Координаты и векторы

Студент должен знать:

- Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве.
- Формула расстояния между двумя точками.
- Понятие вектора. Модуль вектора. Равенство векторов.
- Сложение векторов.
- Умножение вектора на число. Разложение вектора по направлениям. Угол между двумя векторами.
- Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.
- Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Декартова система координат в пространстве

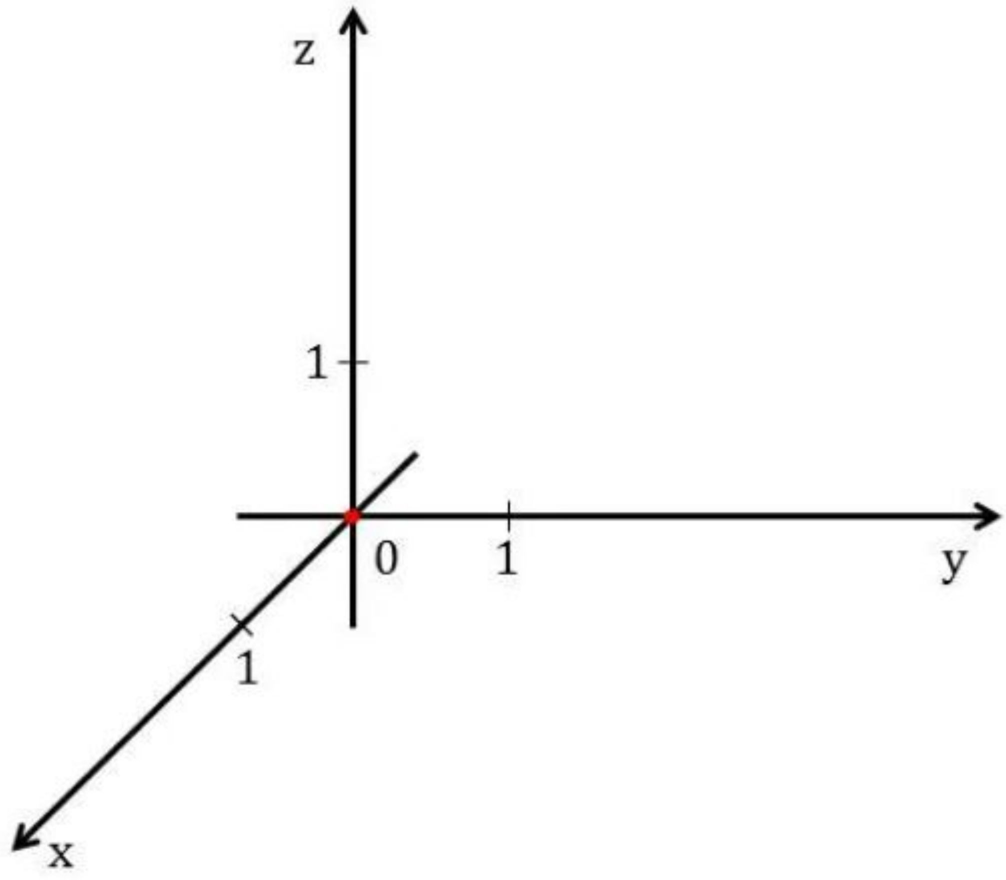
Прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат OX, OY и OZ.

