

Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия № , г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Скалярное произведение векторов

Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"

Угол между векторами



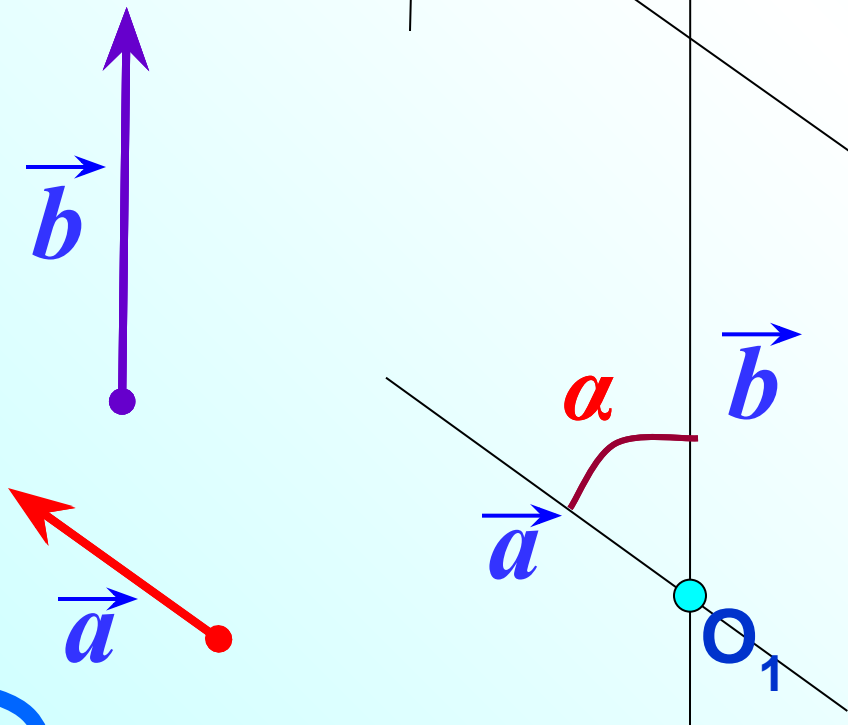
Лучи OA и OB образуют угол AOB.

