МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ КЛАССА «ПОВЕРХНОСТЬ-ПОВЕРХНОСТЬ» В ПЛОТНЫХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ

Этапы разработки и реализации математической модели

Выбор основных допущений математической модели

Определение системы сил, действующих на ракету

Выбор необходимых систем координат

Разработка математической модели - получение дифференциальных уравнений, описывающих движение ракеты и дополнительных соотношений

Разработка численной модели процесса

Реализация численной модели на ЭВМ. Программирование, отладка программы

Тестирование программы по результатам контрольных расчетов

Основные допущения

1. Наличие осевой аэродинамической симметрии ракеты.
2. Совпадение вектора силы тяги с продольной осью ракеты (отсутствие аэродинамического эксцентриситета).
3. Малость углов атаки-скольжения, допущение о возможности линеаризации уравнений движения (______________________).

   $\cos\alpha = 1 \ \sin\alpha = \alpha$
4. Неучет кривизны и вращения Земли.
5. Отсутствие ветра.

Векторное уравнение движения центра масс ЛА

$$m\left(\frac{d^{*}\vec{V}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{V}\right)=\sum\vec{F}+\sum\vec{F}_{p}$$

скалярные уравнения
в некоторой *i*-ой подвижной системе координат с началом в центре масс ЛА

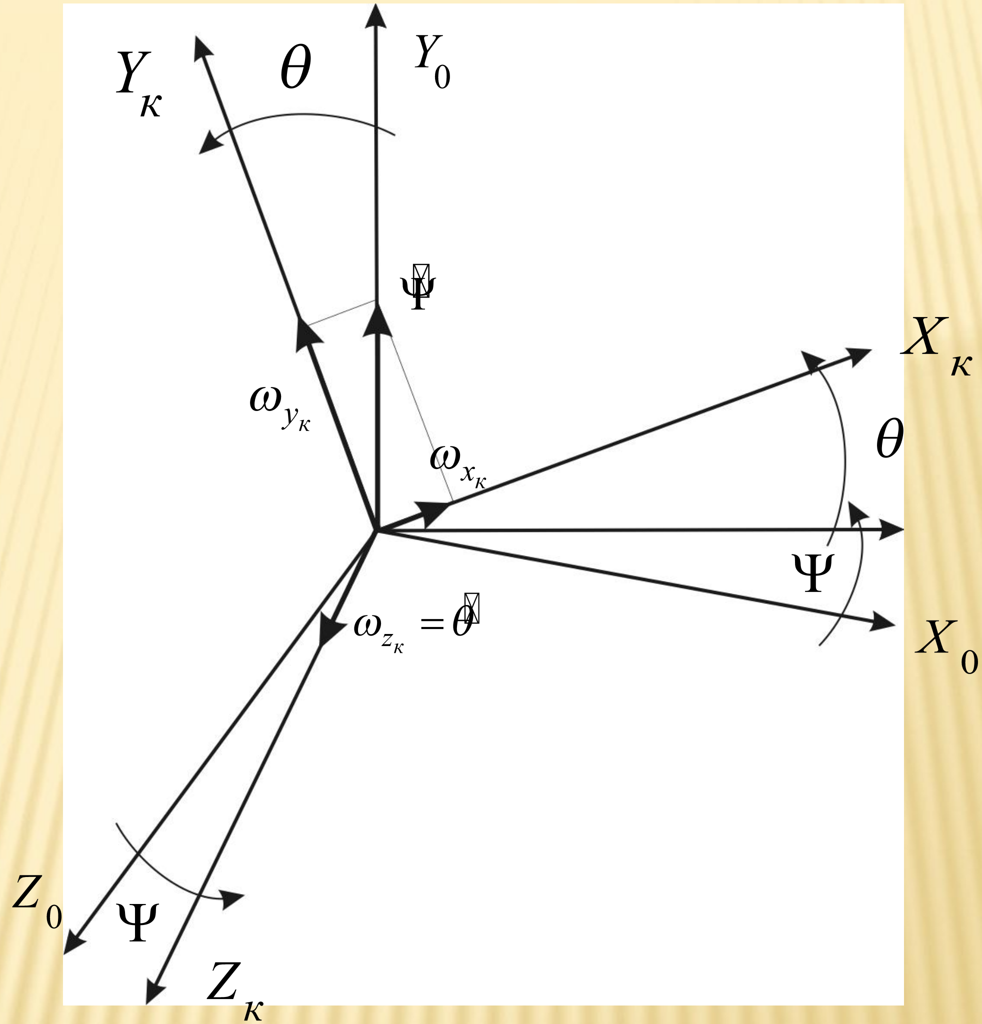
в проекциях на оси **траекторной системы** координат $V_{x_к}=V, V_{y_к}=V_{z_к}=0$