Ox - **ось абсцисс**,

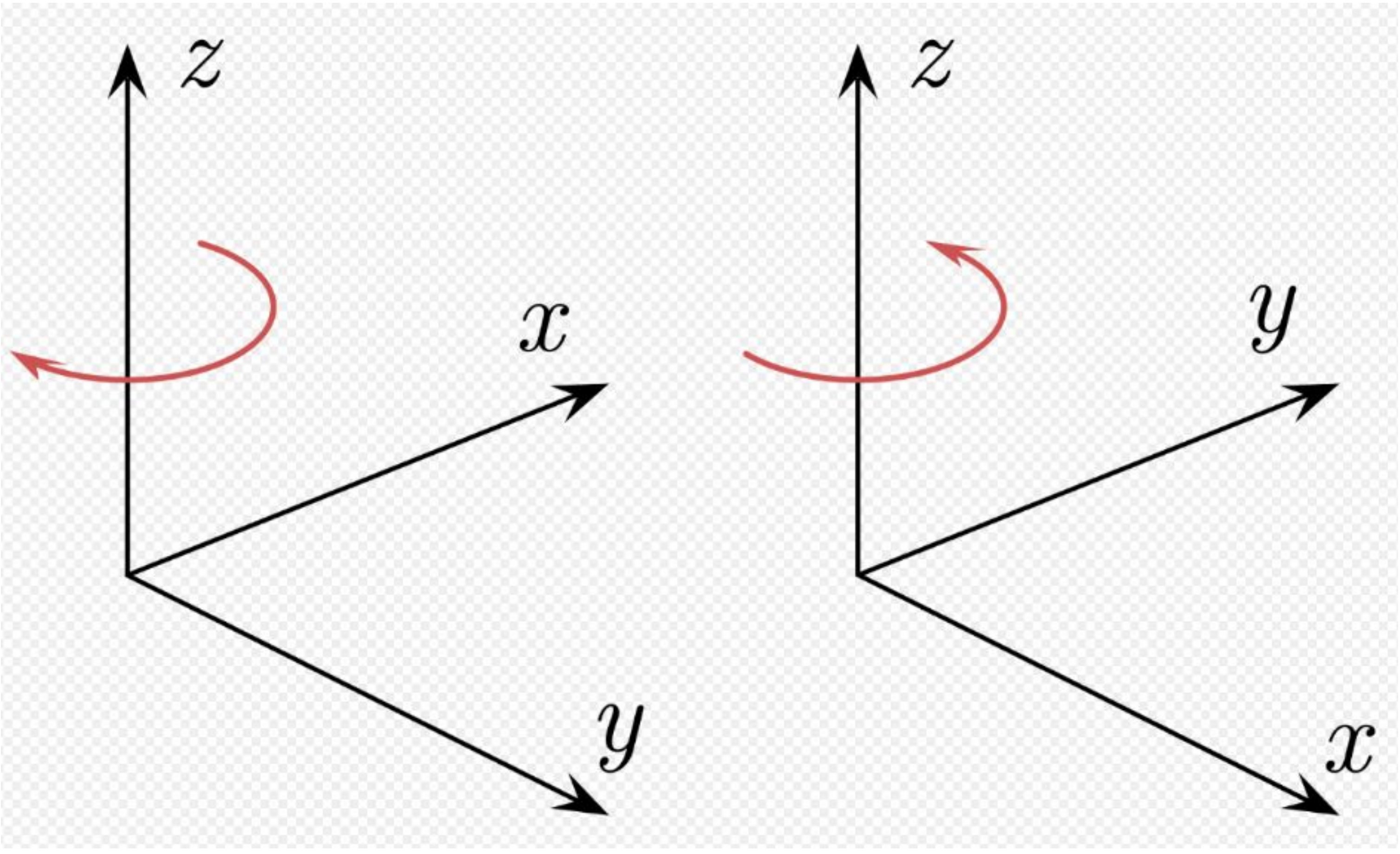
Oy - **ось ординат**

Oz - **ось аппликат**

Декартова система координат в пространстве



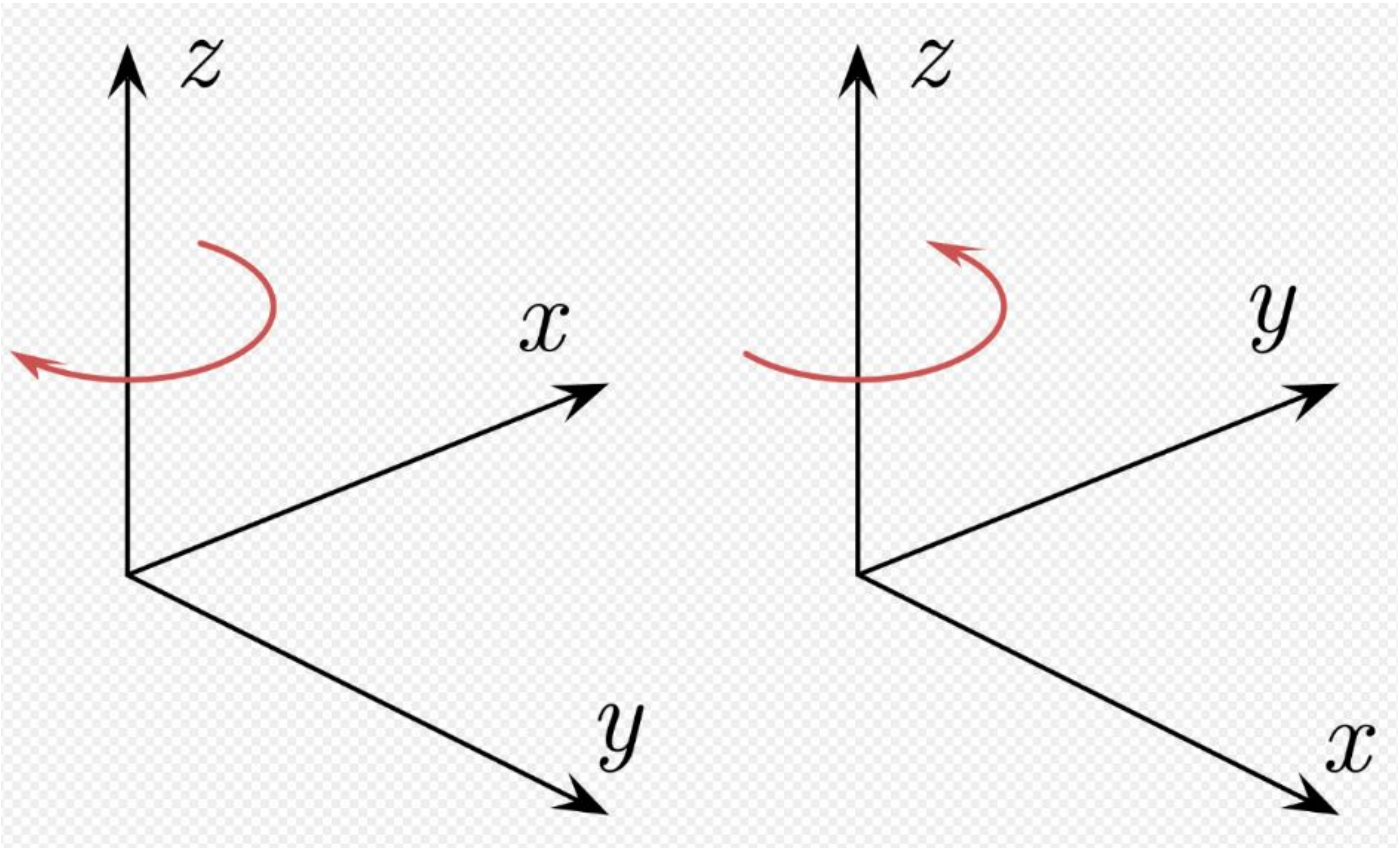
В зависимости от того как задать координатные оси можно получить правую или левую систему координат