Градусную меру этого угла обозначим буквой α

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен α

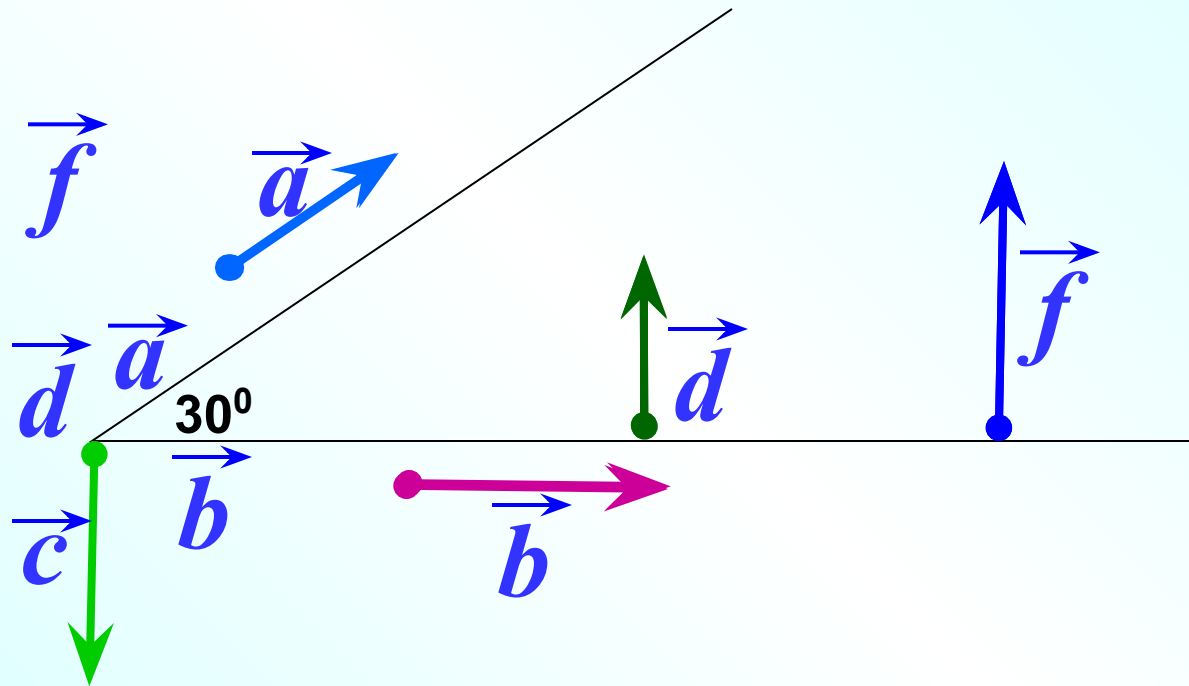
Угол между векторами

Градусная мера угла α не зависит от выбора точки O , от которой откладывают векторы \vec{a} и \vec{b}



Обоснуем это с помощью рисунка.

Найти углы между векторами.



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^{\circ}$$

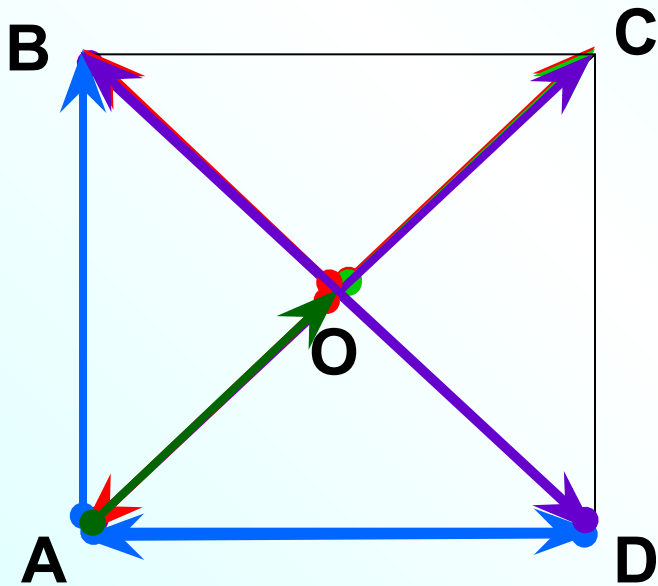
Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \perp \vec{f}$$

№ 1039 Диагонали квадрата пересекаются в точке O .
Найдите углы между векторами.



$$\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} = 45^\circ$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DA}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{OA}, \vec{OC}} = 180^\circ$$

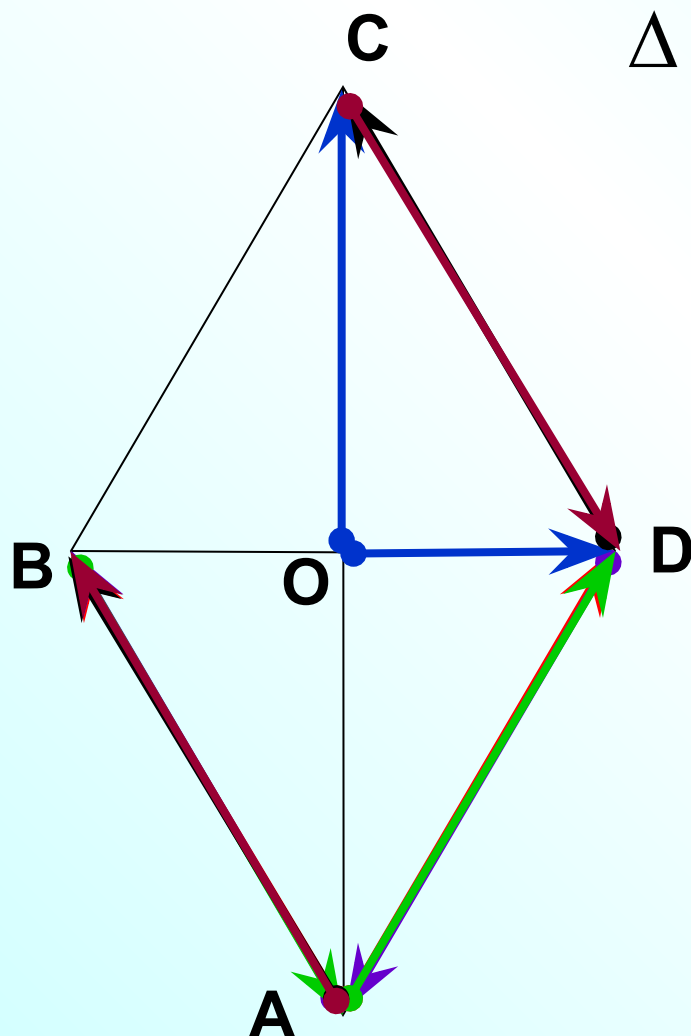
$$\widehat{\vec{AC}, \vec{BD}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{AD}, \vec{DB}} = 135^\circ$$