$$\dot{V}_{xi}+\omega_{yi}V_{zi}-\omega_{zi}V_{yi}=\frac{\sum F_{xi}}{m}+\frac{\sum F_{pxi}}{m} \quad\Longrightarrow\quad \dot{V}=\frac{\sum F_{x_k}}{m}+\frac{\sum F_{px_k}}{m}$$

$$\dot{V}_{yi}+\omega_{zi}V_{xi}-\omega_{xi}V_{zi}=\frac{\sum F_{yi}}{m}+\frac{\sum F_{pyi}}{m} \quad\Longrightarrow\quad \omega_{z_k}V=\frac{\sum F_{y_k}}{m}+\frac{\sum F_{py_k}}{m}$$

$$\dot{V}_{zi}+\omega_{xi}V_{yi}-\omega_{yi}V_{xi}=\frac{\sum F_{zi}}{m}+\frac{\sum F_{zxi}}{m} \quad\Longrightarrow\quad \omega_{y_k}V=\frac{\sum F_{z_k}}{m}+\frac{\sum F_{px_k}}{m}$$

Определение проекций угловой скорости вращения траекторной системы координат



$$\omega_{x_к} = \dot{\Psi}\sin\theta \qquad \omega_{y_к} = \dot{\Psi}\cos\theta \qquad \omega_{z_к} = \dot{\theta}$$

$$\dot{V} = \frac{\sum F_{x_k}}{m} + \frac{\sum F_{px_k}}{m} \qquad V\dot{\Psi}\cos\theta = \frac{\sum F_{z_k}}{m} + \frac{\sum F_{px_k}}{m} \qquad V\dot{\theta} = \frac{\sum F_{y_k}}{m} + \frac{\sum F_{py_k}}{m}$$

<u>Уравнения вращательного движения</u> записывают **в проекциях на оси связанной** системы координат

Векторное уравнение изменения **кинетического момента**

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d^*\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}_R$$

соответствующее ему матричное уравнение

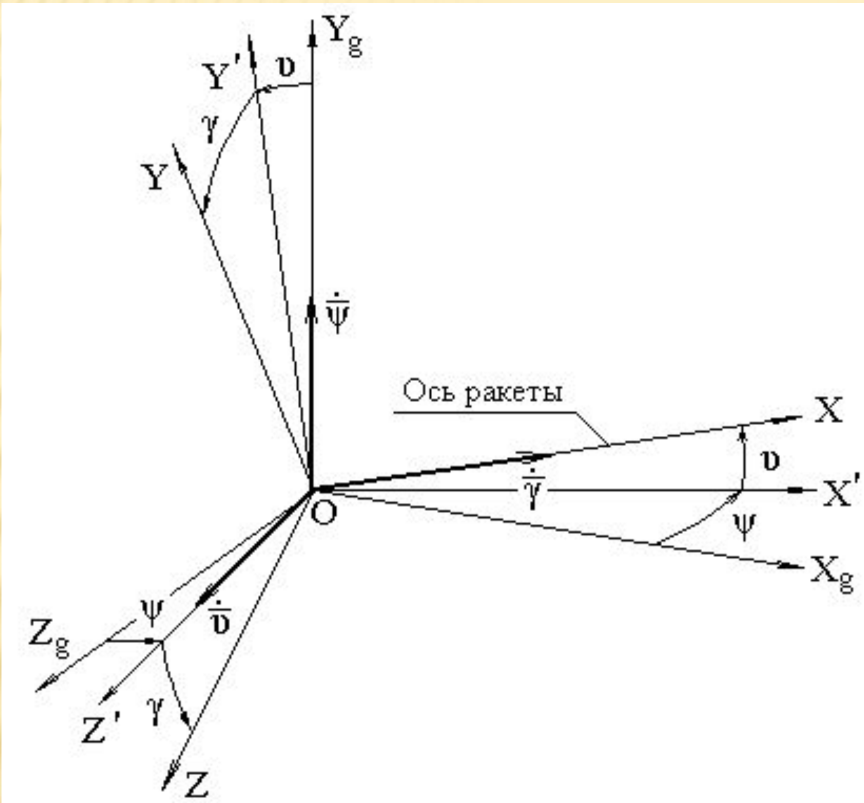
$$\begin{pmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x + M_{px} \\ M_y + M_{py} \\ M_z + M_{pz} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\omega}_x = \frac{M_x + M_{px}}{I_{XX}} - \frac{I_{ZZ} - I_{YY}}{I_{XX}} \omega_y \omega_z$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{M_y + M_{py}}{I_{YY}} - \frac{I_{XX} - I_{ZZ}}{I_{YY}} \omega_x \omega_z$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{M_z + M_{pz}}{I_{ZZ}} - \frac{I_{YY} - I_{XX}}{I_{ZZ}} \omega_y \omega_x$$

