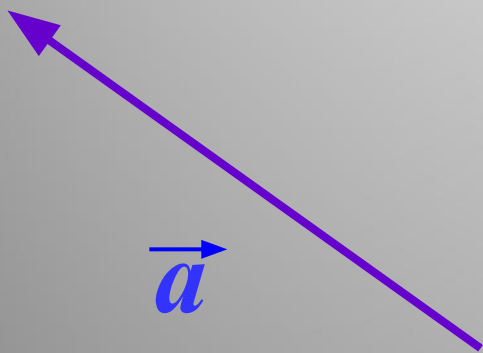
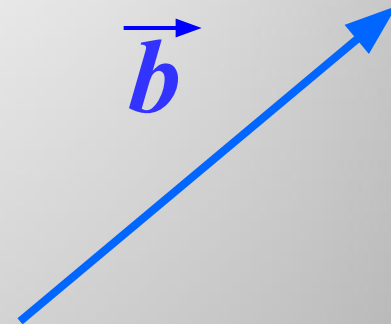
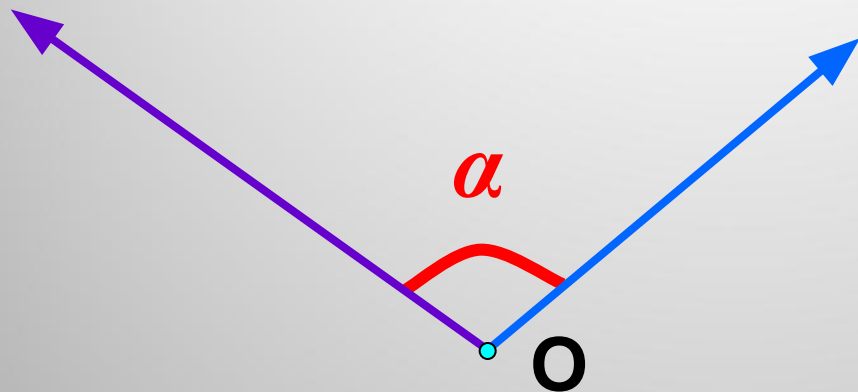


**Угол между векторами.
Скалярное
произведение векторов**

Угол между векторами

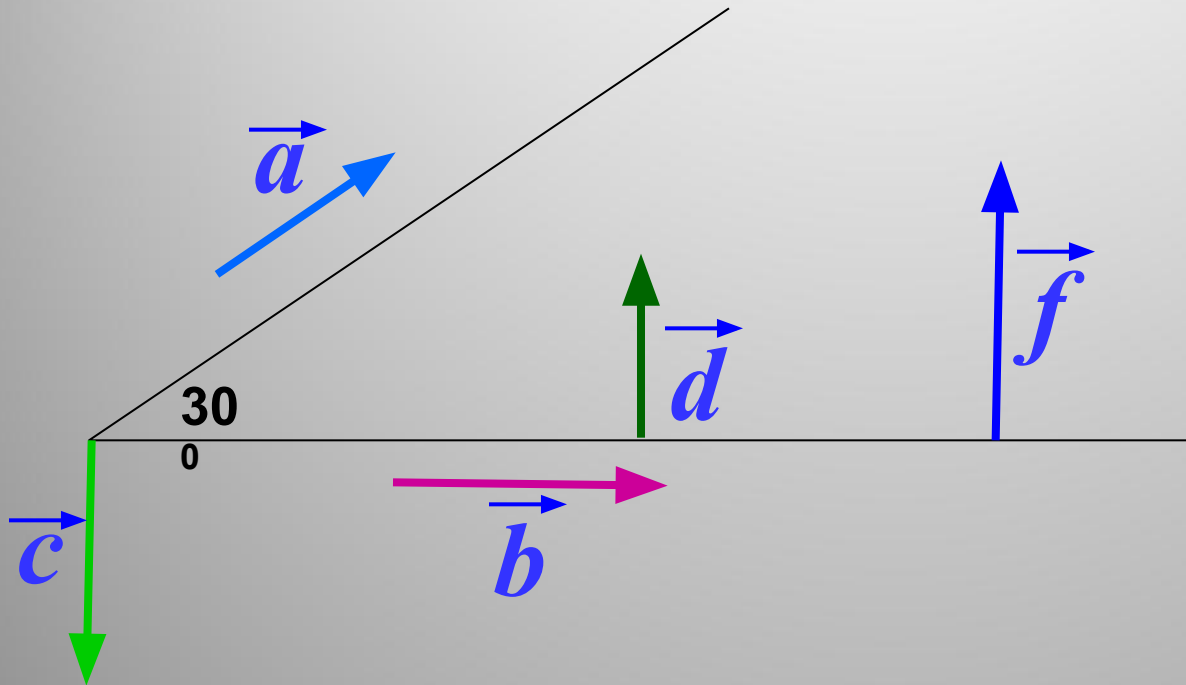


Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен α .

