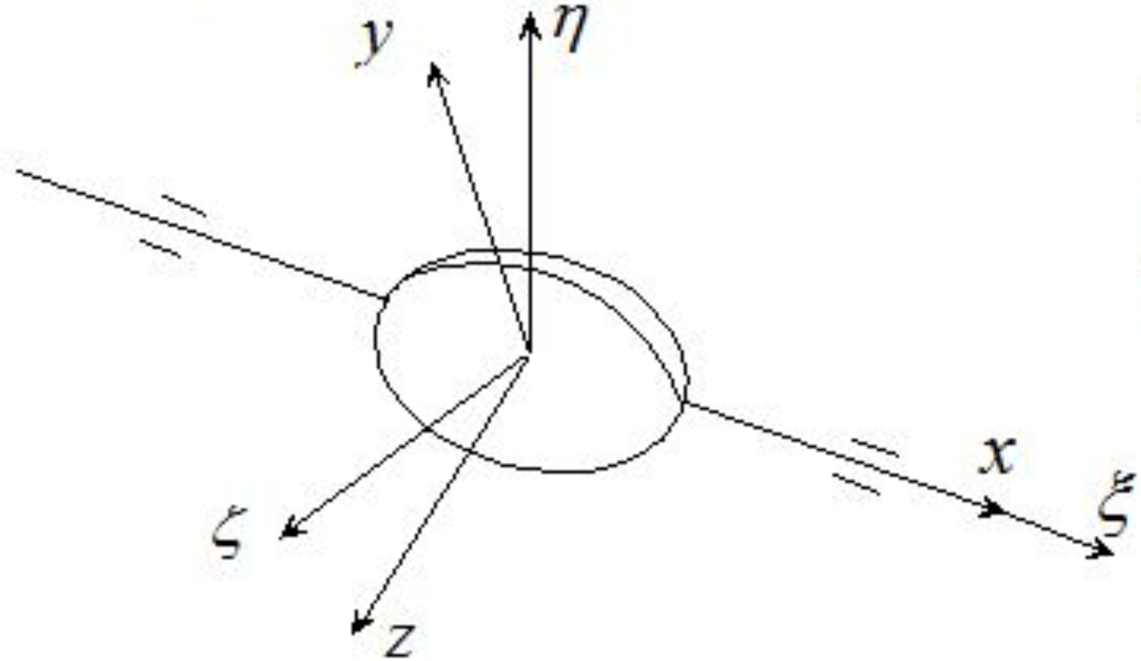
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ВЫСОКОТОЧНЫЕ СИСТЕМЫ НАВИГАЦИИ

Лекция №2.2

Уравнения движения 2-х степенного гироскопа. Уравнения Лагранжа 2-го рода.

Уравнения движения двухстепенного гироскопа



$$J_x \ddot{\beta} + H_0 \dot{\alpha} = M_x (1)$$

$$J_\eta \ddot{\alpha} - H_0 \dot{\beta} = M_\eta (2)$$

Уравнение (1) определяет движение двухстепенного гироскопа. Второе уравнение описывает движение корпуса, на котором установлен двухстепенной гироскоп.

Если J_η (момент инерции) тела велик, а гироскопический момент $(H_0 \dot{\beta})$ мал, то уравнение (2) может вообще не учитываться и пользоваться только (1).

Рекомендации по применению уравнений движения гироскопов.

