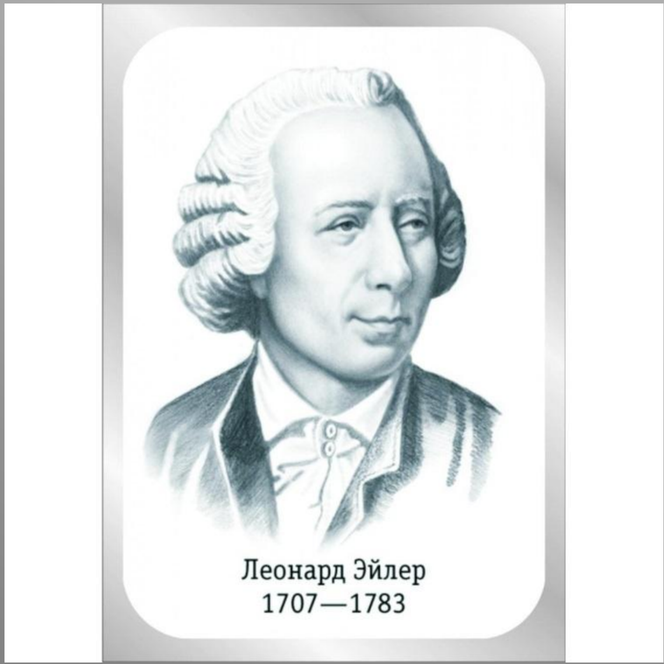
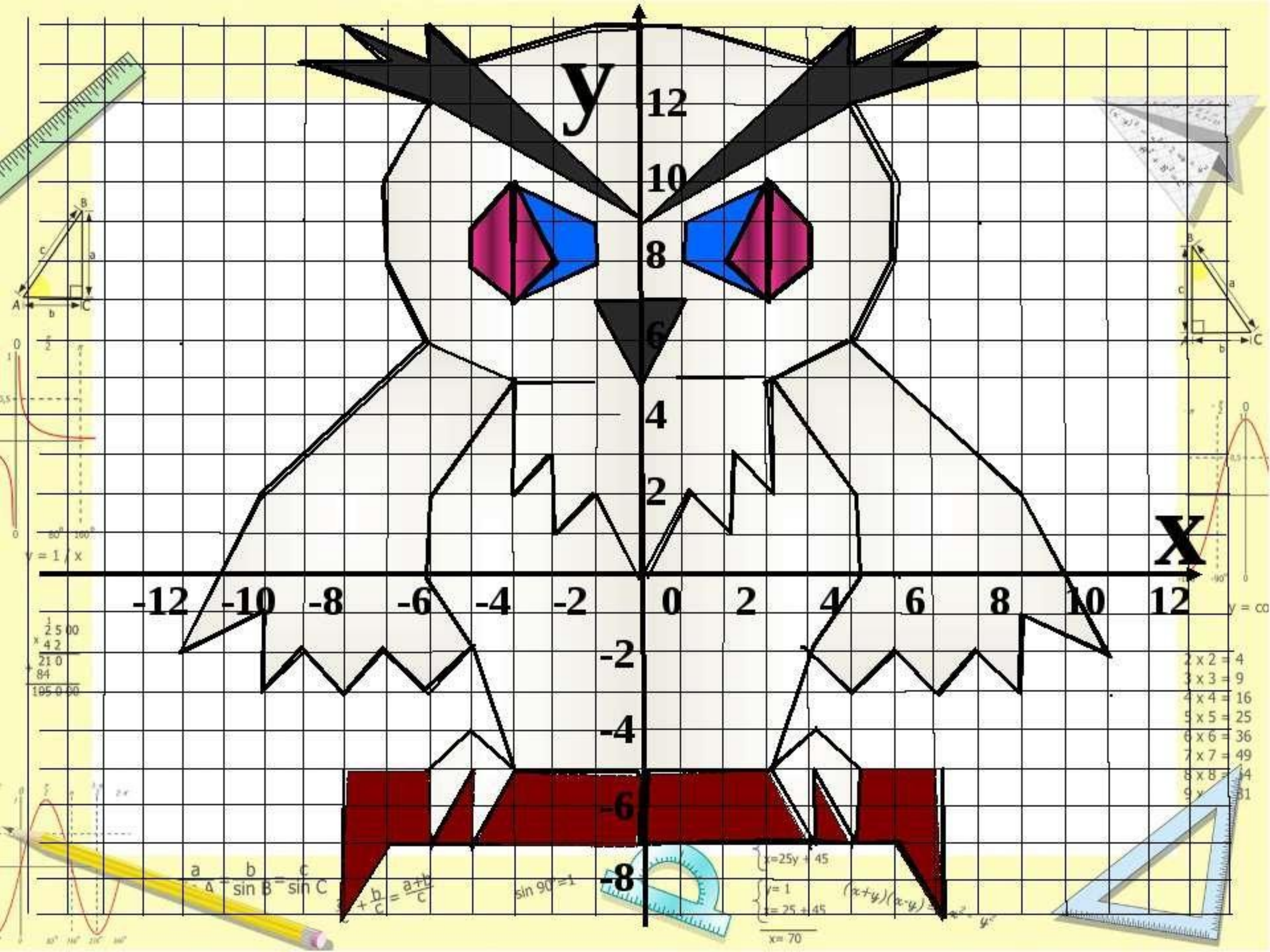
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рене Декарт

