

**11 класс.**

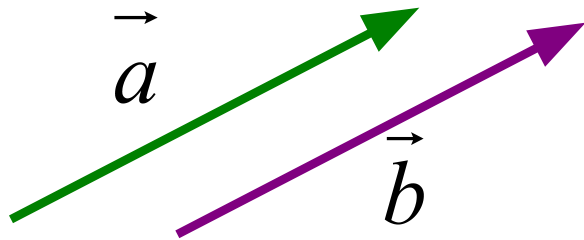
Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

# Цели урока:

- *Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.*
- *Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.*
- *Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.*

# Повторение:

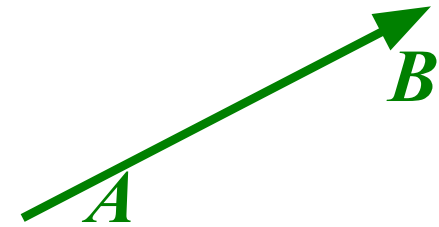
- *Какие векторы называются равными?*



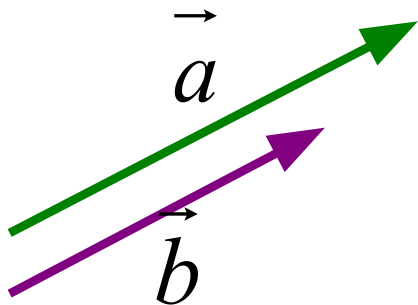
$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } |\vec{a}| = |\vec{b}|; \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

- *Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?*

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



- *Какие векторы называются коллинеарными?*



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

# Повторение.

## Векторы в пространстве.

1) Дано:  $A(-3; -2; 4)$   $B(-4; 3; 2)$

Найти:  $|\overrightarrow{AB}|$

$\sqrt{30}$

2) Дано:  $A(2; -3; 1)$   $B(4; -5; 0)$   $C(5; 0; -4)$   $D(7; -2; -3)$

Равны ли векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ?

*Нет, т.к. равные векторы*

*имеют равные*

*координаты.*

$\overrightarrow{AB}\{2; -2; -1\}$

$\overrightarrow{CD}\{2; -2; 1\}$

3) Дано: ? Коллинеарны ли векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ?