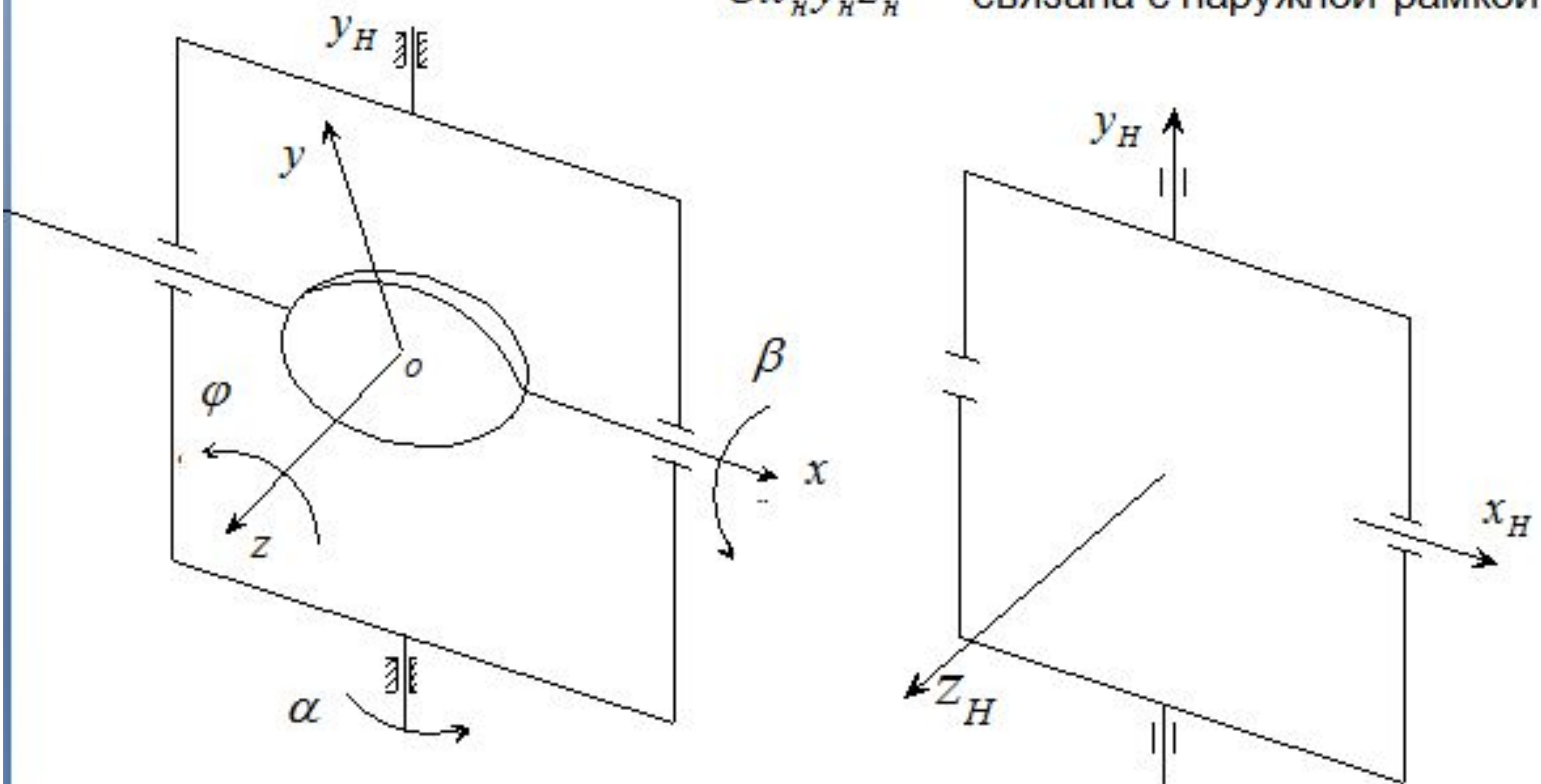
При исследовании медленных движений гироскопа в режиме ориентации, а также с целью определения дрейфа гироскопа, достаточно использовать уравнения прецессионного движения.