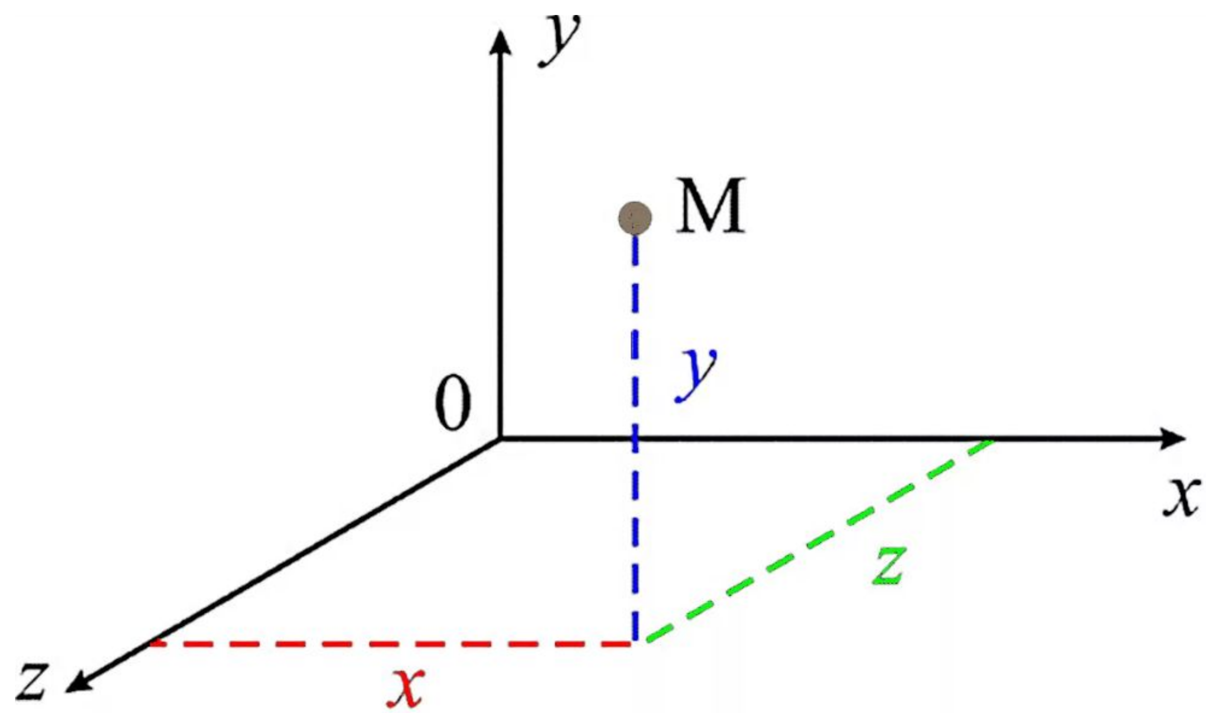
Общепринятая – правая система координат

Положительное направление осей выбирают так, чтобы при повороте оси OX против часовой стрелки на 90° её положительное направление совпало с положительным направлением оси OY, если этот поворот наблюдать со стороны положительного направления оси OZ.

ЛЕВАЯ　　　　　　　　　ПРАВАЯ



Декартова система координат в пространстве



Точка M задается тремя координатами (x,y,z)

Формула вычисления расстояния между двумя точками:

Даны две координаты в пространстве:

точка $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$

Длина отрезка АВ находится по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Задания

1. Найти расстояние между точками:

а) $A_1(1,2,3)$ и $A_2(-1,1,1)$

б) $B_1(3,4,0)$ и $B_2(3,-1,2)$

Координаты середины отрезка

Пусть дана точка $A(x_1, y_1, z_1)$ и точка $B(x_2, y_2, z_2)$. Точка С – середина отрезка АВ, тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Задания

2. Найти координаты середины отрезка

а) GH, если

$$G(2,-3,5) \qquad H(4,1,-3)$$

б) AB, если

$$A(3,-2,4) \qquad B(5,2,-6)$$

Домашнее задание

Даны точки $M(1,-2,-3)$ $N(-2,3,1)$

$K(3,1,-2)$

Найти периметр треугольника MNK

Понятие вектора

Какие понятия характеризуют вектор?

- Форма
- Объем
- Направление
- Величина

Какие физические величины можно задать с помощью вектора?

Что такое вектор?

Определение

Вектор – направленный отрезок, который имеет начало и конец.

