Уральский федеральный университет

Математика

Лекция 13
Производная функции

Производная функции

Пусть $y=f(x)$ определена в некотором интервале (a, b).

Выполним следующие операции

- придадим аргументу $x\in(a, b)$ приращение Δx: $x+\Delta x\in(a, b)$;
- найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;
- составим отношение: $\Delta y/\Delta x$;
- найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, то его называют производной функции $y=f(x)$ и обозначают:

$$y',\ y_x',\ f'(x),\ f_x',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx}.$$

Производной $y=f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю:

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}.$$

Пример. Найти по определению производную функций $y=C$, $y=x$ и $y=x^2$.

Физический смысл производной

Если $y=f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то y' - скорость протекания этого процесса.

Рассмотрим уравнение неравномерного движения $S=f(t)$.

Зафиксируем два момента времени t_0 и t_1, обозначим $\Delta t = t_1 - t_0$.

Средняя скорость движения, соответствующая промежутку времени Δt: $V_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ (ΔS – путь, пройденный за Δt).

Чтобы найти скорость движения в момент времени t_0, необходимо уменьшать промежуток времени Δt.

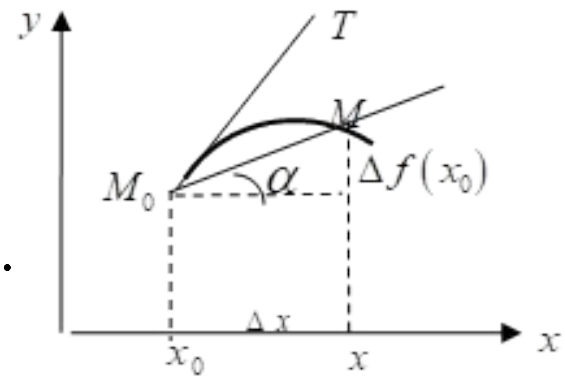
Чем меньше Δt, тем меньше $V_{ср}$ отличается от скорости в момент времени t_0 (мгновенная скорость).

Таким образом, $V_{мгн} = V(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$ – механический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Рассмотрим на кривой $y=f(x)$ точки M, M_0 и секущую MM_0.

При движении M по этой кривой к точке M_0 секущая MM_0 займет предельное положение M_0T.



M_0T – касательная к данной кривой в точке M_0.

Угловой коэффициент секущей

$$k_{MM_0} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Угловой коэффициент касательной

$$k_{\text{касат}} = \lim_{M \to M_0} k_{MM_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$ – геометрический смысл производной.

Уральский федеральный университет

Уравнение касательной к кривой: $y_к = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной к кривой, называется *нормалью* к этой кривой.

$$k_{касат} \cdot k_{норм} = -1 \Rightarrow y_н = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \ -$$

уравнение нормали (если $f'(x_0) \neq 0$).

Если $f'(x_0) = 0$, т.е. касательная $y_к = f'(x_0)$ параллельна Ox, то нормаль параллельна оси Oy и определяется уравнением $x=x_0$.

Дифференцируемые функции. Дифференциал функции

Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если она имеет производную в этой точке.

Функция $y=f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала (a, b), называется *дифференцируемой в этом интервале*.

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Теорема (о связи функции с ее пределом).

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x\to x_0$.

Пусть функция дифференцируема, т.е. имеет производную:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$

или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$

Выражение $f'(x) \cdot \Delta x$ называют *дифференциалом* функции и обозначают $df(x)$.

Замечания.

1. Дифференциал функции линеен относительно Δx и имеет при $\Delta x \to 0$ тот же порядок малости, что и Δx.

2. $\alpha \cdot \Delta x$ – б.м. $o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ более высокого порядка, чем Δx.

3. Приращение дифференцируемой функции представимо в виде

$$\Delta y = df(x) + o(\Delta x).$$

4. Т.к. $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$, то для функции $y=x$ $df(x)= dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$.

Поэтому $df(x) = f'(x)\, dx$, $\quad f'(x) = \dfrac{df}{dx}.$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.

Пример. $y=|x|$.

Правила дифференцирования. Формулы дифференцирования

Пусть $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ – дифференцируемые функции, тогда

1. $(u+v)' = u' + v'$;

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

4. $(c \cdot u)' = c \cdot u' \quad (c = \text{const})$;

5. $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$;

6. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2} \quad (c = \text{const})$.