$$\widehat{\vec{AO}, \vec{OC}} = 0^\circ$$

№ 1040 Диагонали ромба пересекаются в точке O ,
 диагональ BD равна стороне ромба.
 Найдите углы между векторами.

$\triangle BDC - p / cm$



$$\widehat{\vec{AB}, \vec{AD}} = 60^\circ$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DA}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{BA}, \vec{AD}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{OC}, \vec{OD}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DC}} = 0^\circ$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}} = 180^\circ$$

Сумма векторов – вектор.

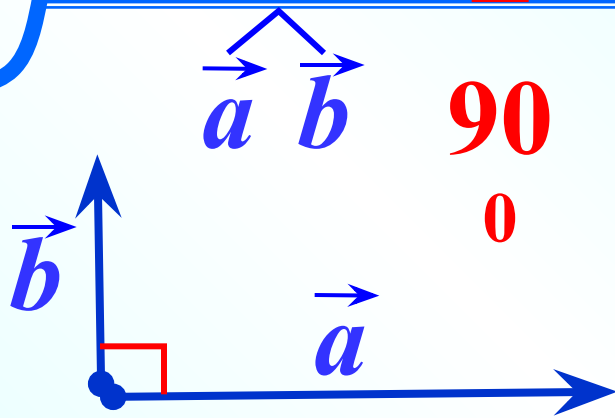
Разность векторов – вектор.

Произведение вектора на число – вектор.

Скалярное произведение векторов – число.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

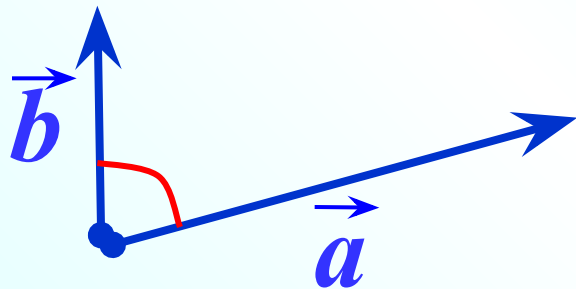
Если векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \vec{b} \begin{matrix} < \\ 90 \\ 0 \end{matrix}$$



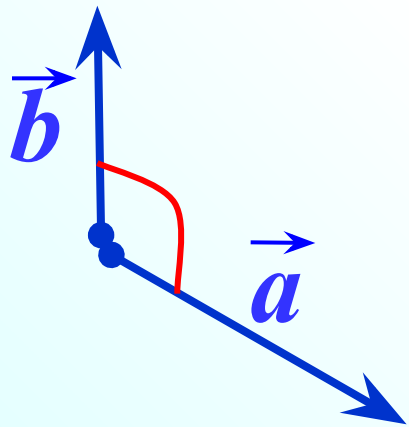
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \begin{matrix} > \\ 0 \\ > \\ 0 \end{matrix}$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \vec{b} \begin{matrix} < \\ 90 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