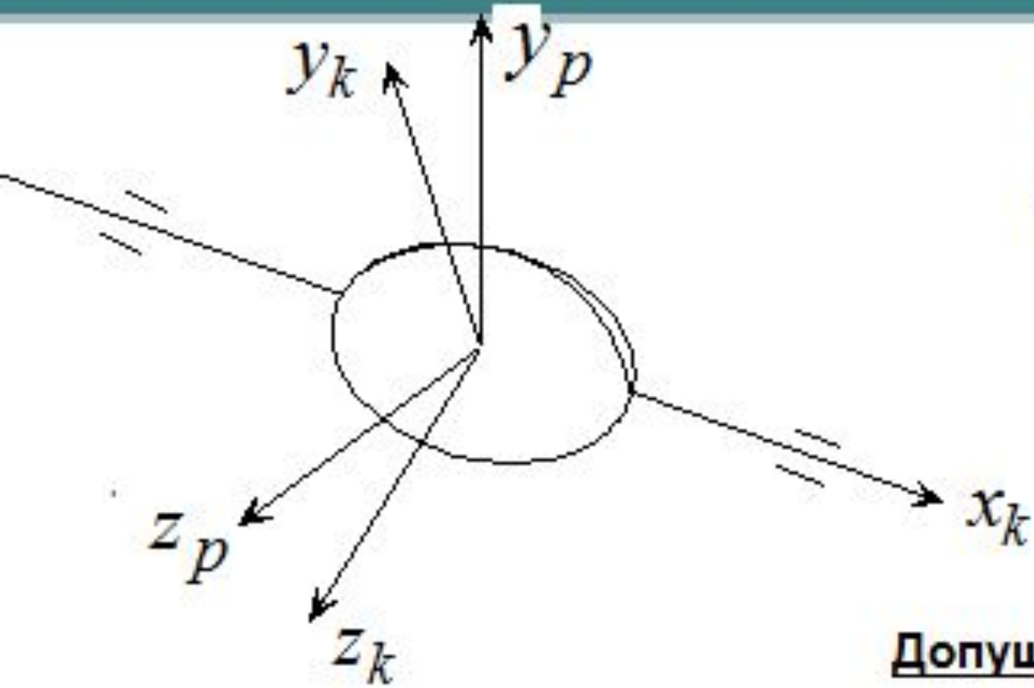
При исследовании собственного движения гироскопа, анализе переходных процессов, исследовании устойчивости, работы гироскопа в режиме вибрации следует пользоваться техническими уравнениями, то есть учитывать инерционные члены.

Вывод уравнений движения гироскопа с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Механическую систему разбивают на n подсистем, имеющих одну степень свободы.

$Ox_н y_н z_н$ – связана с наружной рамкой





$Ox_py_pz_p$ – связана с ротором.

$Ox_кy_кz_к$ – связана с кожухом

<u>Допущения:</u>

1) Система ротора, кожуха и наружной рамки представляет собой абсолютно жесткую конструкцию.
2) Точка О (центр всех осей) является точкой подвеса, то все оси пересекаются в одной точке
3) $O\xi\eta\zeta$ – система, связанная с основанием, неподвижна в инерциальном пространстве. Положение гироскопа относительно этой СК определяется углами:

α – угол поворота относительно оси наружной рамки

β – угол поворота относительно оси внутренней рамки

φ – угол поворота ротора относительно оси ротора.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i$$

$q_1=\alpha;\quad q_2=\beta;\quad q_3=\varphi$

$\dot{\alpha},\ \dot{\beta},\ \dot{\varphi}$ – обобщенные скорости

Исходные уравнения:

$$T=T_p+T_к+T_н$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \alpha}=M_\eta \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{\beta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \beta}=M_x \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=M_z \quad (3)$$