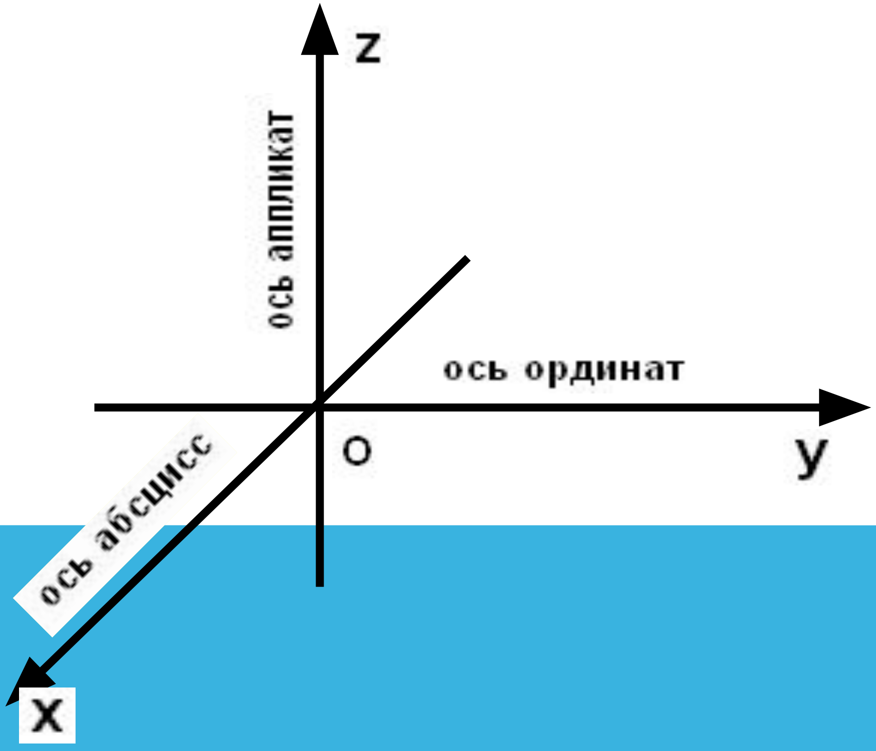
Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596-1650), поэтому прямоугольную систему координат называют также декартовой системой координат, а сами координаты – декартовыми координатами. Введение прямоугольных координат на плоскости позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи – к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется методом координат.

Понятие прямоугольная система координат в **пространстве** ввёл швейцарский, немецкий, российский математик Леонард Эйлер в XVIIIв.




y
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
x
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
y = 1 / x
2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
sin 90° =1
x= 70

Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат.

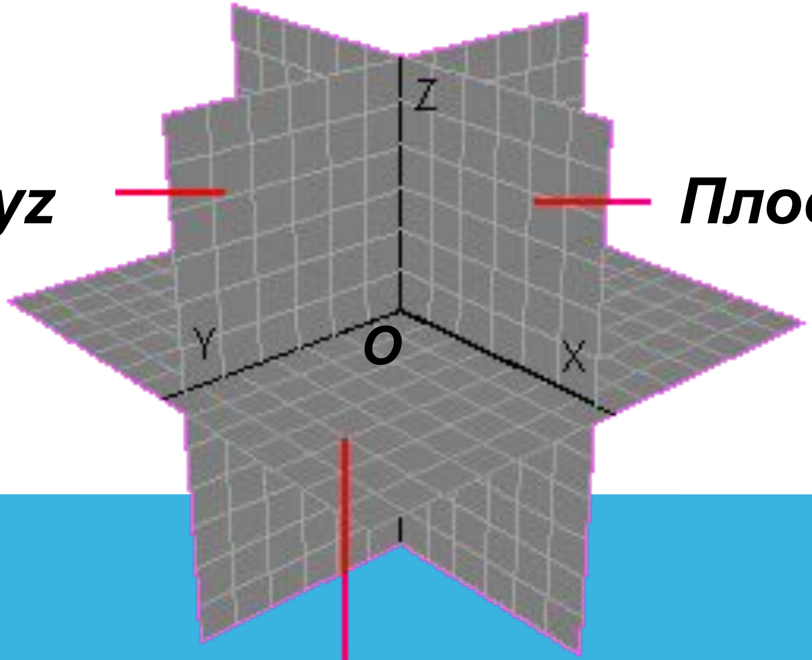


Ox – ось абсцисс,

Oy – ось ординат,

Oz – ось аппликат.

Три плоскости, проходящие через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются координатными плоскостями: Oxy, Oyz, Oxz.