90°

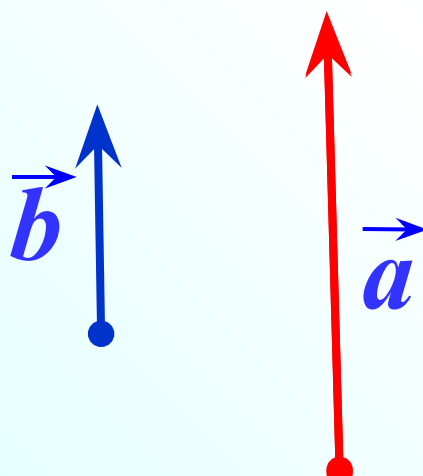


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

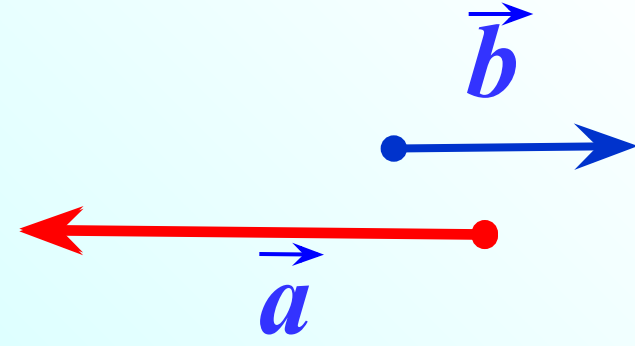
90°



Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{1}{\cos} 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

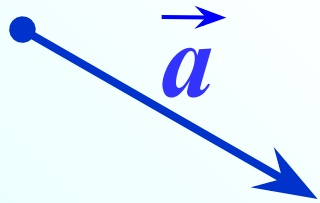


Если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{-1}{\cos} 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0^0$$



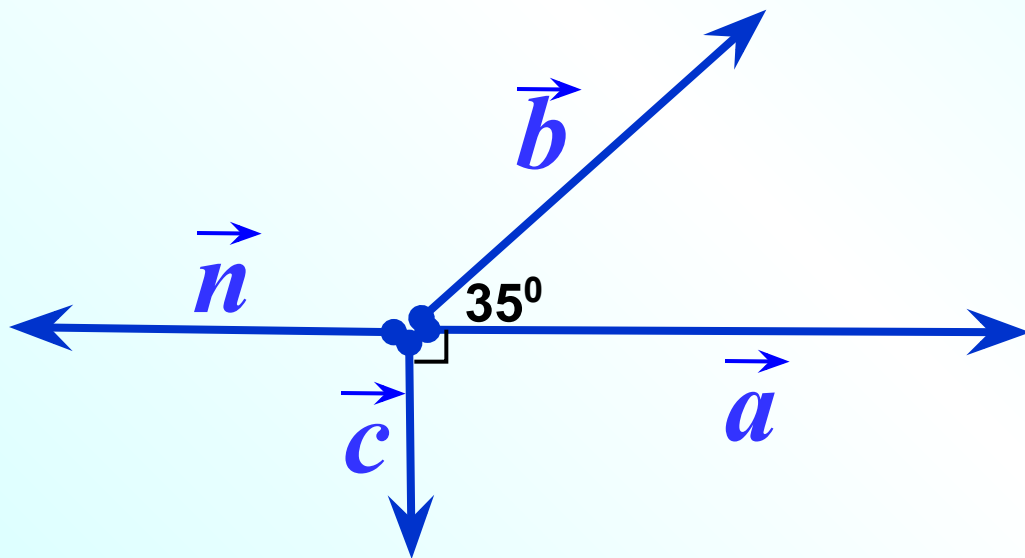
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos \overset{\textcircled{1}}{0^0} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

Скалярное произведение $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ называется
скалярным квадратом вектора \overrightarrow{a} и обозначается \overrightarrow{a}^2

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

Определите знак
скалярного произведения.