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$, $u = \phi(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = f(\phi(x))$ дифференцируема и ее производная находится по формуле: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ строго монотонна и дифференцируема на интервале (a, b), причем $y'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема и $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Формулы вычисления производных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $\qquad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $\qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\qquad (e^x)' = e^x$;

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $\qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

4. $(\sin x)' = \cos x$, $\qquad (\cos x)' = -\sin x$;

5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

7. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример. Продифференцировать функции

$$y = \sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x;\;\; y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right).$$

§13. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование

Если функция задана уравнением $y=f(x)$, разрешенным относительно y, то функция задана в явном виде.

Неявное задание функции – это задание функции в виде уравнения $F(x, y)=0$, не разрешенного относительно y.

Например,
$y = x^2$ – явное задание, $y - x^2 = 0$ – неявное задание функции.

Не всегда легко, а иногда и не возможно разрешить уравнение относительно y (например, $\cos(xy)+e^y=0$).

Для нахождения производной неявной функции $F(x, y)=0$ нужно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию от x, затем полученное уравнение разрешить относительно y'.

Пример 1. Найти производную неявной функции $e^x + e^y - 2xy + 1 = 0$.

Если зависимость между аргументом *x* и функцией *y* задана в виде двух уравнений $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где *t* – вспомогательная переменная (параметр), то говорят, что *функция y*(*x*) *задана параметрически*.

Пусть $x(t)$, $y(t)$ – дифференцируемые функции, причем $x'(t)\neq 0$ и $x(t)$ имеет обратную. Тогда $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$.

Функцию $y=f(x)$, заданную параметрическими уравнениями, можно рассматривать как сложную функцию $y=y(\phi(x))$, где $t=\phi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 2. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{t}\sin t. \end{cases}$

При вычислении производных сложных функций в ряде случаев целесообразно функцию сначала прологарифмировать, а затем результат продифференцировать. Такая операция называется логарифмическим дифференцированием.

Пример 3. Продифференцировать функцию $y = \sqrt{x \cdot \sin x \cdot \sqrt[4]{1 - e^x}}$.

Логарифмическое дифференцирование используют для вычисления производной *степенно-показательной функции*

$$y = \left(u(x)\right)^{v(x)}.$$

Прологарифмируем, а затем продифференцируем данную функцию:

$$\ln y = \ln\left(u(x)\right)^{v(x)} \;\Rightarrow\; \ln y = v(x)\cdot \ln u(x)$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(v(x)\cdot \ln u(x)\right)' \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = v'\cdot \ln u + v\cdot \frac{1}{u}\cdot u'.$$

Следовательно, $y' = u^{v}\left(v'\cdot \ln u + v\cdot \dfrac{u'}{u}\right)$

или $\left(u^{v}\right)' = u^{v}\cdot \ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'.\quad (*)$

(*) определяет правило дифференцирования степенно-показательной функции: сумма производной показательной функции *v* (при условии *u*=const) и производной степенной функции *u* (при условии *v*=const).

Пример 4. Продифференцировать функцию $y = x^{x^2}$.

Производные высших порядков

Производная y' функции $y=f(x)$ так же является функцией аргумента x и называется *производной первого порядка*.

Если $y'=f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* функции y и обозначается y''.

Другие обозначения: $f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right).$

Производная от производной второго порядка (если она существует) называется производной третьего порядка: $y'''=(y'')'$.

И т.д.

Производной n-го порядка (или n-ой производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной 4-го порядка, производные обозначают римскими числами или арабскими числами в скобках:

$y^{IV}, \ y^{(4)}$

$y^{V}, \ y^{(5)}$

Пример 1. Найти производную 10-го порядка для функций

$y = e^x, \ y = x \cdot e^x.$

Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y(x)$ задана неявно функции в виде уравнения $F(x, y)=0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', получим производную первого порядка.

Далее продифференцируем по x первую производную, получим вторую производную неявной функции (в нее войдут x, y, y'). Подставляя найденное значение y' в выражение второй производной, выражаем y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения остальных производных высшего порядка.

Пример 2. Найти y'''_x, если $y \quad - \quad {}^2 = 0$.

Уральский федеральный университет

Производные высших порядков от функции, заданной параметически

Пусть функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Первая производная определяется формулой $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}.$

Находим вторую производную:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Таким образом, $y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$

Аналогично вычисляют производные 3, 4 и т.д. порядков.

Пример 3. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$