлинение пружины, вызванное силой $F$; $k$ — коэффициент пропорциональности.

**Пример 9.7**

Укорочение $x$ винтовой пружины при сжатии пропорционально приложенной силе $F$. Вычислить работу $A$ силы $F$ при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

*Решение*

По формуле (9.19) $F = k \cdot 0{,}01$, следовательно, $k = 1000$ Н/м, поэтому в данной задаче $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x$. Работу найдем по формуле (9.18), полагая $a = 0$, $b = 0{,}04$:

$$A = \int_0^{0{,}04} 1000x dx = 500x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

**Пример 9.8**

Для растяжения пружины на $l_1 = 0{,}04$ м необходимо совершить работу $A_x = 20$ Дж. На какую длину $l_2$ можно растянуть пружину, совершив работу, равную 80 Дж?

*Решение*

По формуле (9.18) работа $A_1 = \int\limits_0^{l_1} kldl$, т. е.

$$20 = \int\limits_0^{0,04} kldl = k\frac{l^2}{2}\Bigg|_0^{0,04} = 0{,}0008k,$$

откуда $k = 20/0{,}0008 = 25\,000$ (Н/м).

Тогда

$$80 = \int\limits_0^{l_2} 25\,000ldl = 25\,000\frac{l^2}{2}\Bigg|_0^{l_2} = 12\,500l_2^2,$$

откуда $l_2^2 = 80/12\,500 = 16/2500$; $l_2 = 0{,}08$ м.

## Пример 9.9

Цилиндрическая цистерна с радиусом основания $r = 0{,}5$ м и высотой $H = 2$ м заполнена водой. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м$^3$. Определить работу $A$, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

*Решение*

Вес воды, заполняющей цистерну, равен $P = mg$, где $m = \rho V$ — масса воды; $V$ — объем цистерны; $g$ — ускорение свободного падения ($g = 9{,}8$ м/с$^2$). Таким образом,

$$P = \rho V g.$$

Чтобы поднять слой воды $dx$ на высоту $x$, необходимо совершить работу

$$dA = dPx,$$

где $dP = \rho g dV$ — вес выделенного слоя; $dV$ — его объем. Так как $dV = \pi r^2 dx$, получим

$$dA = \rho g \pi r^2 x dx.$$

Для того чтобы получить выражение для работы $A$, следует взять определенный интеграл в пределах от 0 до $H$:

$$A = \int_0^H \rho g \pi r^2 x dx = \rho g \pi r^2 \int_0^H x dx = \rho g \pi r^2 \frac{H^2}{2} = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 3.14 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{4}{2} \approx 15\,400 \text{ (Дж)}.$$

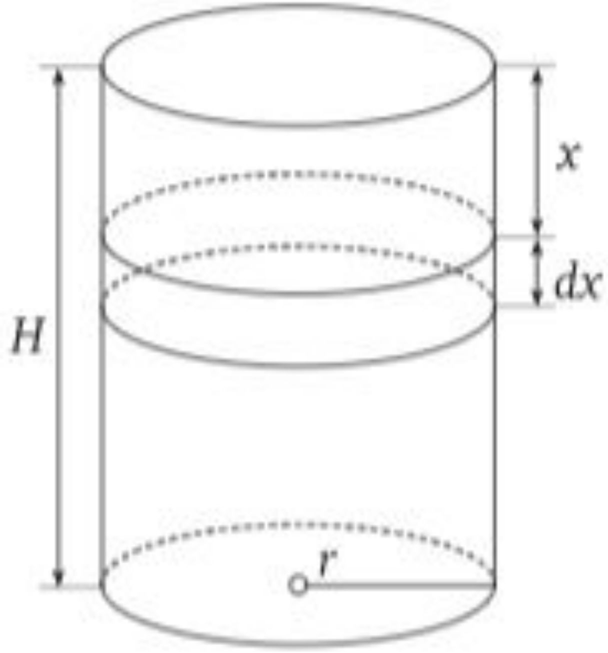



Рис. 9.6

# Вопросы для повторения

1. Выпишите формулу Ньютона — Лейбница и объясните ее смысл.
2. Приведите основные свойства определенного интеграла.
3. Объясните, в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.
4. В чем заключается соответствие между пределом интегральной суммы и определенным интегралом?

***Пример 37.1.*** Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$.

❍ Решение:

$$\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int\limits_0^{\pi} |\cos x|\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2. \quad \bullet$$

***Пример 39.1.*** Вычислить $\int\limits_0^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

❍ Решение: Положим $x = 2\sin t$, тогда $dx = 2\cos t\,dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_0^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 16\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 16\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = 4\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= 2\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi. \quad \bullet$$

## 39.3. Интегрирование по частям

**Теорема 39.2.** Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{39.2}$$

❑ На отрезке $[a; b]$ имеет место равенство $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция $uv$ есть первообразная для непрерывной функции $u'v + uv'$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^b (u'v + uv')\,dx = uv\Big|_a^b.$$

Следовательно,

$$\int_a^b v \cdot u'\,dx + \int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b \implies$$

$$\implies \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b \implies \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \quad \blacksquare$$

Формула (39.2) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

***Пример 39.2.*** Вычислить $\int\limits_1^e x \ln x \, dx$.

❍ Решение: Положим

$$\left[\begin{array}{lll} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx & \Longrightarrow & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right].$$