$A(1; -3; 4)$

$B(5; 1; -2)$

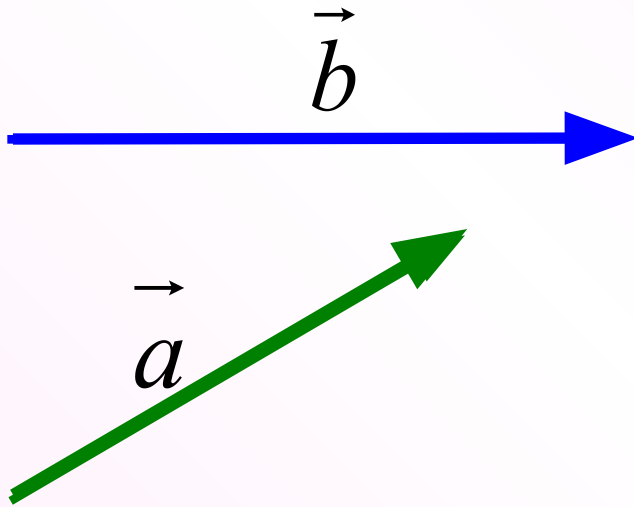
$C(2; 0; 1)$

$D(4; -2; 2)$

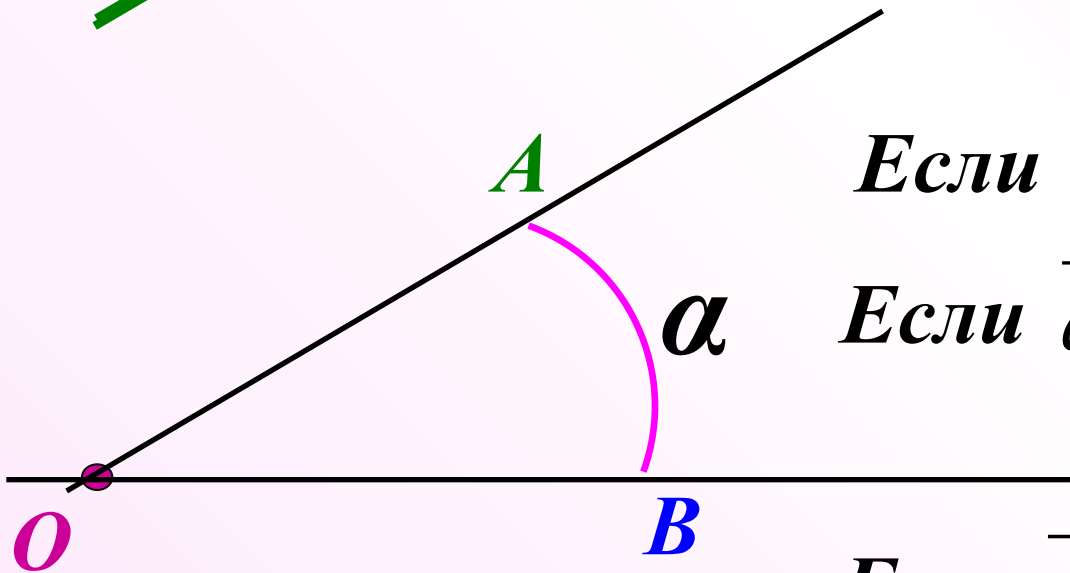
$\overrightarrow{AB}\{8; 4; -6\}$   $\overrightarrow{CD}\{2; -2; 1\}$

*Нет*

# Угол между векторами.



$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$
$$\left( \overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = \alpha$$



Если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ , то  $\left( \overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 0^\circ$

Если  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$  то  $\left( \overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 180^\circ$

Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$  то  $\left( \overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 90^\circ$

# Сопоставьте углы между векторами и их градусной мерой.

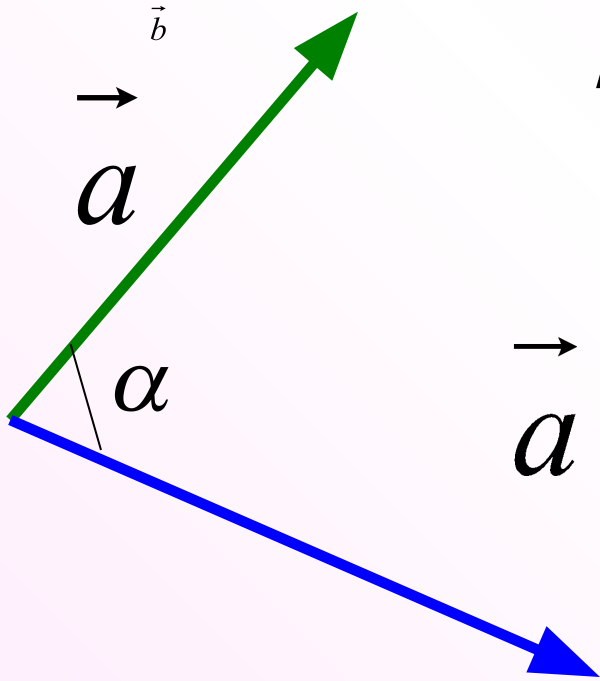
Diagram illustrating the correspondence between vector pairs and their angles. The central part shows a list of vector pairs to be matched with angles on the right.

$\vec{c}$	и	$\vec{f}$	$0^\circ$
$\vec{d}$	и	$\vec{a}$	$30^\circ$
$\vec{a}$	и	$\vec{f}$	$45^\circ$
$\vec{a}$	и	$\vec{b}$	$180^\circ$
			$115^\circ$
			$135^\circ$

On the left, a pair of vectors is shown with an angle of  $45^\circ$ . On the right, a set of colored lines represents angles from  $0^\circ$  to  $135^\circ$ , with boxes for matching the pairs.