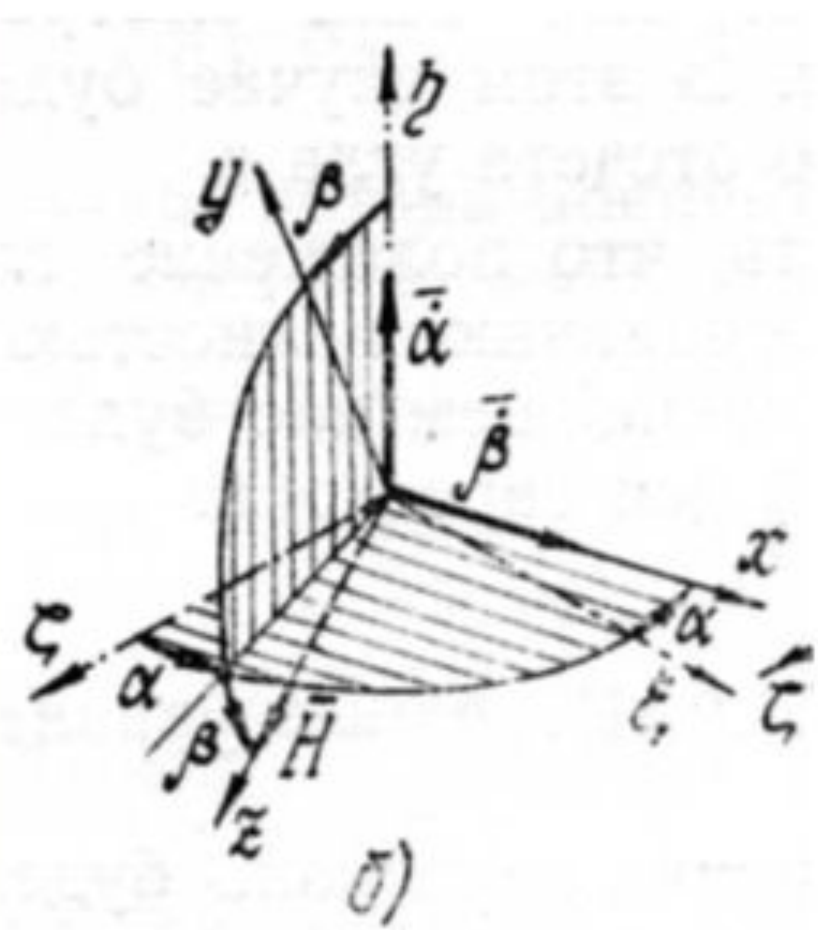
$$2T=J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2-$$
$$-2J_{xy}\cdot\omega_x\cdot\omega_y-2J_{xz}\cdot\omega_x\cdot\omega_z-$$
$$-2J_{yz}\cdot\omega_y\cdot\omega_z$$

Кинетическая энергия тела с одной закрепленной точкой является квадратичной формой проекций угловой скорости на оси координат

Оси выбираем так, чтобы

$$J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$$

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции угловых скоростей тела на оси, с ним связанные.



$$\omega_{xH} = 0$$
$$\omega_{yH} = \dot{\alpha}$$
$$\omega_{zH} = 0$$

$$\omega_{xk} = \dot{\beta}$$
$$\omega_{yk} = \dot{\alpha}\cos\beta$$
$$\omega_{zk} = -\dot{\alpha}\sin\beta$$

$$\omega_{xp} = \dot{\beta}$$
$$\omega_{yp} = \dot{\alpha}\cos\beta$$
$$\omega_{zp} = \dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta$$

$$2T = J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2$$

$$\left|\begin{array}{l}\omega_{xH} = 0 \\ \omega_{yH} = \dot{\alpha} \\ \omega_{zH} = 0\end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l}\omega_{xk} = \dot{\beta} \\ \omega_{yk} = \dot{\alpha}\cos\beta \\ \omega_{zk} = -\dot{\alpha}\sin\beta\end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l}\omega_{xp} = \dot{\beta} \\ \omega_{yp} = \dot{\alpha}\cos\beta \\ \omega_{zp} = \dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta\end{array}\right|$$