Применяя формулу (39.2), получаем

$$\int\limits_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1). \quad ●$$

***Пример 39.3.*** Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

Решение: Интегрируем по частям. Положим

$$\left[\begin{array}{lll} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = \sin x \, dx & \Longrightarrow & v = -\cos x \end{array}\right].$$

Поэтому

$$J = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x \, dx = -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

## 39.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

усть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$, симметричном относительно точки $x = 0$. Докажем, что

$$\int_{-a}^{a} (x)\,dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \qquad (39.3)$$

❑ Разобьем отрезок интегрирования $[-a; a]$ на части $[-a; 0]$ и $[0; a]$. Тогда по свойству аддитивности

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx. \qquad (39.4)$$

В первом интеграле сделаем подстановку $x = -t$. Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = \int_0^a f(-x)\,dx$$

(согласно свойству: «определенный интеграл не зависит от обозначения еременной интегрирования»). Возвращаясь к равенству (39.4), получим

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a (f(-x) + f(x))\,dx. \qquad (39.5)$$

Если функция $f(x)$ четная ($f(-x) = f(x)$), то $f(-x) + f(x) = 2f(x)$; если функция $f(x)$ нечетная ($f(-x) = -f(x)$), то $f(-x) + f(x) = 0$.

Следовательно, равенство (39.5) принимает вид (39.3). ■

Благодаря доказанной формуле можно, например, сразу, не производя вычислений, сказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x\,dx = 0, \qquad \int_{-3}^{3} e^{-x^2} \cdot \sin x\,dx = 0.$$

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## § 93. Элементы комбинаторики

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются ***соединениями***.

Различают три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются ***комбинаторными***. Раздел математики, занимающийся их решением, называется ***комбинаторикой***.

**1. Размещения.** ***Размещениями из n элементов по m*** называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их следования.

Число размещений из $n$ элементов по $m$ обозначается символом $A_n^m$ и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(m-1)]. \qquad (16.1)$$

**2. Перестановки.** ***Перестановками из n элементов*** называются такие соединения из $n$ элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов.

Число перестановок из $n$ элементов обозначается символом $P_n$. Перестановки представляют собой частный случай размещения из $n$ элементов по $n$ в каждом, т. е.

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1. \qquad (16.2)$$

Таким образом, число всех перестановок из $n$ элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до $n$ включительно. Произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$ первых $n$ натуральных чисел обозначается знаком $n!$ (читается «$n$-факториал»), причем формально полагают $0! = 1$, $1! = 1$. Поэтому равенство (16.2) можно записать в виде

$$P_n = n!. \tag{16.3}$$

**3. Сочетания.** ***Сочетаниями из п элементов по т*** называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из га элементов по гаг обозначается символом $C_n^m$ и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}, \tag{16.6}$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{16.7}$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(m-1)]}{m!}. \tag{16.8}$$

По определению полагают $C_n^n = 1$ и $C_n^0 = 1$. Кроме того, при решении задач используются формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \le m \le n); \tag{16.9}$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \tag{16.10}$$

## Пример 16.1

Найти число размещений: 1) из 10 элементов по 4; 2) из $n+4$ элементов по $n-2$.

*Решение*

Согласно формуле (16.1) получим

1) $A_{10}^4 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$;
2) $A_{n+4}^{n-2} = (n+4)(n+3)\cdot\ldots\cdot[n+4-(n-2-1)] = (n+4)(n+3)\cdot\ldots\cdot 8\cdot 7$.

## Пример 16.2

Решить уравнение $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.

*Решение*

Используя формулу (16.1), перепишем уравнение в виде

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Учитывая, что $n > 6$, разделим обе части на $(n-2)(n-3)(n-4)$; имеем

$$n(n-1) = 30(n-5),$$

отсюда $n_1 = 6$; $n_2 = 25$.

## Пример 16.3

Составить все возможные перестановки из элементов: 1) 1; 2) 5, 6; 3) $a$, $b$, $c$.

*Решение*

1) (1); $P_1 = 1$.
2) (5, 6); (6, 5); $P_1 = 1 \cdot 2 = 2$.
3) $(a, b, c)$; $(a, c, b)$; $(b, a, c)$; $(b, c, a)$; $(c, a, b)$; $(c, b, a)$; $P_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

## Пример 16.4

Вычислить значения выражений: 1) $5! + 6!$; 2) $\dfrac{52!}{50!}$; 3) $C_{15}^{13}$; 4) $C_6^4 + C_5^0$.

*Решение*

1) $5! + 6! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 + 720 = 840$.
2) $\dfrac{52!}{50!} = \dfrac{52 \cdot 51 \cdot 50!}{50!} = 52 \cdot 51 = 2652$.
3) По формуле (16.7) получим $C_{15}^{13} = \dfrac{15!}{13!(15-13)!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2 \cdot 1} = 15 \cdot 7 = 105$.
4) $C_6^4 + C_5^0 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} + 1 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} + 1 = 15 + 1 = 16$.

## Вопросы для повторения

1. Какие соединения называются размещениями?
2. Выпишите формулу для числа размещений из $n$ элементов по $m$.
3. Какие соединения называются перестановками?
4. Выпишите формулу для числа перестановок из $n$ элементов.
5. Какие соединения называются сочетаниями?
6. Выпишите формулу для числа сочетаний из $n$ элементов по $m$.