$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a}$$

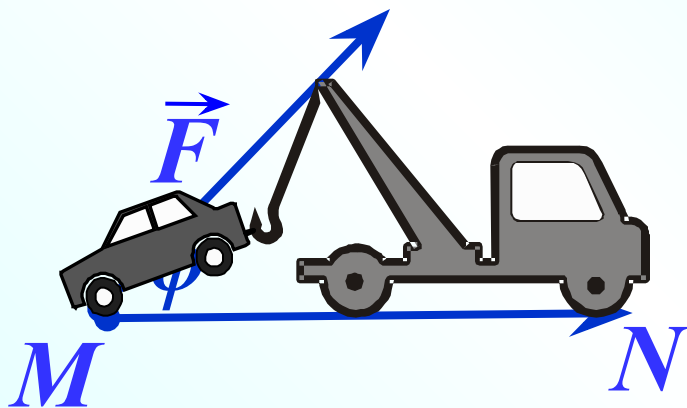
$$\vec{a} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n}$$

\vee
 \perp
 \perp
 \perp
 \vee
 \perp
 \parallel
 \perp
 \perp

Скалярное произведение в физике



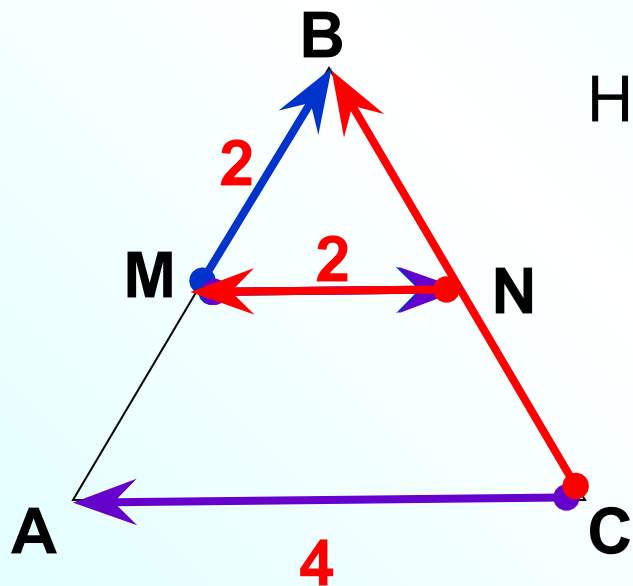
Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы \vec{F} при перемещении тела из точки M в точку N равна произведению силы \vec{F} и перемещения \vec{MN} на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \phi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$

ΔABC – $p/cm.$, MN – средняя линия

Найти скалярное произведение векторов



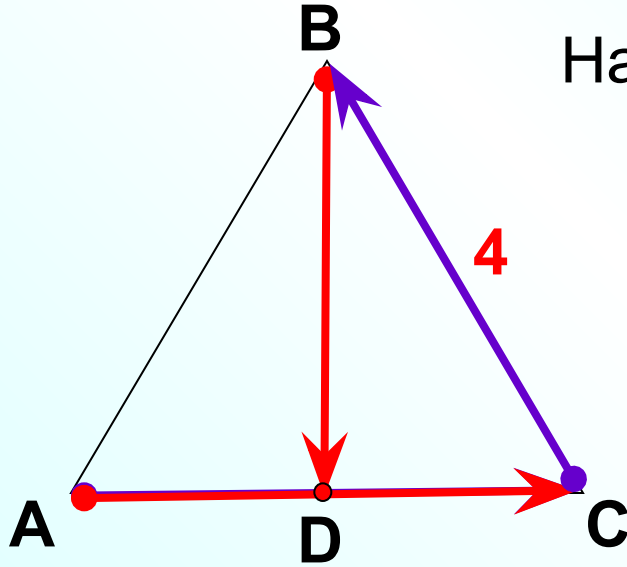
$$\begin{aligned}\vec{MN} \cdot \vec{MB} &= |\vec{MN}| \cdot |\vec{MB}| \cos \widehat{MN, MB} = \\ &= 2 \cdot 2 \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{MN} \cdot \vec{CA} &= |\vec{MN}| \cdot |\vec{CA}| \cos \widehat{MN, CA} = \\ &= 2 \cdot 4 \cos 180^\circ = 8 \cdot (-1) = -8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{NM} \cdot \vec{CB} &= |\vec{NM}| \cdot |\vec{CB}| \cos \widehat{NM, CB} = \\ &= 2 \cdot 4 \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\end{aligned}$$