К определению **проекций угловой скорости** ракеты



$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\vartheta + \dot{\gamma}$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma + \dot{\vartheta}\sin\gamma$$

$$\omega_z = -\dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma + \dot{\vartheta}\cos\gamma$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - tg\vartheta(\omega_y\cos\gamma + \omega_z\sin\gamma)$$

$$XYZ \longrightarrow X_\kappa Y_\kappa Z_\kappa \qquad X_\kappa Y_\kappa Z_\kappa \longrightarrow X_g Y_g Z_g$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \sin\beta \\ \cos\gamma_a\sin\alpha+\sin\gamma_a\cos\alpha\sin\beta & \cos\gamma_a\cos\alpha-\sin\gamma_a\sin\alpha\sin\beta & -\sin\gamma_a\cos\beta \\ \sin\gamma_a\sin\alpha-\cos\gamma_a\cos\alpha\sin\beta & \sin\gamma_a\cos\alpha+\cos\gamma_a\sin\alpha\sin\beta & \cos\gamma_a\cos\beta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\Psi & -\sin\theta\cos\Psi & \sin\Psi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta\sin\Psi & \sin\theta\cos\Psi & \cos\Psi \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma+\sin\psi\sin\gamma & \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma+\sin\psi\cos\gamma \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\cos\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma \\ -\sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma & \cos\psi\cos\gamma-\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$XYZ \longrightarrow X_g Y_g Z_g$$

Соотношения между углами:

$$\sin\vartheta = \sin\theta\cos\alpha\cos\beta + \cos\theta(\sin\alpha\cos\gamma_a + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_a)$$

$$\sin\psi\cos\gamma = \sin\Psi\cos\beta\cos\gamma_a + \cos\Psi(\sin\beta\cos\theta + \sin\gamma_a\sin\theta\cos\beta) - \\ -\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma;$$

$$\cos\vartheta\sin\gamma = \sin\gamma_a\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta$$

Текущие значения координат

$\dot{x}_g = V\cos\theta\cos\Psi$ $\dot{y}_g = V\sin\theta$ $\dot{z}_g = -V\cos\theta\sin\Psi$

Уравнение для текущей массы ракеты

$$m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}|\,dt$$

Наклонная дальность – расстояние до центра масс ракеты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Характеристики движения ракеты

$V(t);\ \theta(t);\ \Psi(t);\ x_g(t);\ y_g(t);\ z_g(t);\ \vartheta(t);\ \psi(t);\ \gamma(t);\ \alpha(t);\ \beta(t);\ \gamma_a(t);$
$\omega_x(t);\ \omega_y(t);\ \omega_z(t);\ m_x(t).$