Обозначение:

$$\vec{a} \quad \text{или} \quad \overrightarrow{AB}$$

где: A – начало вектора

B – конец вектора

Любая точка пространства рассматривается как ***нулевой вектор.***

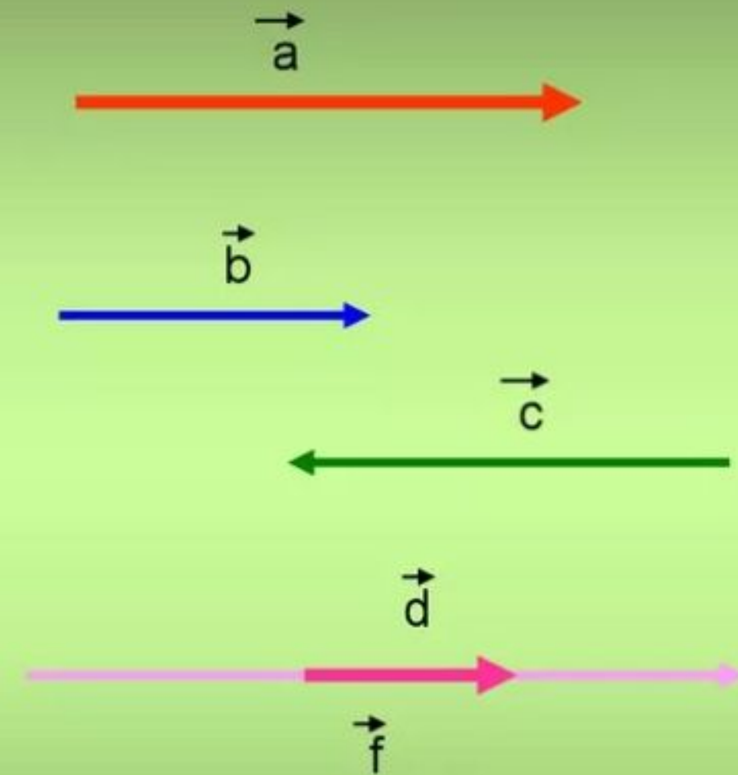
Обозначается: $\vec{0}$

Длина вектора (модуль вектора) обозначается:

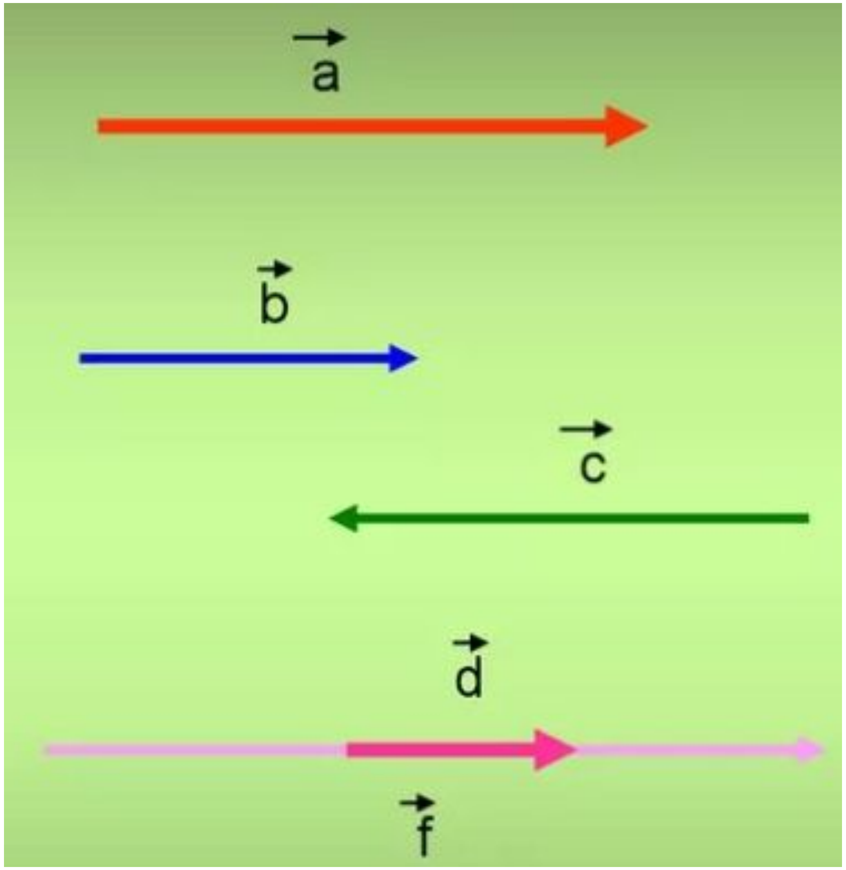
$$|\vec{a}| \quad \text{или} \quad |\overrightarrow{AB}|$$

Коллинеарные векторы

Векторы, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными**



Сонаправленные и противоположно направленные векторы



Обозначение

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

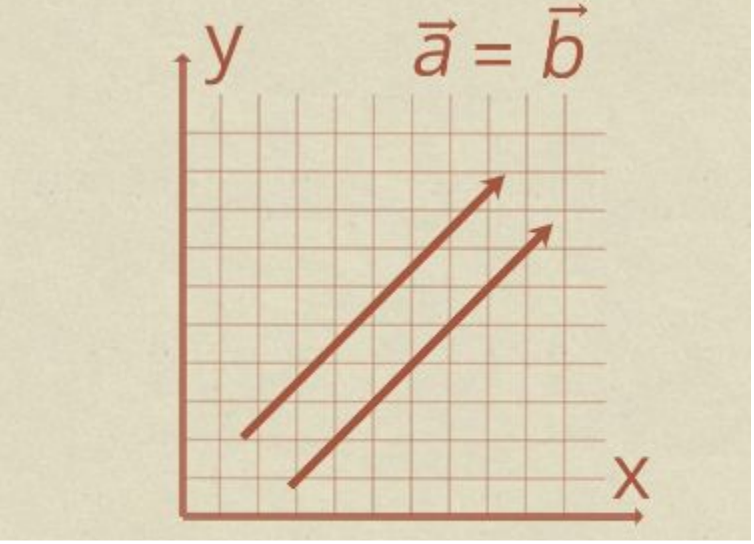
$$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$$

Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.

$$\vec{0}$$

Определение

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны. От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