$\Delta ABC - p / ct., D - \text{середина } AC$

Найти скалярное произведение векторов



$$\vec{CB} \cdot \vec{CB} = \vec{CB}^2 = |\vec{CB}|^2 = 4^2 = 16$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BC} \cdot \vec{BC} = -\vec{BC}^2 =$$

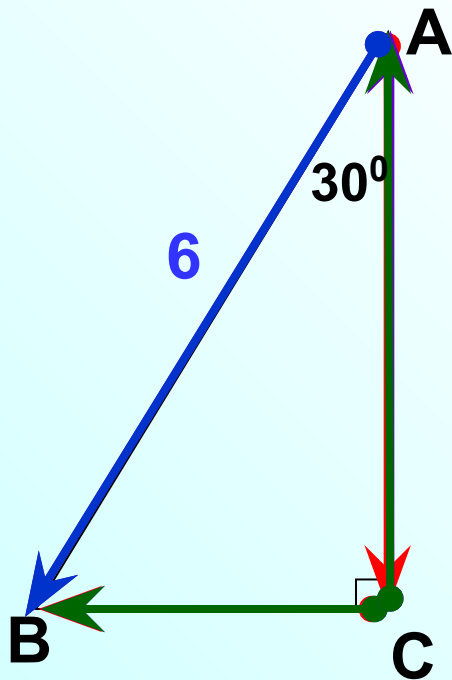
$$-|\vec{BC}|^2 = -4^2 = -16$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{CB} &= |\vec{AC}| \cdot |\vec{CB}| \cos \widehat{AC, CB} = 4 \cdot 4 \cos 120^\circ = \\ &= 16 \cdot (-\cos 60^\circ) = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8 \end{aligned}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$$

т.к. $\vec{AC} \perp \vec{BD}$

Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание



$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} = \dots$$

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} = \dots$$

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB} = \dots$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \dots$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = \dots$$

...

... 150°

... 60°

... 0 Т.к. $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA}$

... $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = -|\overrightarrow{BA}|^2 = -6^2 = -36$

Маленький тест

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}| \cos \widehat{BC, BA} = 6 \cdot 3 \cos 60^\circ = 18 \cdot \frac{1}{2}$$

1

$9\sqrt{3}$

ПОДУМАЙ

!

2

9

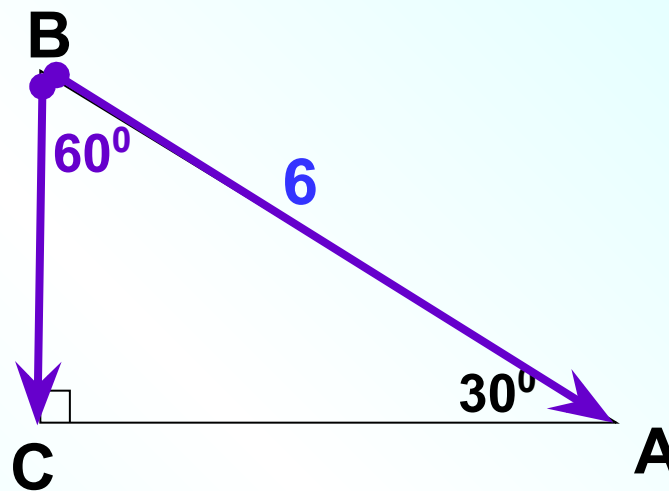
ВЕРНО!

3

18

ПОДУМАЙ

!



Проверка



Скалярное произведение векторов

\vec{AC} и \vec{BA} : отрицательно, т.к. угол между векторами тупой

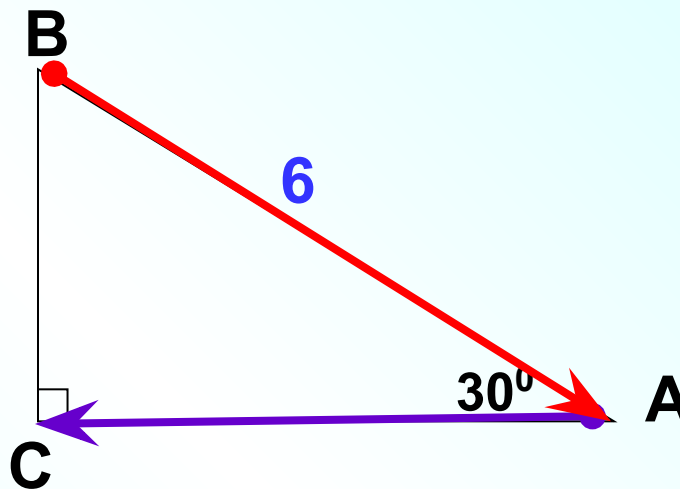
ВЕРНО!