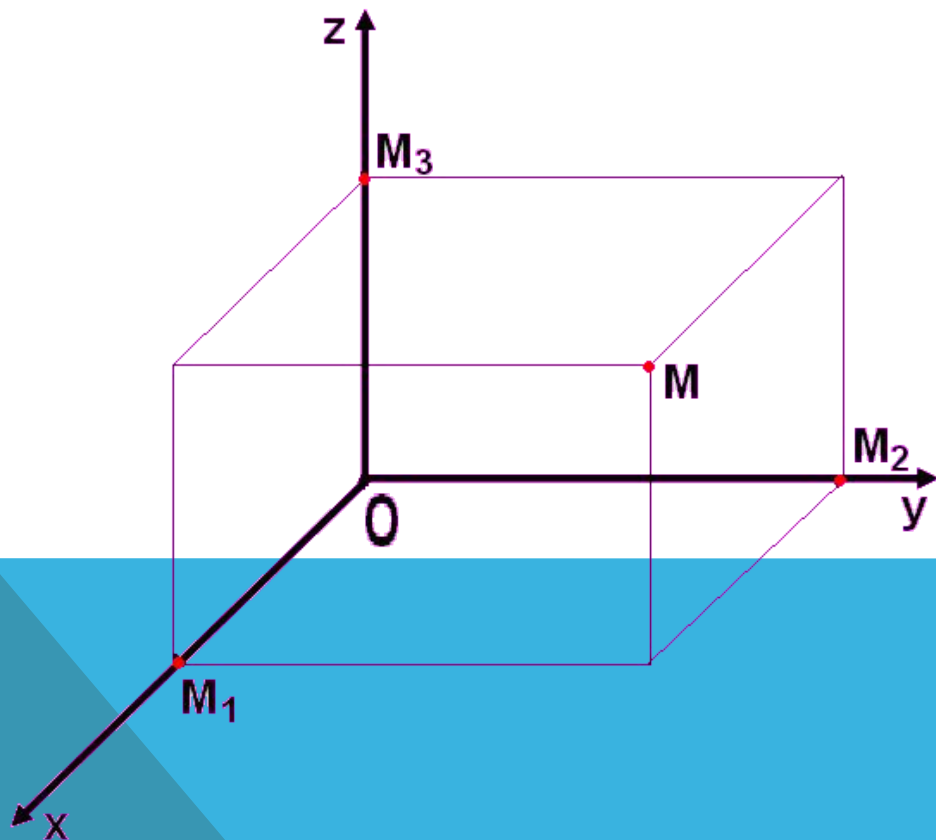


Плоскость Oyz

Плоскость Oxz

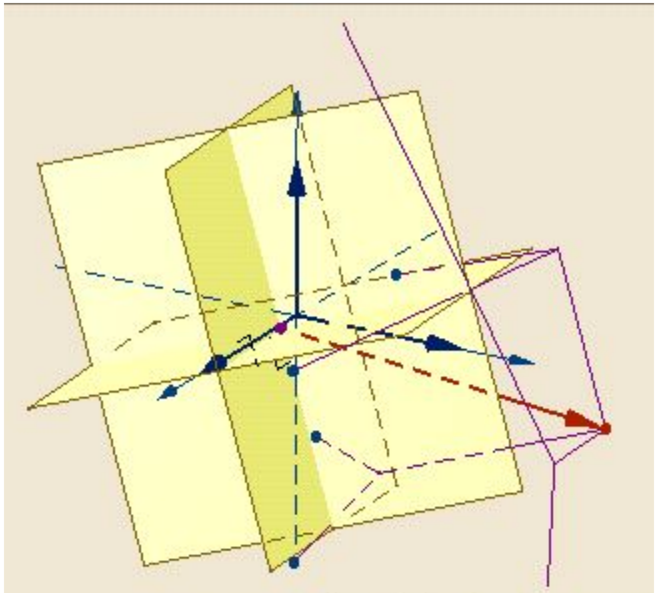
Плоскость Oxy

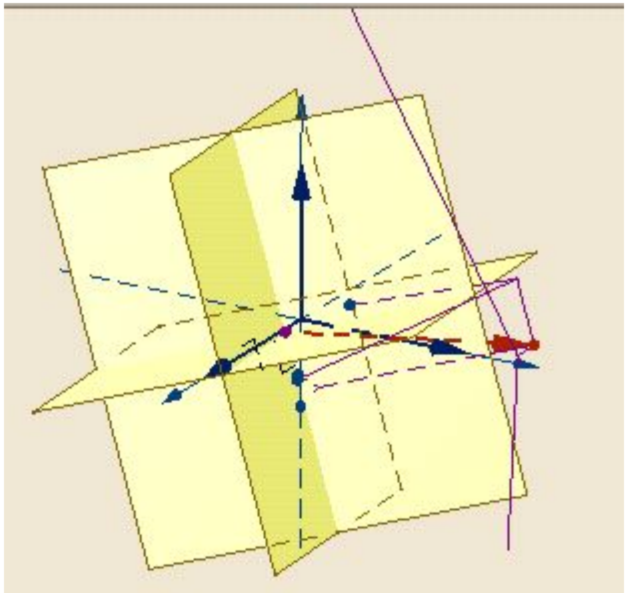
В прямоугольной системе координат каждой точке М пространства сопоставляется тройка чисел – её координаты: M (x, y, z), *где x – абсцисса, y – ордината, z - аппликата.*



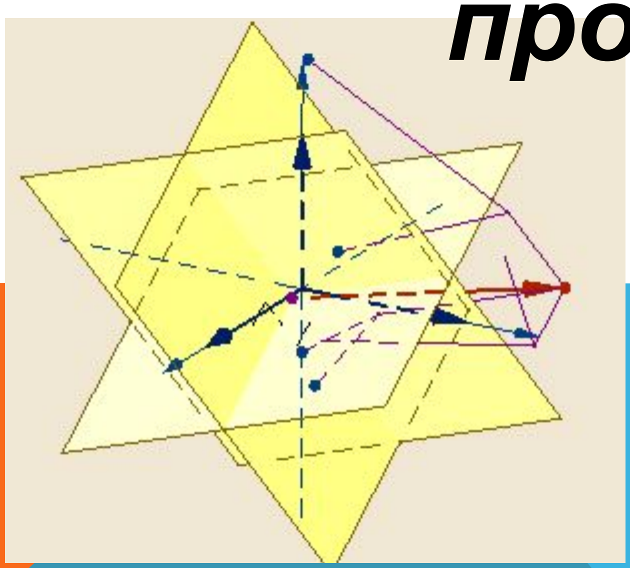
Точка лежит

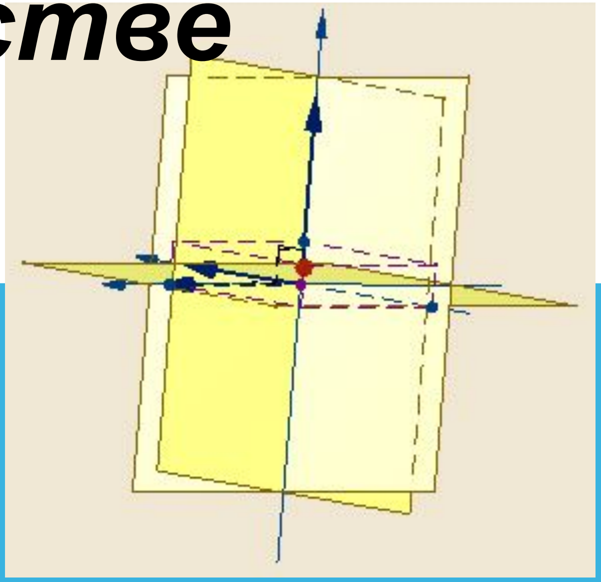
- **на оси**
  - Ox $(x,0,0)$
  - Oy $(0,y,0)$
  - Oz $(0,0,z)$
- **в координатной плоскости**
  - Oxy $(x,y,0)$
  - Oyz $(0,y,z)$
  - Oxz $(x,0,z)$





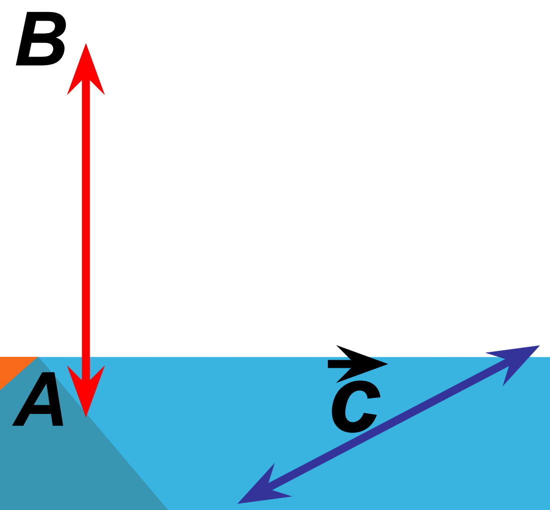
Координаты вектора в пространстве





ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой- концом, называется *вектором*.