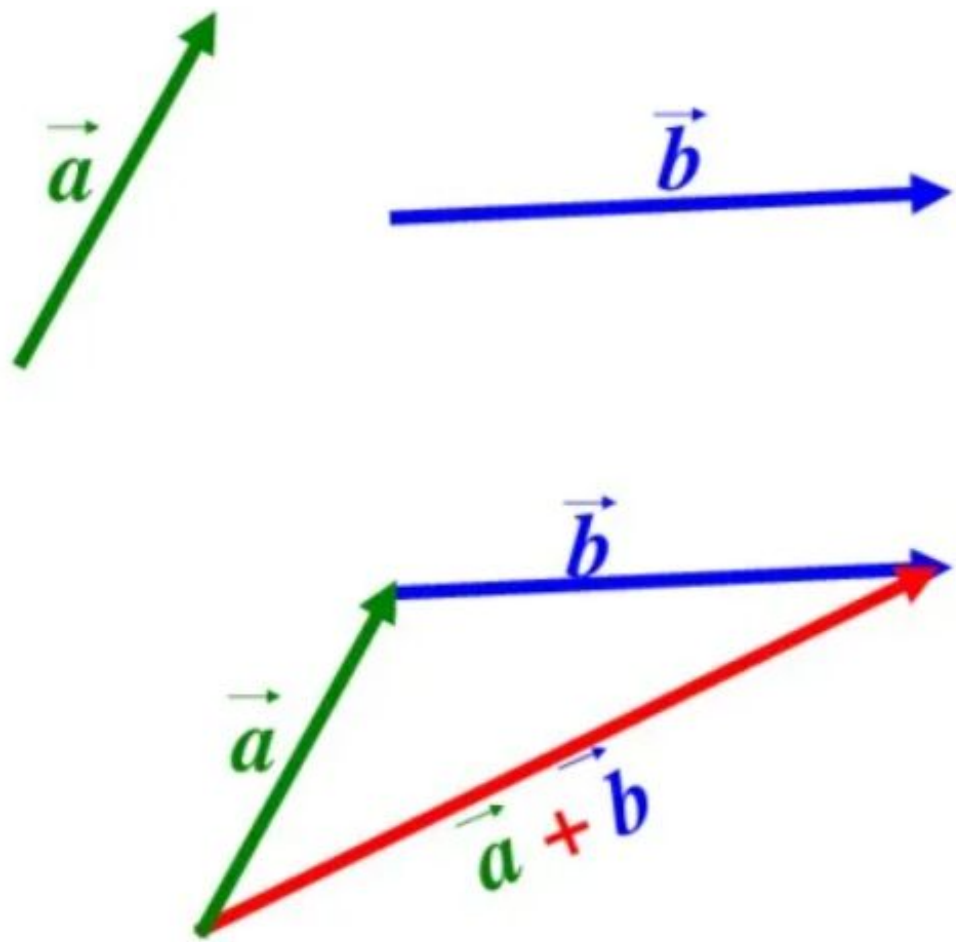


Действия над векторами

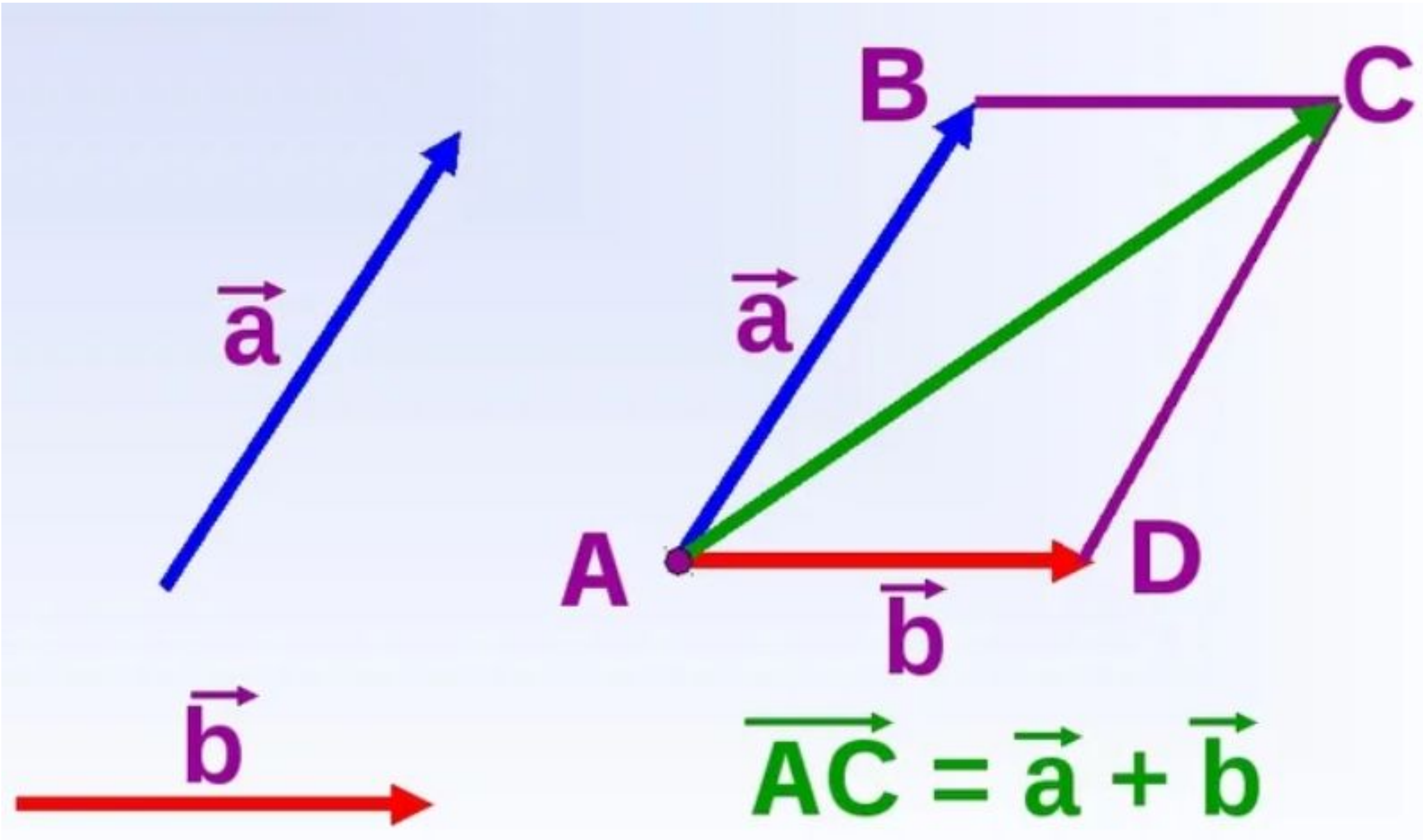
Действия над векторами