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$$

Найдите угол между векторами

векторами



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^{\circ}$$

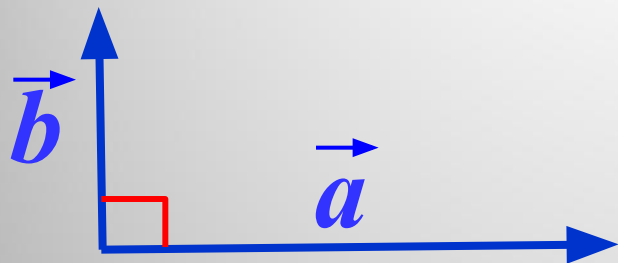
$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^{\circ}$$

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

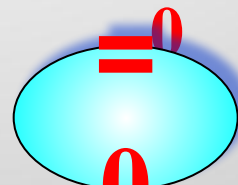
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Частные случаи



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90$$

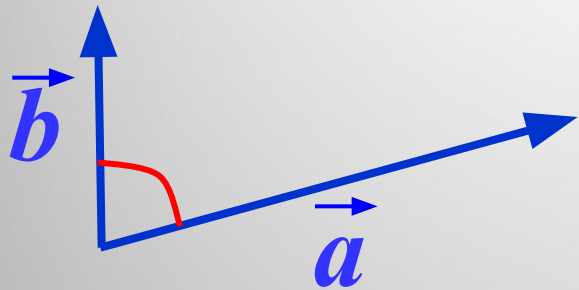


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

1. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

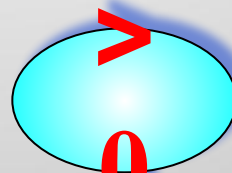
Частные случаи



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

90

0



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

>

0

2. Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами острый.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

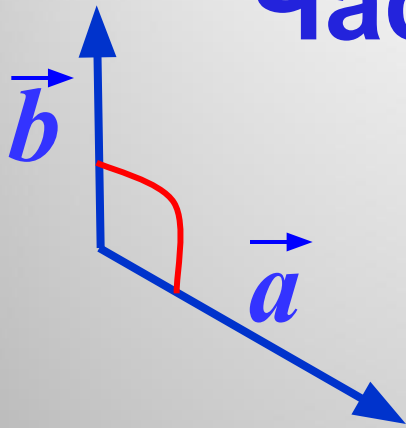


$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

90

0

Частные случаи



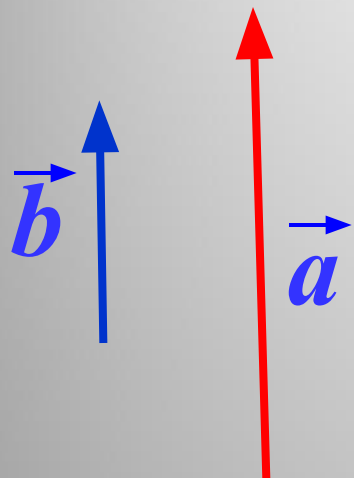
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

3. Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

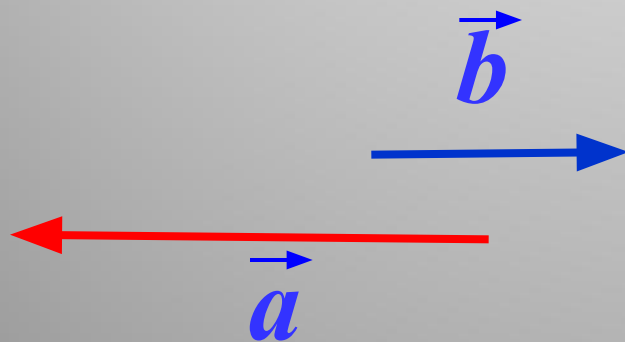
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