Система уравнений движения ЛА в плотных слоях атмосферы

$$1.\quad \dot V = \frac{1}{m}[(P_x - X_p - X_a)\cos\alpha\cos\beta - (P_y + Y_p + Y_a)\sin\alpha\cos\beta + (P_z + Z_p + Z_a)\sin\beta - mg\sin\theta];$$

$$2.\quad \dot\theta = \frac{1}{mV}[(P_x - X_p - X_a)\sin\alpha\cos\gamma_a + (P_y + Y_p + Y_a)\cos\gamma_a\cos\alpha - (P_z + Z_p + Z_a)\sin\gamma_a\cos\beta - mg\cos\theta];$$

$$3.\quad \dot\Psi = -\frac{1}{mV\cos\theta}[-(P_x - X_p - X_a)\cos\gamma_a\cos\alpha\sin\beta + (P_y + Y_p + Y_a)\sin\gamma_a\cos\alpha + (P_z + Z_p + Z_a)\cos\gamma_a\cos\beta];$$

$$4.\quad \dot\omega_x = \frac{1}{I_{xx}}(M_x + M_{px});$$

$$5.\quad \dot\omega_y = \frac{1}{I_{yy}}(M_y + M_{py});$$

$$6.\quad \dot\omega_z = \frac{1}{I_{zz}}(M_z + M_{pz});$$

$$7.\quad \dot\vartheta = \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma;$$

$$8.\quad \dot\psi = \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma);$$

$$9.\quad \dot\gamma = \omega_x - tg\vartheta\,(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma);$$

$$10.\quad \sin\vartheta = \sin\theta\cos\alpha\cos\beta + \cos\theta\sin\alpha\cos\gamma_a;$$

$$11.\quad \sin\psi\cos\gamma = \sin\Psi\cos\beta\cos\gamma_a + \cos\Psi(\sin\beta\cos\theta + \sin\gamma_a\sin\theta\cos\beta) - \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma;$$

$$12.\quad \cos\vartheta\sin\gamma = \sin\gamma_a\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta;$$

$$13.\quad \dot x_g = V\cos\theta\cos\Psi;$$

$$14.\quad \dot y_g = V\sin\theta;$$

$$15.\quad \dot z_g = -V\cos\theta\sin\Psi; \qquad (*)$$

$$16.\quad m = m_0 - \int_0^t |\dot m|\,dt.$$

$$17.\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Упрощения

1. $\omega_x = 0;\ \dot\gamma = 0;\ \gamma = 0$

2. $M_x + M_{px} = 0;$

   $M_y + M_{py} = 0;$

   $M_z + M_{pz} = 0$

   $\alpha = \alpha_б;\ \beta = \beta_б;\ \gamma = \gamma_б$

3. $\alpha, \beta, \gamma, \gamma_a$ малы

   $\sin(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_a) \approx \alpha, \beta, \gamma, \gamma_a$

   $\cos(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_a) \approx 1$

Уравнения **продольного (плоского) движения** ракеты

$$\dot V = \frac{1}{m}[(P_x - X_p - X_a)\cos\alpha - (P_y + Y_p + Y_a)\sin\alpha - mg\sin\theta];$$

$$\dot\theta = \frac{1}{mV}[(P_x - X_p - X_a)\sin\alpha + (P_y + Y_p + Y_a)\cos\alpha - mg\cos\theta];$$

$$\dot x_g = V\cos\theta;$$

$$\dot y_g = V\sin\theta;$$

$$m = m_0 - \int_0^t |\dot m|\,dt.$$

$$\dot\omega_z = \frac{1}{I_{zz}}(M_z + M_{pz}); \qquad \dot\vartheta = \omega_z; \qquad \alpha = \vartheta - \theta;$$

Уравнения **бокового движения** ракеты и **вращения по крену**

$$\dot\Psi = -\frac{1}{mV\cos\theta}[-(P_x - X_p - X_a)\cos\gamma_a\sin\beta + (P_y + Y_p + Y_a)\sin\gamma_a + (P_z + Z_p + Z_a)\cos\gamma_a\cos\beta];$$

$$\dot\gamma = \omega_x - tg\vartheta\,(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma);$$

$$\dot\omega_x = \frac{1}{I_{xx}}(M_x + M_{px});$$

$$\sin\gamma_a = \frac{\cos\vartheta\sin\gamma + \sin\beta\sin\theta}{\cos\beta\cos\theta};$$

$$\dot\omega_y = \frac{M_y + M_{py}}{I_{yy}} - \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}}\omega_x\omega_z;$$

$$\dot z_g = -V\cos\theta\sin\Psi;$$

$$\dot\psi = \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma);$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\psi\cos\gamma - \sin\Psi\cos\gamma_a - \sin\gamma_a\sin\theta + \sin\vartheta\sin\gamma}{\cos\theta}$$