Обозначение вектора

$\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}$

ЛЮБАЯ *ТОЧКА* ПРОСТРАНСТВА ТАКЖЕ МОЖЕТ РАССМАТРИВАТЬСЯ КАК *ВЕКТОР.* ТАКОЙ ВЕКТОР НАЗЫВАЕТСЯ **нулевым.**

$\vec{0}$

$\overrightarrow{TT}$

Обозначение нулевого вектора

$$\overrightarrow{TT},\ \vec{0}$$

ДЛИНА НЕНУЛЕВОГО ВЕКТОРА

- ***Длиной вектора*** $\overrightarrow{AB}$ **называется длина отрезка** ***AB.***
- **Длина вектора** $\overrightarrow{AB}$ **(вектора** $\vec{a}$**)** ***обозначается*** **так:**

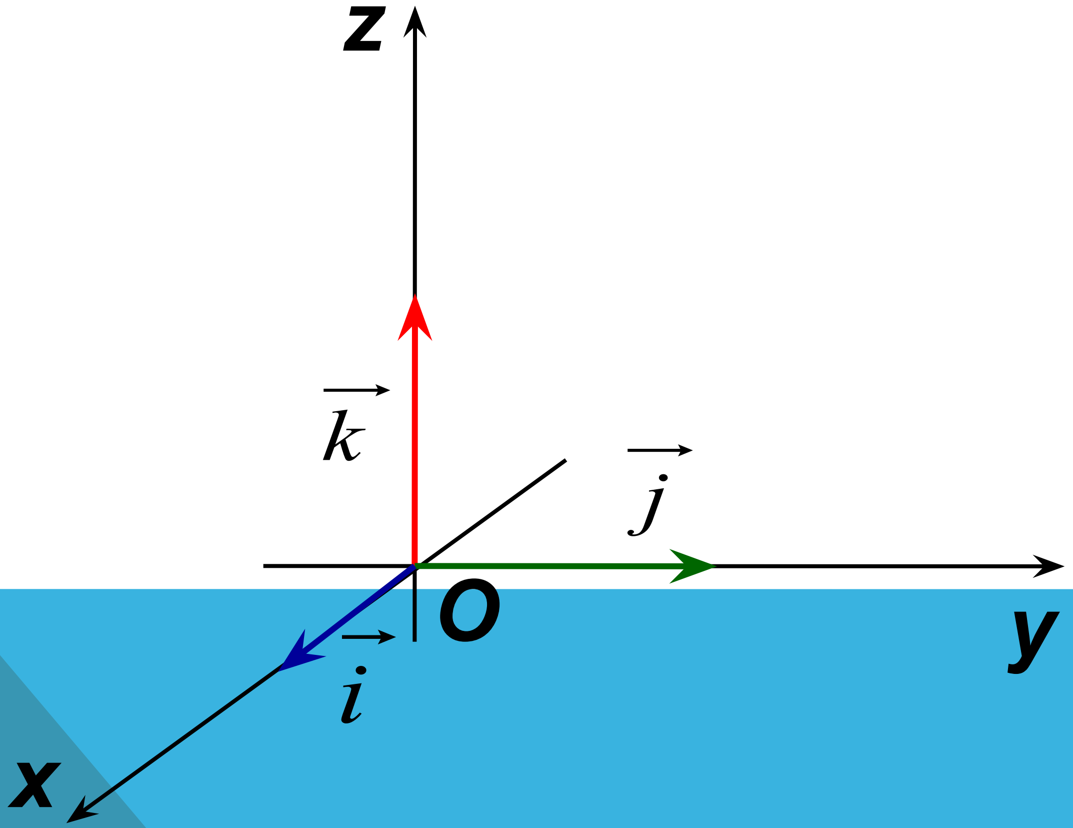
$$|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$$

- ***Длина нулевого вектора*** **считается равной** ***нулю:***

$$|\vec{0}| = 0$$

Единичный вектор – вектор, длина которого равна 1.

i – единичный вектор оси абсцисс, j – единичный вектор оси ординат, k – единичный вектор оси аппликат.



Любой вектор $\bar{a}$ можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде:

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Нулевой вектор можно представить в виде:

$$\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$$

Координаты равных векторов соответственно равны, т.е., если

$\bar{a}\{x1; y1; z1\} = \vec{b}\{x2; y2; z2\}$, *то*

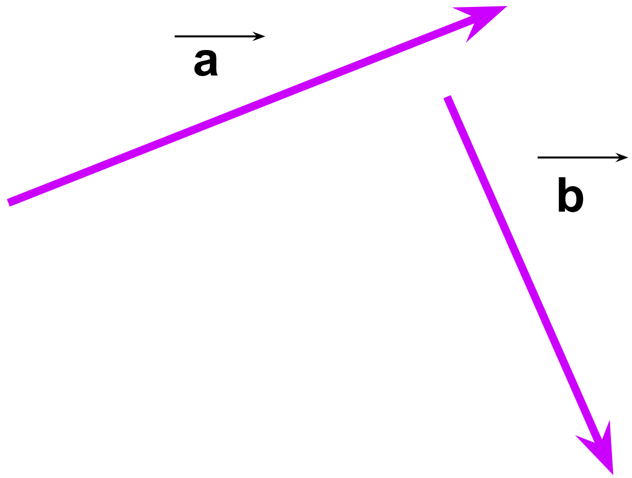
$x1 = x2,\ y1 = y2,\ z1 = z2.$

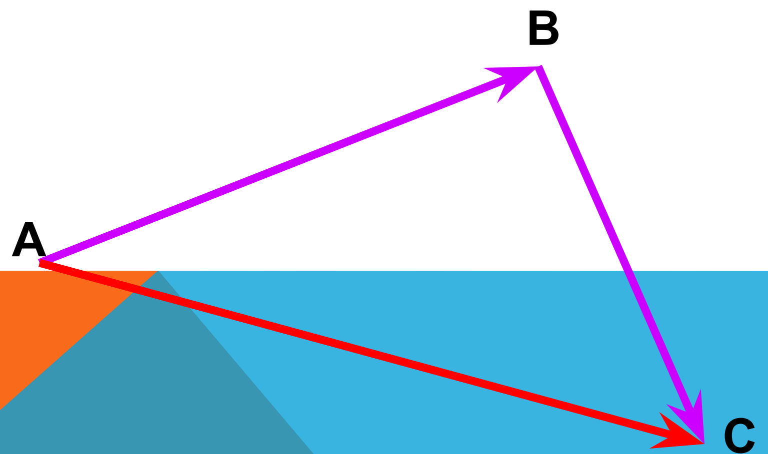
СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