# Скалярное произведение векторов.

*Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

*Скаляр – лат. **scale** – шкала.*



*Ввел в 1845 г.  
**У. ГАМИЛЬТОН**,  
английский  
математик.*



## Повторение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

Если  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ , то  $\cos 180^\circ = -1 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

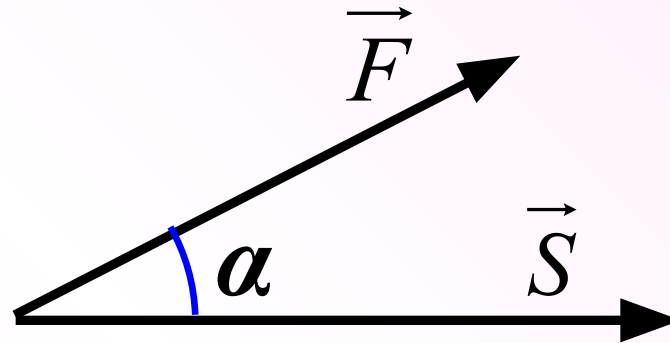
Если  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , то  $\cos 0^\circ = 1 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 = a^2}$

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется

**скалярным квадратом вектора**

# Скалярное произведение векторов в физике.



Если  $(\vec{F} \vec{S}) = \alpha$ , то

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \alpha$$

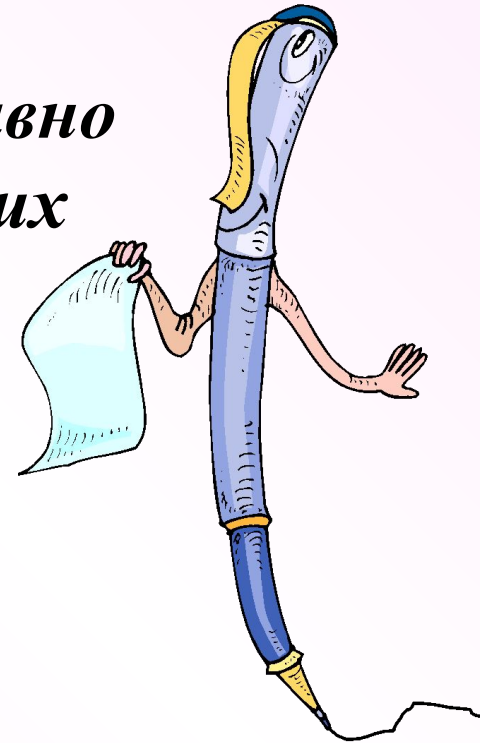
**Скалярное произведение векторов.**

# Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

*Скалярное произведение двух векторов равно  
сумме произведений соответствующих  
координат этих векторов.*



# Решение задач.

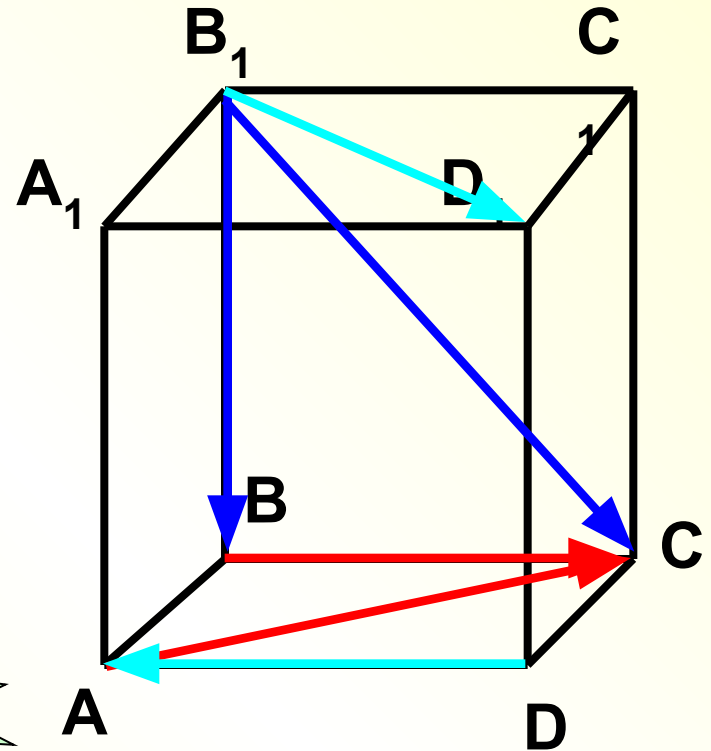
Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Найдите угол между векторами:

а)  $\vec{B_1 B}$  и  $\vec{B_1 C}$   $45^\circ$

б)  $\vec{BC}$  и  $\vec{AC}$   $45^\circ$

в)  $\vec{DA}$  и  $\vec{B_1 D_1}$   $135^\circ$



# № 443 (2)

Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;

$AB = a$ ;  $O_1$  – центр грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$

Найти:  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

**1 способ:**

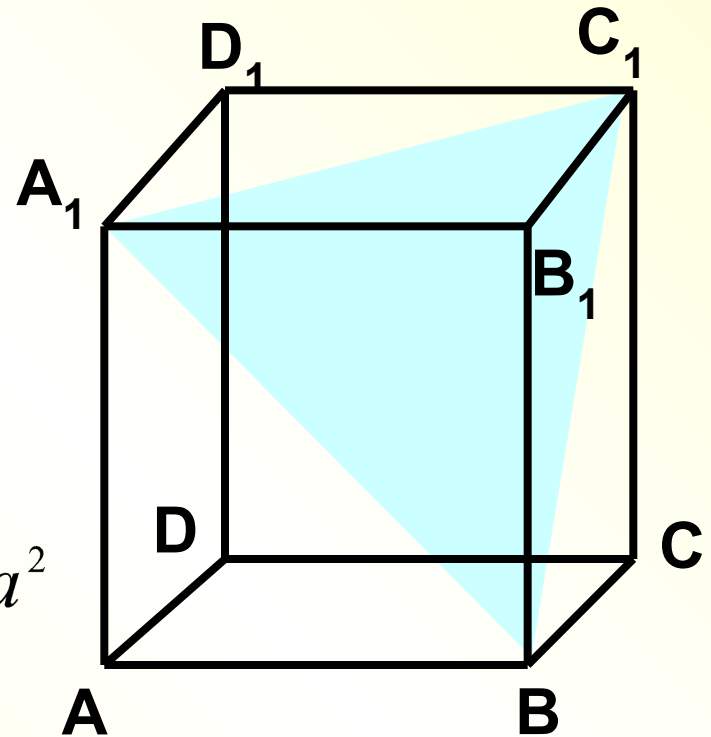
$\triangle BA_1 C_1$  – правильный

$$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$$

$$\left( \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BC_1} \right) = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

**Ответ:  $a^2$**



**Дано:** куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;

$AB = a$ ;  $O_1$  – центр грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$

**Найти:**  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

**2 способ:**

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

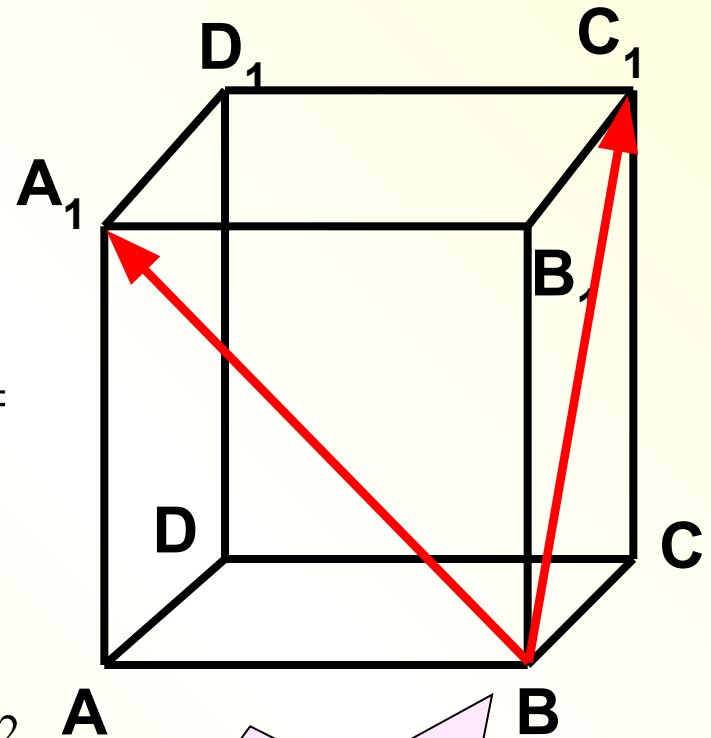
$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = ?$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}) =$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} +$$