Система дифференциальных уравнений ***для оценки дальности*** стрельбы ***неуправляемых*** ракет

$$\dot{V} = \frac{P_x - X_a}{m} - g\sin\theta; \qquad \dot{x}_g = V\cos\theta;$$

$$m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}|\,dt.$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g\cos\theta}{V}; \qquad \dot{y}_g = V\sin\theta;$$

<u>для пассивного участка траектории</u>

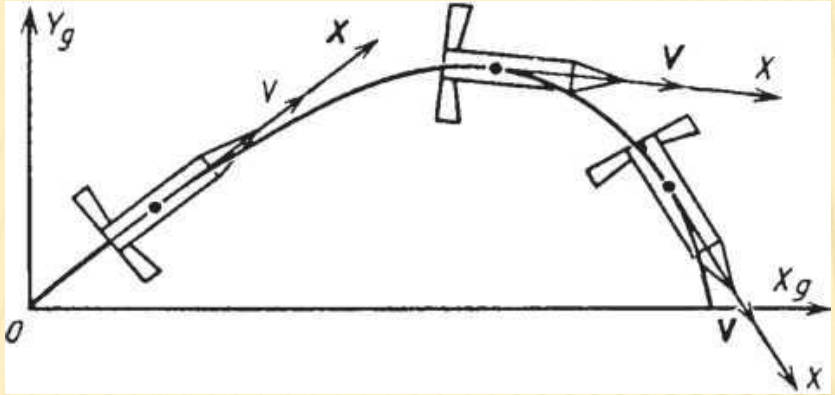
$$\dot{V} = \frac{P_x - X_a}{m} - g\sin\theta; \qquad \dot{y}_g = V\sin\theta;$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g\cos\theta}{V}; \qquad \dot{x}_g = V\cos\theta$$

Тема № 7. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ СНАРЯДОВ

Содержание

Схема последовательных положений оперенного снаряда на траектории при правильном полете