- ***Сложение и вычитание векторов.***

1. Правило треугольника

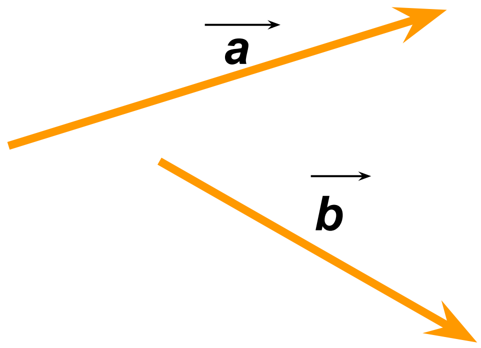
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

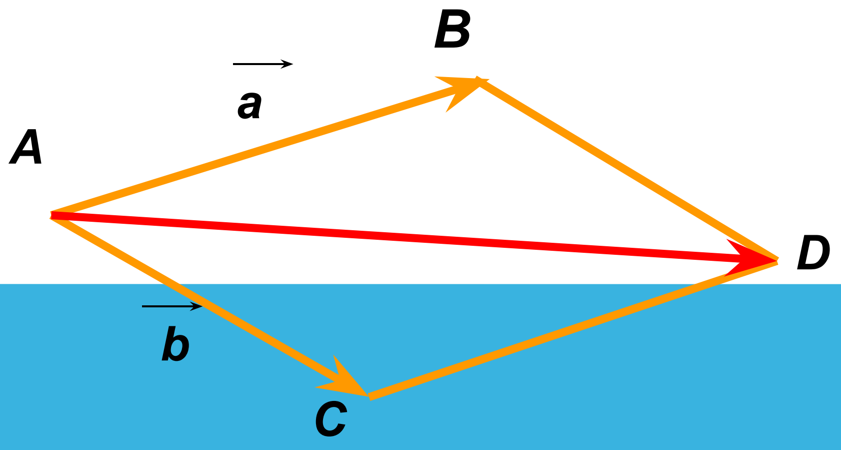




2. Правило параллелограмма

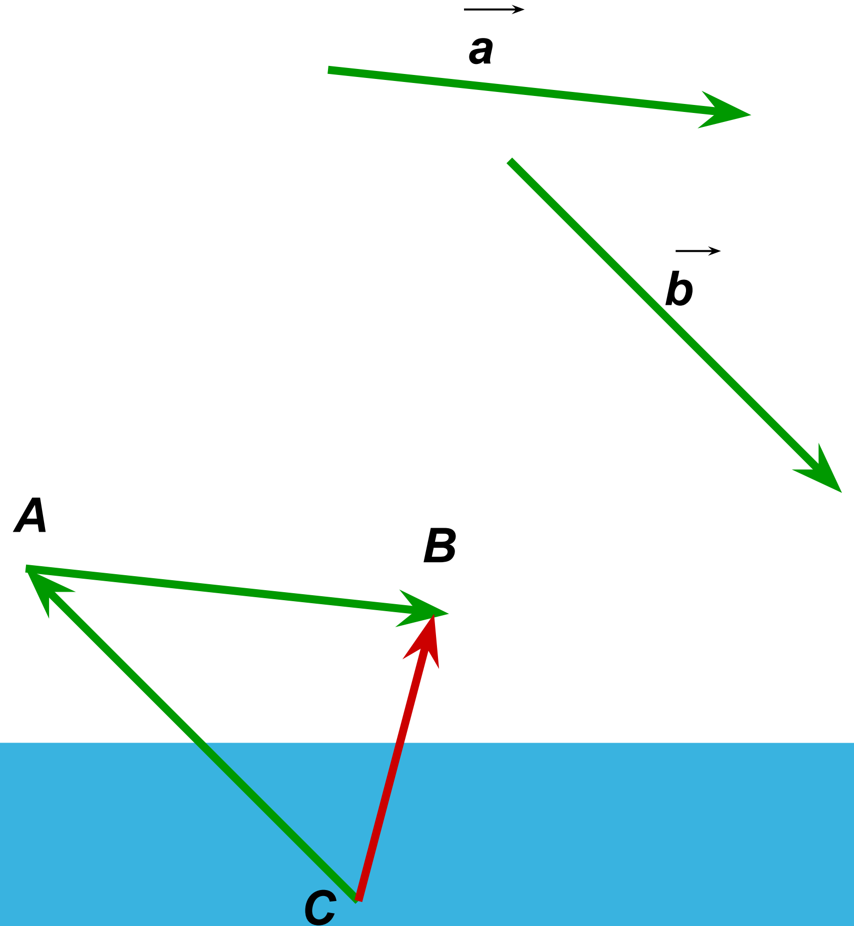
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = AD$, где AD – диагональ параллелограмма $ABCD$





3. Разность векторов

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$



Сумма векторов:

$\vec{a} + \vec{b} = \{ x1 + x2; y1 + y2; z1 + z2 \}$.

Разность векторов:

$\vec{a} - \vec{b} = \{ x1 - x2; y1 - y2; z1 - z2 \}$.