1. Сложение
2. Вычитание
3. Умножение на число

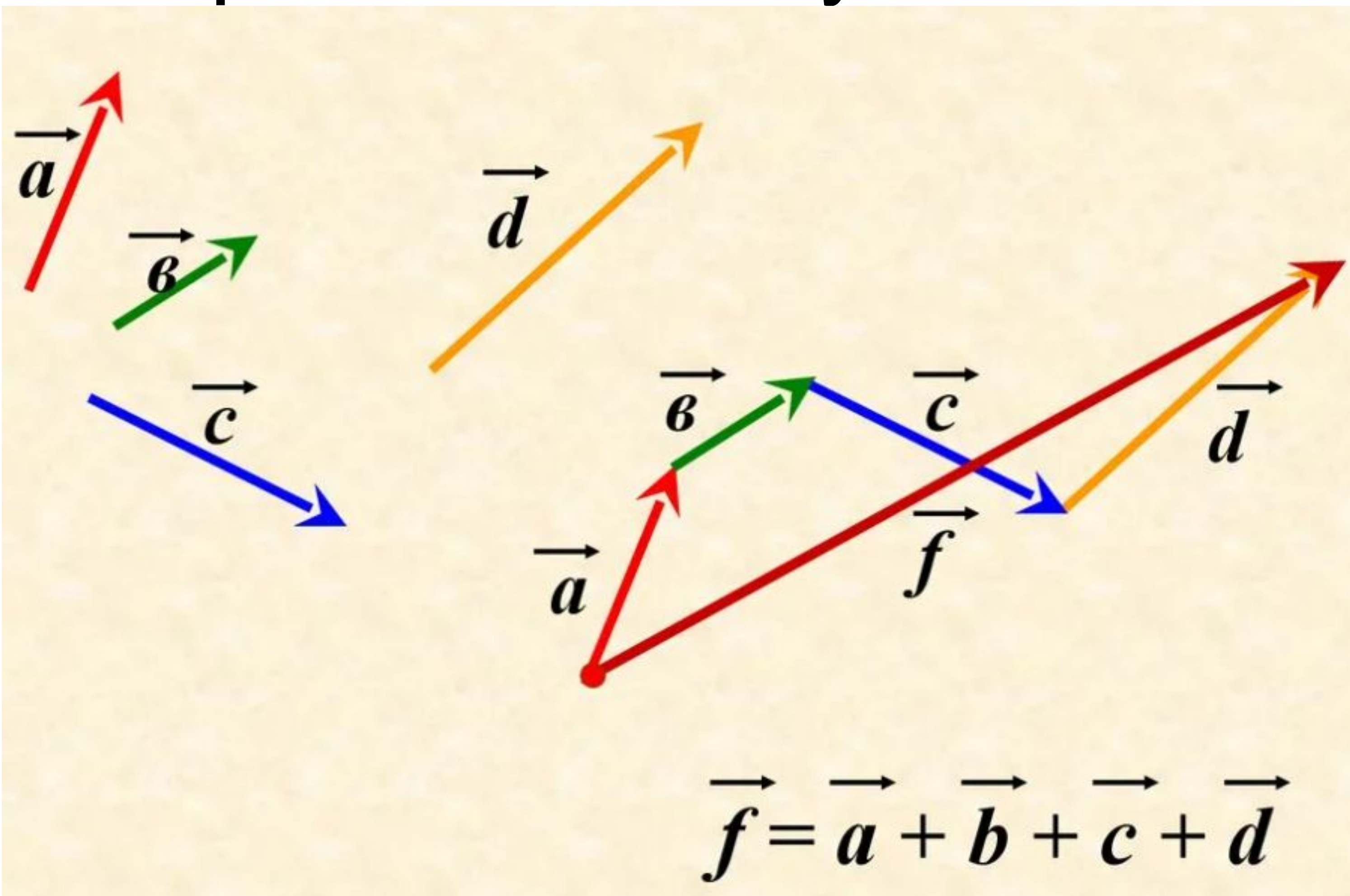
Сложение
«правило треугольника»