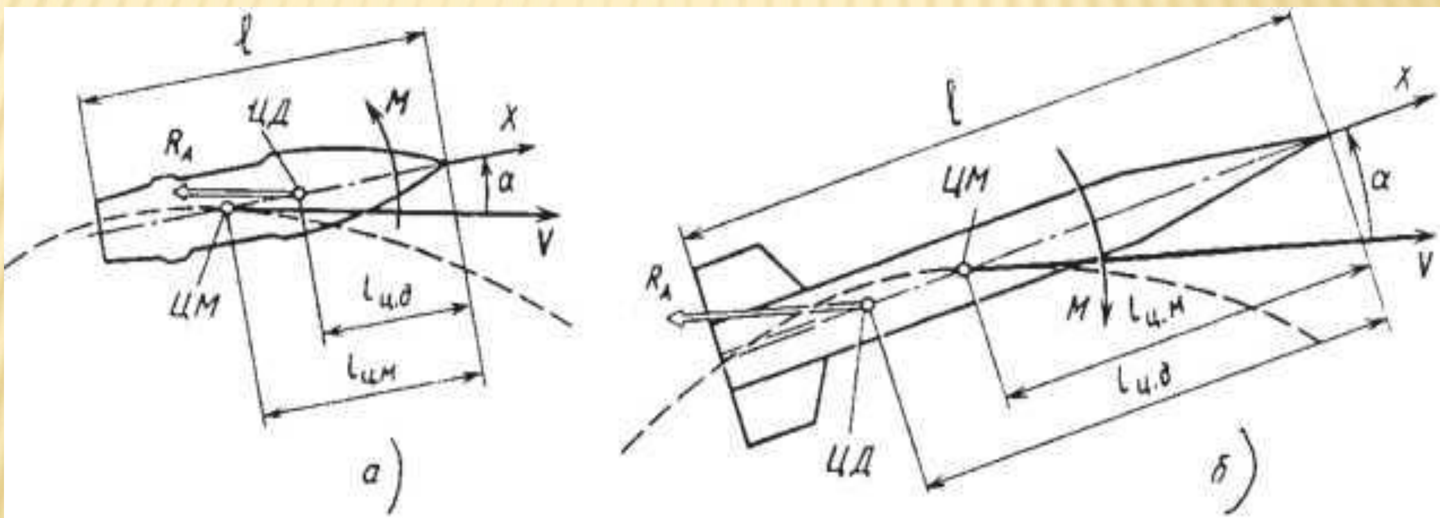


Схема действия аэродинамического момента:
а — на неоперенный снаряд (ракету); б — на оперенный снаряд

Устойчивость полета ракет и снарядов, стабилизированных вращением

Угловая скорость

$$\omega_x = \frac{2\pi V_\partial}{\eta d} \approx \frac{2\pi V_0}{\eta d}$$

Угловая скорость прецессии

$$\nu = \frac{I_{zz} r_0}{I_{xx}} \qquad r_0 = \omega_x + \nu \cos\delta \approx \omega_x$$

При $\sigma \geq 0$

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}} \sin \alpha\sqrt{\sigma}\, t$$

$$T = \frac{2\pi}{\alpha\sqrt{\sigma}} \qquad A_\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}$$

$$\alpha = \nu$$

При $\sigma < 0$

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{|\sigma|}} sh \alpha\sqrt{|\sigma|}\, t$$

Условие гироскопической устойчивости ***снаряда*** **–** ***положительное значение коэффициента гироскопической устойчивости***

$$\sigma > 0$$

Физический смысл σ

$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2} > 0$$

$$M_z = I_{zz}\beta\delta \qquad M_z = \frac{\rho V^2}{2} S_m m_z^\alpha \delta$$

$$\beta = \frac{\rho V^2}{2I_{zz}} S_m m_z^\alpha$$

$$1 - \frac{\rho V^2}{2}\frac{S_m m_z^\alpha}{I_{zz}\alpha^2} > 0 \qquad \frac{\rho V^2}{2}\frac{S_m m_z^\alpha}{I_{zz}} < \alpha^2 \approx \frac{I_{xx}^2\omega_x^2}{4I_{zz}^2}$$

<u>**Необходимая угловая скорость вращения ЛА**</u> относительно ***продольной оси***

$$\omega_x > \frac{V}{kI_{xx}}\sqrt{2\rho I_{zz} S_m m_z^\alpha}$$

Устойчивое движение на траектории оперенного снаряда

Условие устойчивости оперенного снаряда выполнение **неравенства**

$$x_{цд} - x_{цм} > 0$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$m_z^{C_y} = \frac{\left|m_z^{\alpha}\right|}{C_y^{\alpha}} = \frac{\left|x_{цд} - x_{цм}\right|}{l} 100\%$$

$$x_{цм} = \frac{\sum m_i x_{Ci}}{\sum m_i}$$

$$x_{цд} = \frac{x_{цдк} C_{ук}^{\alpha} + x_{цдоп} C_{уоп}^{\alpha}}{C_{ук}^{\alpha} + C_{уоп}^{\alpha}}$$

Явление резонанса _проворачивающихся оперенных снарядов_

Значение критической угловой скорости аксиального вращения

$$\omega_{кр} = V\sqrt{\frac{\rho S_m l \left|m_z^{\alpha}\right|}{2(I_{zz} - I_{xx})}}$$

Условие возникновения резонанса

совпадение ***частот аксиального и экваториального вращений*** снаряда

Явление резонанса _удлиненных нежестких ЛА_

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t)$$

$$y(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} f_n(x) q_n(t)$$

Частота собственных колебаний

$$\omega_n = \lambda_n^2\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0 l^4}}$$

$$\cos\lambda_n ch\lambda_n - 1 = 0 \qquad \lambda_1 = 4{,}73 \qquad \lambda_2 = 7{,}85 \qquad \lambda_3 = 11{,}0$$

Условие возникновения резонанса -

совпадение ***частоты вращения ракеты относительно продольной оси с частотами упругих изгибных колебаний корпуса*** ракеты