Произведение вектора на число:

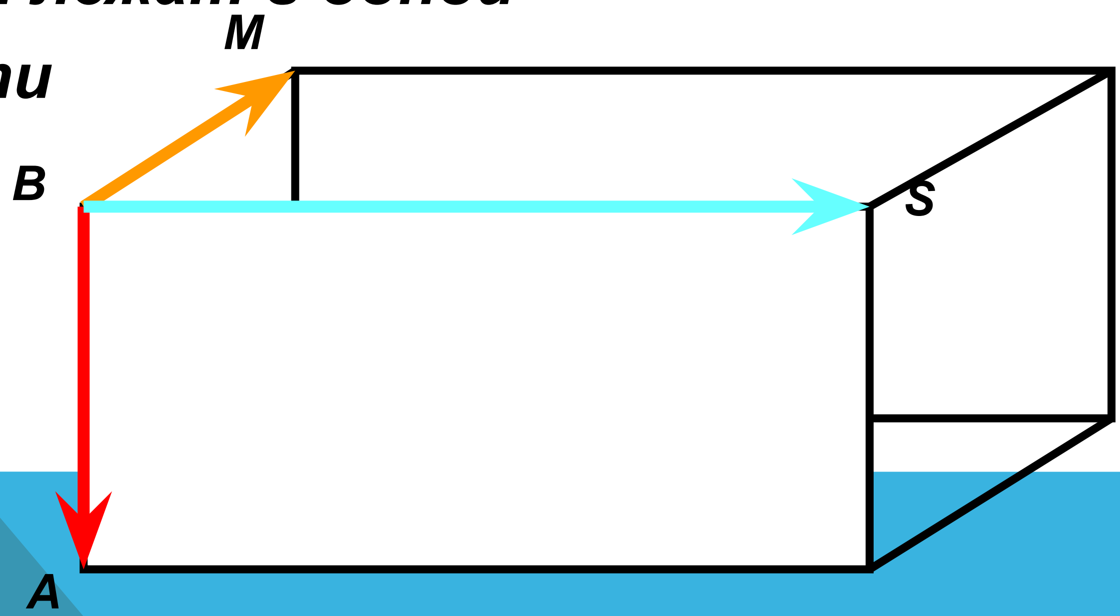
$\alpha\bar{a} = \{ \alpha x; \alpha y; \alpha z \}$.

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО КООРДИНАТНЫМ ВЕКТОРАМ

КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

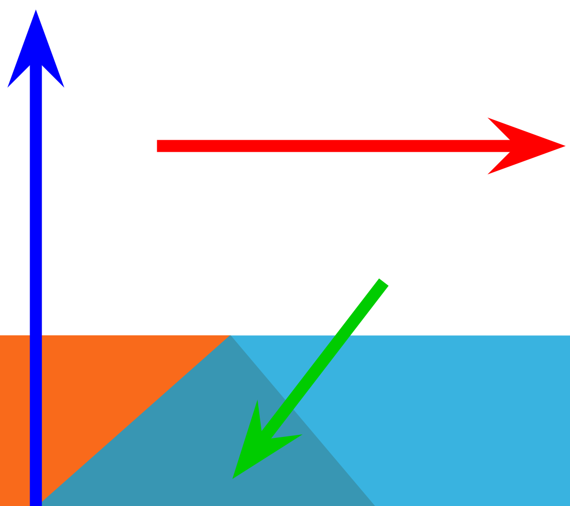
Компланарные векторы

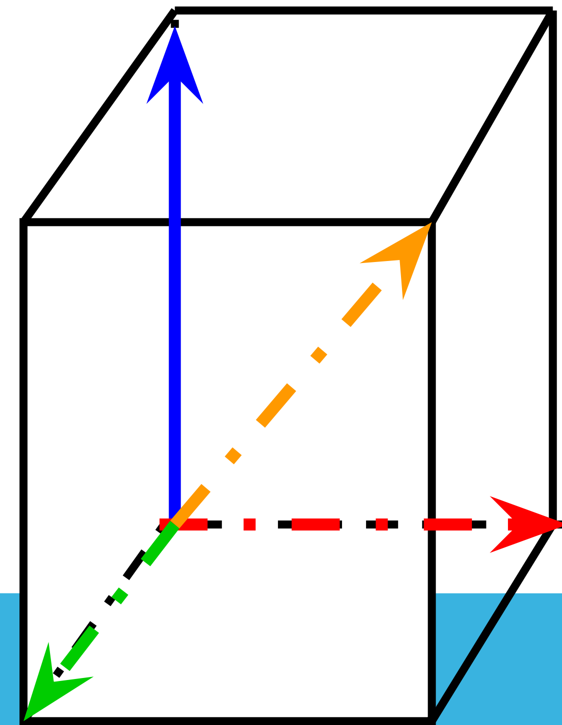
При откладывании из одной точки они лежат в одной плоскости



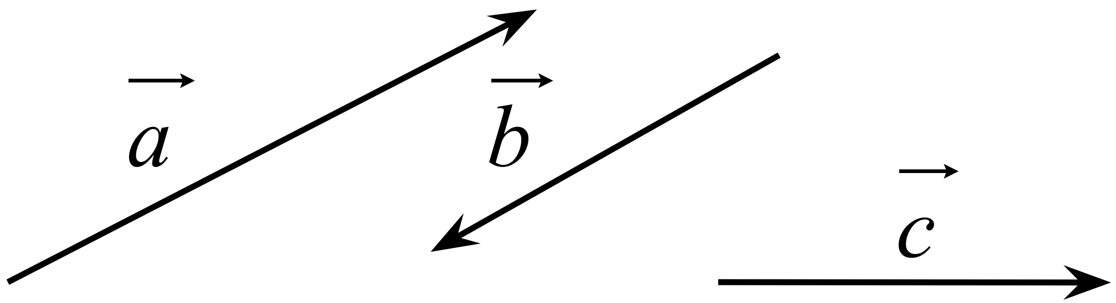
***Правило параллелепипеда* (для трех некомпланарных векторов)**

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$, где OC – диагональ параллелепипеда





Векторы называются коллинеарными, если они параллельны, или лежат на одной прямой.