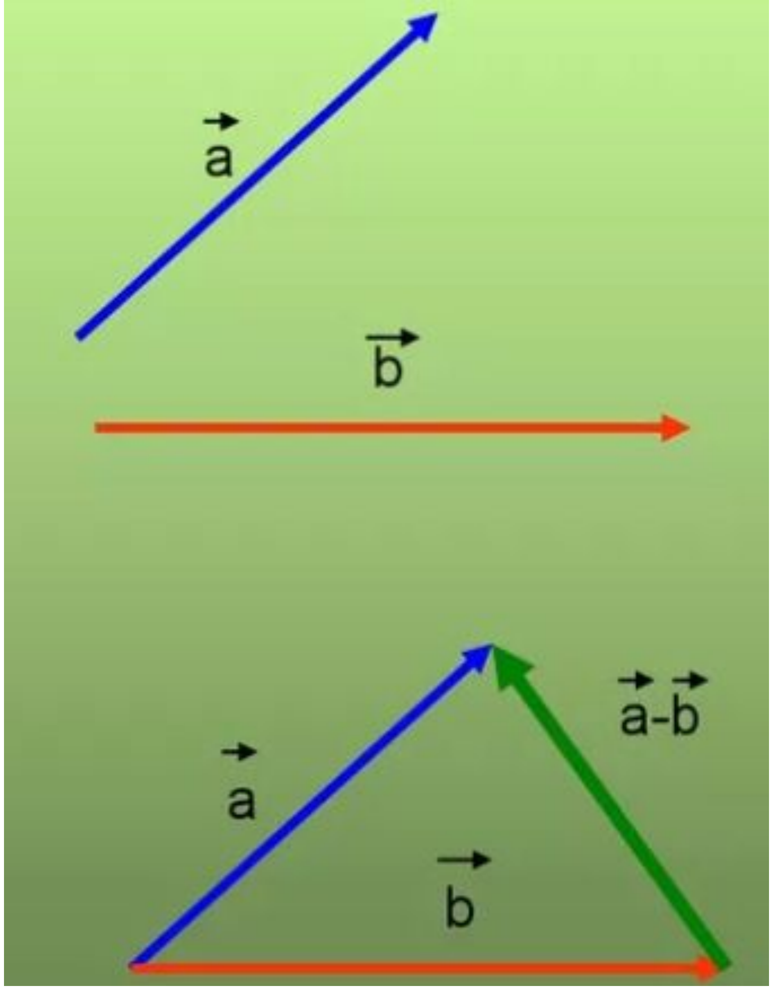
Сложение
«правило параллелограмма»



Сложение «правило многоугольника»



Вычитание векторов



Вопросы

- Что такое вектор?
- Как изображается в пространстве нулевой вектор?
- Что такое коллинеарные векторы?

Умножение вектора на число

Определение.

Вектор $k \cdot \vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$ называется умножением вектора на число k.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Векторы

$$\vec{a} \quad \text{и} \quad k \cdot \vec{a}$$

К>0 сонаправлены

$$\vec{a} \uparrow\uparrow k\vec{a}$$

К<0 противоположно направлены

$$\vec{a} \uparrow\downarrow k\vec{a}$$

Умножение вектора на число

Произведением нулевого вектора на произвольное число считается нулевой вектор.

$$\vec{0} \cdot k = \vec{0}$$

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

Свойства операции умножения вектора на число

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и чисел k и m

a) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$;

b) $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$;

c) $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$

Длина вектора

$$A(x_a, y_a, z_a) \qquad B(x_b, y_b, z_b)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Длина вектора

Если вектор задан координатами

$$\vec{a} = \{x, y, z\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Задание 1

Даны координаты четырех вершин куба ABCDA1B1C1D1:

A (0; 0; 0), B (0; 0; 1),

D (0; 1; 0), A1 (1; 0; 0).

Найдите координаты остальных вершин куба.

Задание 2

Задан параллелепипед ABCDA1B1C1D1. Запишите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

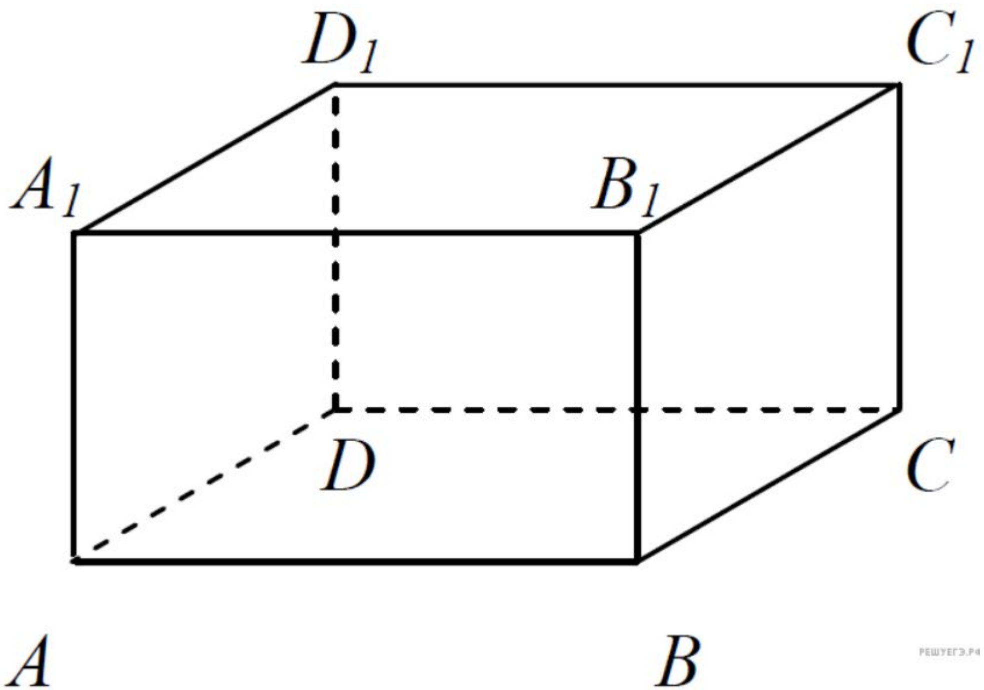
а) AB + A1D1; г) DD1+DB;

б) AB + AD1; д) DB1+ BC.