$$2T = J_{yH}\dot{\alpha}^2 + J_{xk}\dot{\beta}^2 + J_{yk}(\dot{\alpha}\cos\beta)^2 + J_{zk}(\dot{\alpha}\sin\beta)^2 + J_{xp}(\dot{\beta})^2 +$$

$$+J_{yp}(\dot{\alpha}\cos\beta)^2 + J_{zp}(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta)^2 =$$

$$=\left[J_{yH} + (J_{yk} + J_{yp})\cos^2\beta + J_{zk}\sin^2\beta\right]\dot{\alpha}^2 + \left[J_{xk} + J_{xp}\right]\dot{\beta}^2 +$$

$$+J_{zp}(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$$

$$2\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = 2\left[J_{yH} + (J_{yk} + J_{yp})\cos^2\beta + J_{zk}\sin^2\beta\right]\dot{\alpha} - 2J_{zp}(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta)\sin\beta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) = \left[J_{yH} + (J_{yk} + J_{yp})\cos^2\beta + J_{zk}\sin^2\beta\right]\ddot{\alpha} -$$

$$-2(J_{yk} + J_{yp})\dot{\alpha}\cdot\dot{\beta}\cos\beta\cdot\sin\beta + 2J_{zk}\dot{\alpha}\cdot\dot{\beta}\cos\beta\cdot\sin\beta -$$

$$-J_{zp}(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\beta}\cdot\cos\beta - \frac{d}{dt}\left[J_{zp}(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta)\right]\sin\beta = M_{\eta}$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

$$\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta = \Omega \qquad J_{zp}\Omega = H \qquad \frac{d}{dt}(H)\sin\beta = M_z\sin\beta$$

Относительно оси наружной рамки:

$$\left[J_{yH}+(J_{yk}+J_{yp})\cos^2\beta+J_{zk}\sin^2\beta\right]\ddot{\alpha}+$$

$$+2\left[J_{zk}-J_{yk}-I_{yp}\right]\dot{\alpha}\cdot\dot{\beta}\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta-H\cdot\dot{\beta}\cdot\cos\beta=M_{\eta}+M_{z}\sin\beta$$

Введем обозначение:

$$J_{\eta}=J_{yH}+(J_{yk}+J_{yp})\cos^2\beta+J_{zk}\sin^2\beta$$

$$J_{\eta}\ddot{\alpha}-H\cos\beta\cdot\dot{\beta}+2(J_{zk}-J_{yk}-J_{yp})\dot{\alpha}\cdot\dot{\beta}\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta= \qquad (1)$$

$$=M_{\eta}+M_{z}\sin\beta$$

Внутренняя рамка

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = -(J_{yk} + J_{yp} - J_{zk})\dot{\alpha}^2 \cos\beta \cdot \sin\beta - J_{zp}(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\alpha}\cos\beta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = (J_{xk} + J_{xp})\dot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) = (J_{xk} + I_{xp})\ddot{\beta}$$

$$(J_{xk} + J_{xp})\ddot{\beta} + H\dot{\alpha}\cos\beta + (J_{yk} + J_{yp} - J_{zk})\dot{\alpha}^2 \sin\beta \cdot \cos\beta = M_x$$

Окончательно:

$$J_x\ddot{\beta} + H\dot{\alpha}\cos\beta + (J_{yk} + J_{yp} - J_{zk})\dot{\alpha}^2 \sin\beta \cdot \cos\beta = M_x \quad (2)$$

Для (3):

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = M_z \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{zp}(\dot{\varphi} - \dot{\alpha} \sin \beta) = H$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{dH}{dt}$$

$$\begin{cases} J_\eta \ddot{\alpha} - H \dot{\beta} \cos \beta - J_{\kappa+p} \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \sin 2\beta = M_\eta \\ J_x \ddot{\beta} + H \dot{\alpha} \cos \beta + \dfrac{J_{\kappa+p}}{2} \dot{\alpha}^2 \cdot \sin 2\beta = M_x \end{cases}$$