$$+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$$



**Ответ:  $a^2$**

**№ 443 (2)**

**Дано:** куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;

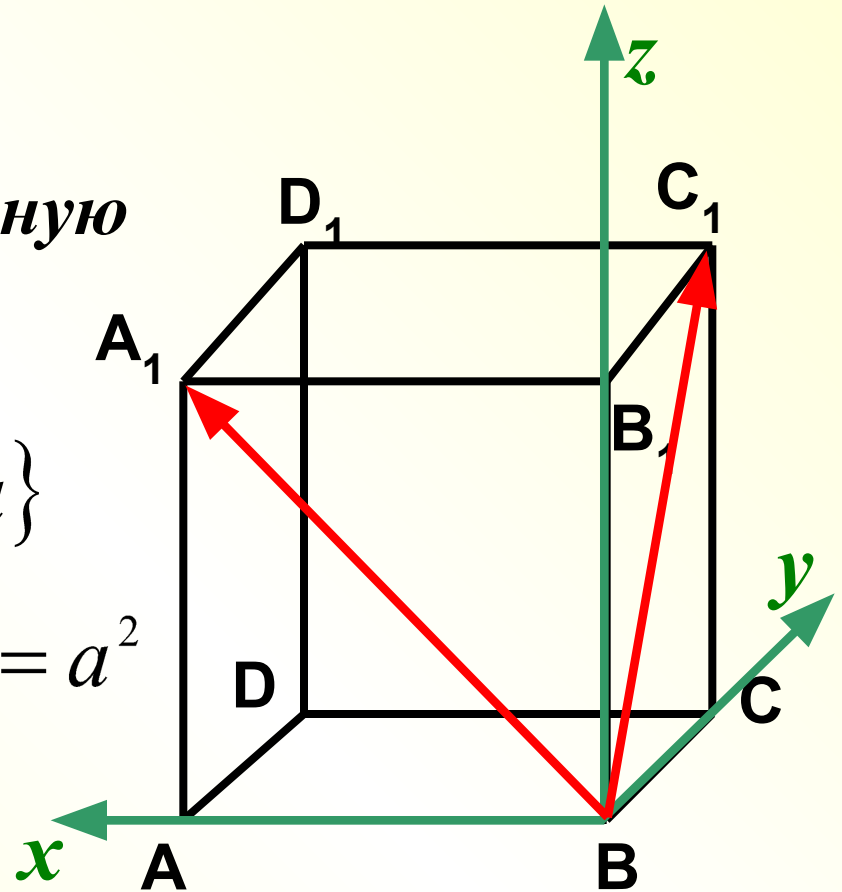
$AB = a$ ;  $O_1$  – центр грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$

**Найти:**  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

**3 способ:** Введем прямоугольную систему координат.

$$\overrightarrow{BA_1} \{a; 0; a\} \quad \overrightarrow{BC_1} \{0; a; a\}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$$



**Ответ:  $a^2$**

## *Решаем по группам:*

*№ 443*

*1 – а)*

*a*  
*2*

*2 – б)*

*-2*  
*a<sup>2</sup>*

*3 – в)*

*0*

*Дополнительная задача:*

*Вычислите угол между вектором a и координатным вектором i.*

$$\vec{a}\{2;1;2\}$$