1 отрицательно;

ПОДУМАЙ

2 равно нулю;

3 положительно.



ПОДУМАЙ

Проверка (2)



Скалярное произведение координатных векторов

\vec{i} и \vec{j} : равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1

1

ПОДУМАЙ!

2

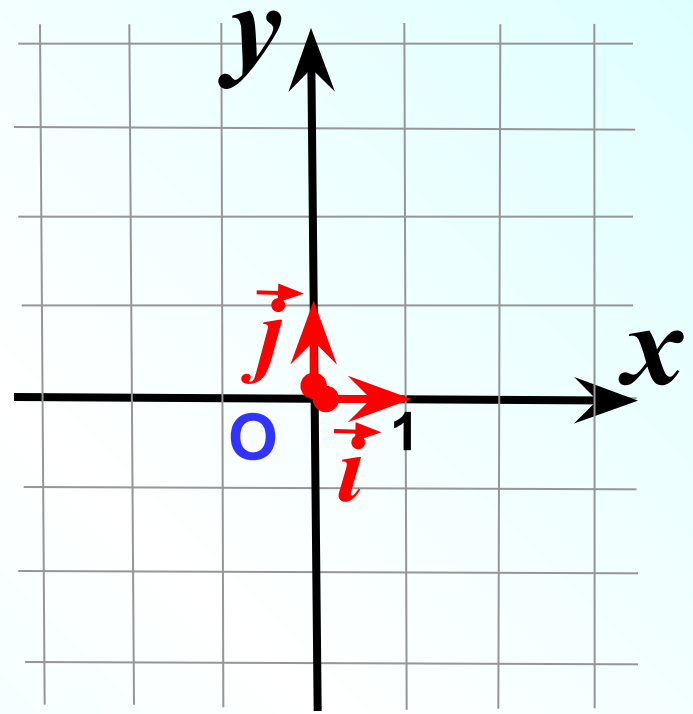
-1

ПОДУМАЙ!

3

0

ВЕРНО!



Проверка



Скалярный квадрат вектора \vec{i} равен:

ВЕРНО!

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1 1

2 -1

ПОДУМАЙ!

3 0

ПОДУМАЙ!

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$$

Проверка



Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$,
то векторы \vec{a} и \vec{b} :

ВЕРНО!

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

$$12 = 3 \cdot 4 \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

1 сонаправлены;

2 перпендикулярны;

3 противоположно направлены.

ПОДУМАЙ!

$$\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 1$$

ПОДУМАЙ!

если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$

Проверка (4)



Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = -20$, $|\vec{x}| = 4$, $|\vec{y}| = 5$,
то векторы \vec{x} и \vec{y} :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos \widehat{x y}$$

$$-20 = 4 \cdot 5 \cos \widehat{x y}$$

ПОДУМАЙ

!

1

сонаправлены;

ПОДУМАЙ

!

2

перпендикулярны;

ВЕРНО!

3

противоположно направлены.

$$\cos \widehat{x y} = -1$$

$$\widehat{x y} = 180^\circ$$

0°

если

$$\vec{x} \updownarrow \vec{y}$$

Проверка (4)



Найдите угол между векторами \vec{m} и \vec{n} , если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

1

50°

ПОДУМАЙ

!

2

60°

ПОДУМАЙ

!

3

120°

ВЕРНО!

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**

Проверка



Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$,

то угол между векторами

\vec{a} и \vec{b} равен:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

$$12 = 3 \cdot 8 \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

1

30°

ПОДУМАЙ

!

2

60°

ВЕРНО!

3

120°

ПОДУМАЙ

!

$$\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = \frac{1}{2}$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 60^\circ$$

Проверка (3)