Частные случаи



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

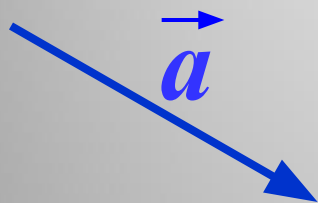


$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Частные случаи

$$\begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \vec{a} \quad \vec{a} \\ \hline = \\ 0^0 \end{array}$$



1

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

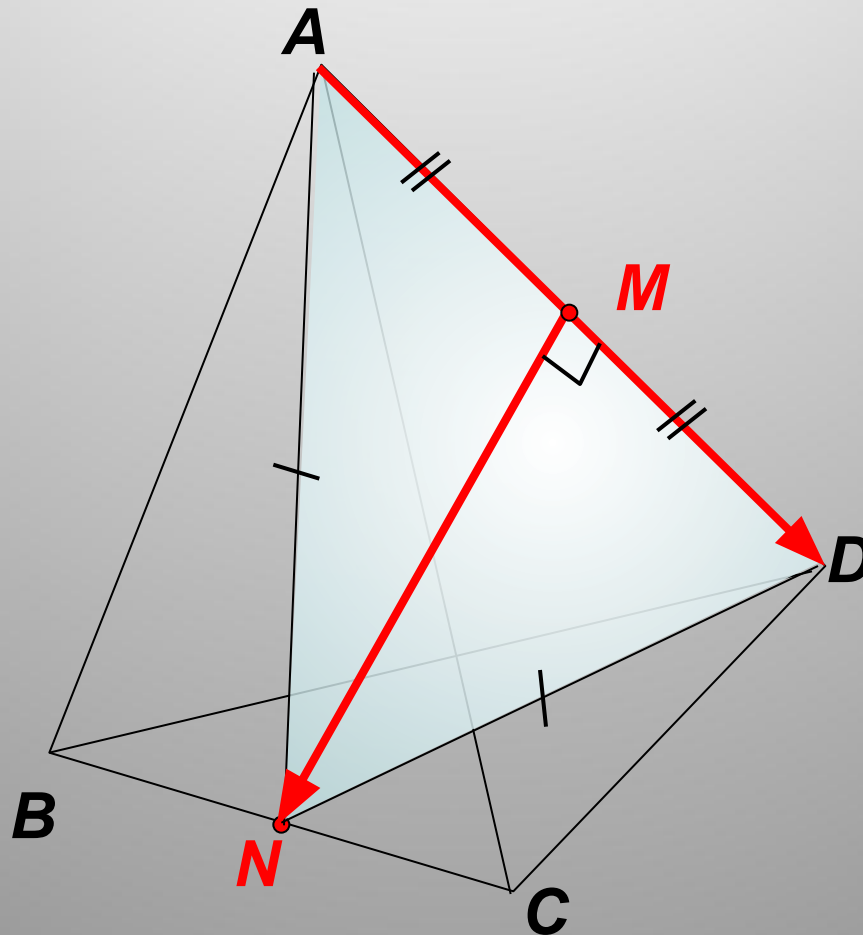
Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется
скалярным квадратом вектора \vec{a} и обозначается \vec{a}^2

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Задача

Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC . Докажите, что $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$



Формула для нахождения
скалярного произведения
через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Пример №1

Найти скалярное произведение
векторов:

$$\vec{a} \{-6; 9; 5\} \qquad \vec{b} \{-1; 0; 7\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 41$$

Пример №2

Найти скалярное произведение
векторов:

$$\vec{a} \{0; 0; 4\} \qquad \vec{b} \{22; 1; 8\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 32$$

Пример №3

Найти скалярное произведение
векторов:

$$\vec{a} \{1; 7; 9\} \qquad \vec{b} \{-2; 4; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 0 = 26$$

Проверочная работа

1. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{1; 10; 7\}$$

$$\vec{b} \{0; 7; 0\}$$

Проверочная работа

2. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{7; 25; 0\}$$

$$\vec{b} \{11; 0; 54\}$$

Проверочная работа

3. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-2; 0; 3\}$$

$$\vec{b} \{1; -11; 1\}$$

Проверочная работа

4. Найти скалярное произведение векторов:



$$a \{ \sin(90^0); 2; 3 \}$$



$$b \{ 3; 2; 1 \}$$

Даны векторы :

$$a \{-1; 2; 3\}$$

$$b \{5; x; -1\}$$

При каком значении x векторы
перпендикулярны?

Вычислить угол между векторами:

$$\vec{a} \{2; -2; 0\}$$

$$\vec{b} \{3; 0; -3\}$$