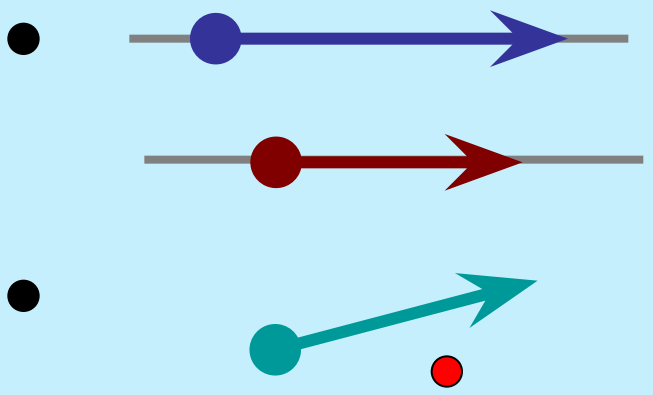


Если векторы $\vec{a}$ { x1; y1; z1 } и $\vec{b}$ { x2; y2; z2 } коллинеарны, то:

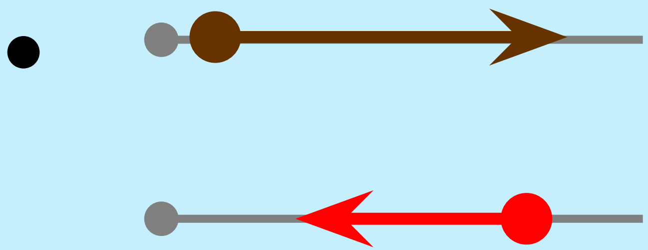
$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=k$$

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Сонаправленные векторы

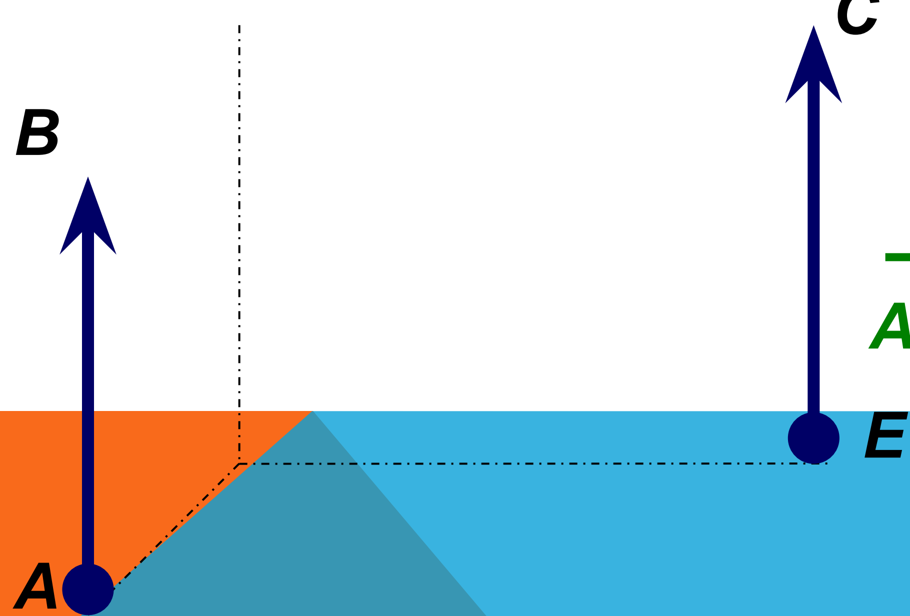


Противоположно направленные векторы



РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

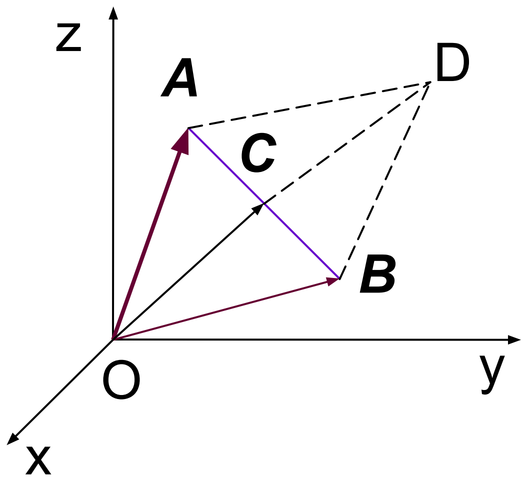
Векторы называются *равными*, если они *<u>сонаправлены</u>* и их *<u>длины равны</u>*.



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$, *так как*

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EC}$ *и* $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{EC}|$

1. Координаты середины отрезка.



A (x1; y1; z1), B (x2; y2; z2),

C (x; y; z) – середина AB.

$\overrightarrow{OC}$ = ½ ($\overrightarrow{OA}$ + $\overrightarrow{OB}$), *тогда*

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\ z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$$

2. Вычисление длины вектора по его координатам:

если $\vec{a}$ { x; y; z }, *то* $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3. Расстояние между двумя точками:

$$|\overrightarrow{AB}|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

№1. Даны векторы $\vec{a}$ {2; -4; 3} и $\vec{b}$ {-3; 1/2; 1}. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$.

№2. Даны векторы $\vec{a}$ {1; -2; 0}, $\vec{b}$ {3; -6; 0}, $\vec{c}$ {0; -3; 4}. Найдите координаты вектора

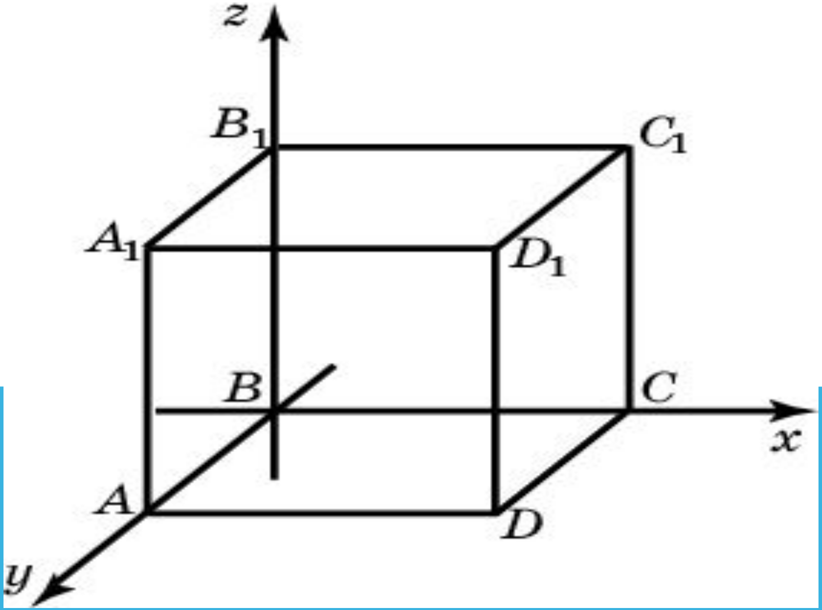
$$\vec{p} = 2\vec{a} - 1/3\vec{b} - \vec{c}.$$

№3. Найдите значения m и n, при которых векторы $\vec{a}$ {6; n; 1} и $\vec{b}$ {m; 16; 2} коллинеарны.