в) DA + B1B;

Задание 3

Запишите векторы, образованные ребрами параллелепипеда:



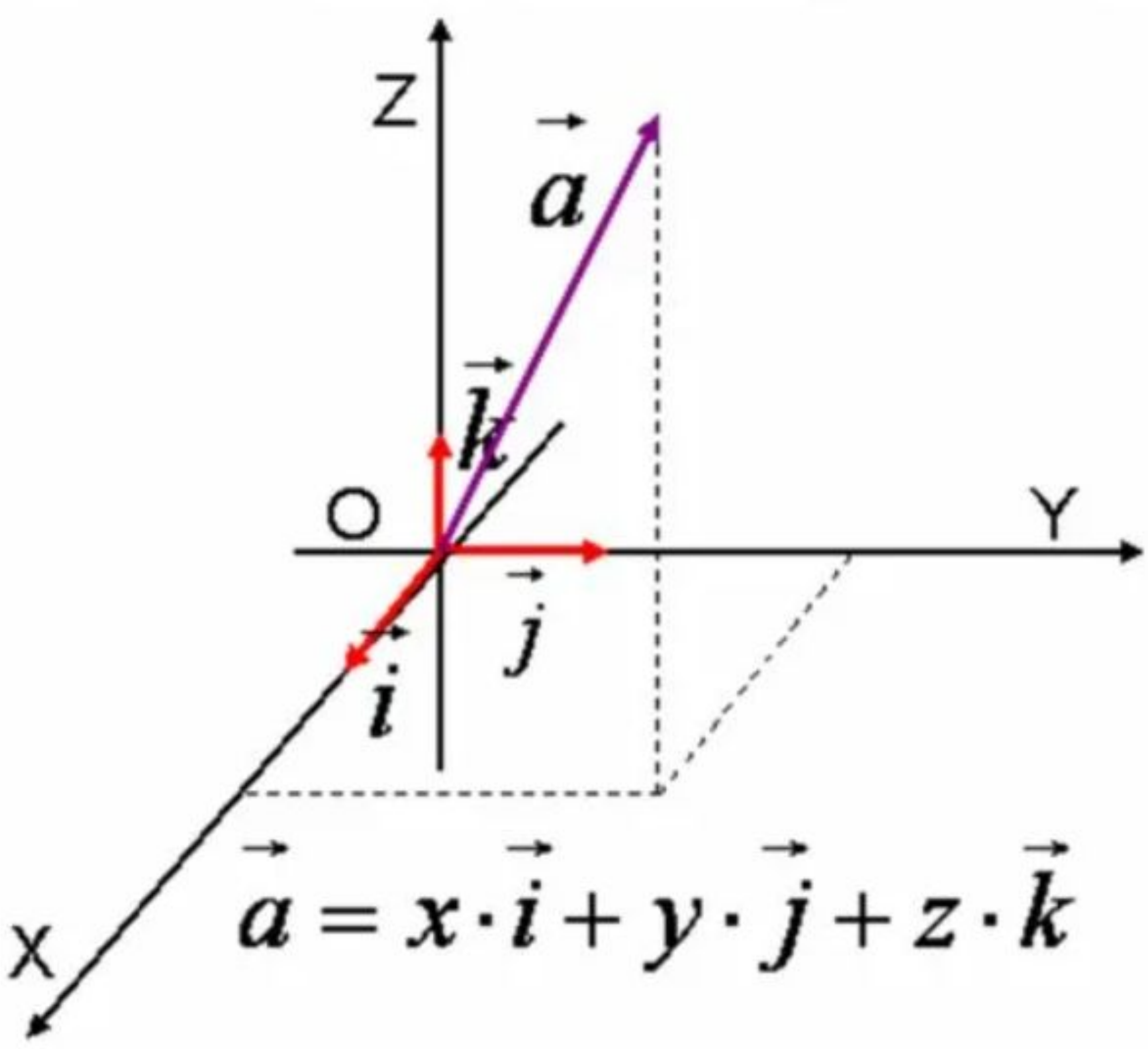
а) противоположны $\overrightarrow{CB}$

б) противоположны $\overrightarrow{B_1A}$

в) равны $-\overrightarrow{DC}$

г) равны $-\overrightarrow{A_1B_1}$

Разложение вектора по базису



Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Скалярное произведение векторов

Если векторы заданы координатами,

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\} \qquad \vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

то формула скалярного произведения имеет вид

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Условие перпендикулярности векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(Скалярное произведение векторов равно нулю)

Условие коллинеарности векторов

Даны векторы

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\} \qquad \vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

если они коллинеарны, то:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Формула центра тяжести треугольника, вершины которого заданы координатами

$$(x_c, y_c, z_c) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$$

Формулы

Длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Угол между векторами: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Координаты середины сторон:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$