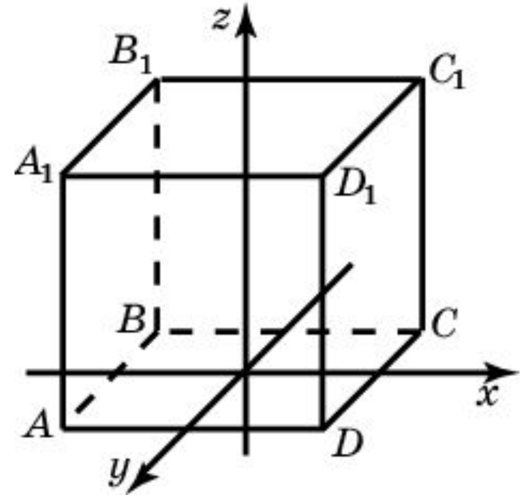
4)Найдите координаты ортогональных проекций точек $A(1, 3, 4)$ и $B(5, -6, 2)$ на: а) плоскость Oxy; б) плоскость Oyz; в) ось Ox; г) ось Oz.

5)Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны нулю; ж) все координаты равны нулю?

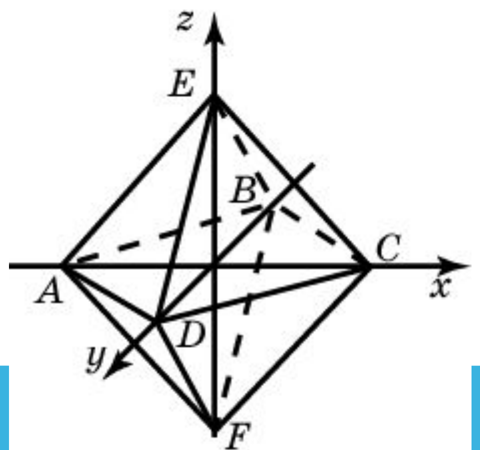
6)ДАН КУБ *A*...*D*1, РЕБРО КОТОРОГО РАВНО 1. НАЧАЛО КООРДИНАТ НАХОДИТСЯ В ТОЧКЕ *B*. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЛУЧИ ОСЕЙ КООРДИНАТ СООТВЕТСТВЕННО *BA*, *BC* И *BB*1. НАЗОВИТЕ КООРДИНАТЫ ВСЕХ ВЕРШИН КУБА.



1)Куб *A*...*D*1 помещен в прямоугольную систему координат так, что началом координат является центр нижнего основания куба, ребра куба параллельны соответствующим осям координат, вершина *A* имеет координаты (-2, 2, 0). Найдите координаты всех остальных вершин куба.



2)Центром октаэдра является начало координат. Две его вершины имеют координаты (1, 0, 0) и (0, 1, 0). Найдите координаты остальных вершин октаэдра.



3)На каком расстоянии находится точка $A(1, -2, 3)$ от координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz?

№4. ДАНЫ ВЕКТОРЫ $\vec{A}\{1; -3; -1\}$ И $\vec{B}\{-1; 2; 0\}$. НАЙДИТЕ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$.

№5. ДАНЫ ВЕКТОРЫ $\vec{A}\{2; 4; -6\}$, $\vec{B}\{-3; 1; 0\}$, $\vec{C}\{3; 0; -1\}$. НАЙДИТЕ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА $\vec{P} = -1/2\vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C}$.

№6. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЯ M И N, ПРИ КОТОРЫХ ВЕКТОРЫ $\vec{A}\{-4; M; 2\}$ И $\vec{B}\{2; -6; N\}$ КОЛЛИНЕАРНЫ.

МОГУТ ЛИ БЫТЬ РАВНЫМИ ВЕКТОРЫ НА РИСУНКЕ? ОТВЕТ ОБОСНУЙТЕ.

- **Рисунок № 1**

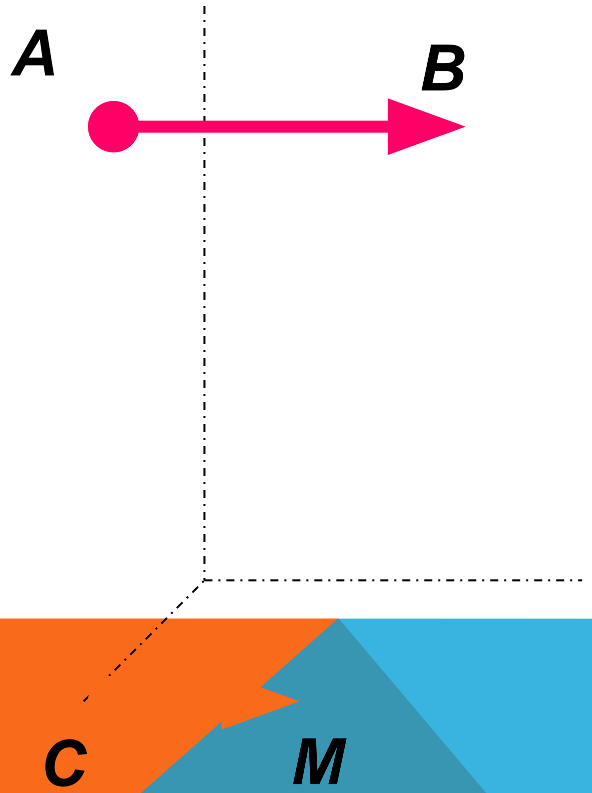


Рисунок № 2