Передаточные функции и частотные характеристики идеальных и реальных регуляторов

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Любой реальный технический процесс можно разбить на ряд простых процессов – единичных цепей воздействия

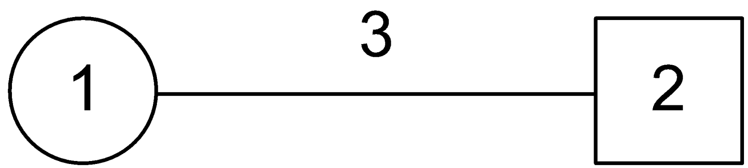


Рис. 1.1. Элементы простого процесса

Единичная цепь воздействия состоит из источника технического воздействия – 1, приемника технического воздействия – 2, линии передачи технического воздействия – 3.

Любой технический процесс характеризуются:
1) продолжительностью протекания;
2) качественными показателями, т.е. активными силами, приложенными к цепи;
3)количественными показателями, т.е. физическими величинами, определяющими интенсивность протекающего процесса.

Совокупность качественных и количественных показателей называется режимом процесса.

Для того чтобы любой простой процесс начал функционировать, необходимо следующее:

1) наличие потенциальных возможностей источника технического воздействия по отношению к приемнику. Обозначим этот показатель – H;

2) наличие проводимости цепи передачи технического воздействия – G.

При обеспечении этих условий процесс будет протекать с определенной интенсивностью, отражаемой количественным показателем – *B*.

$$B = HG$$

Наиболее универсальным способом можно считать управление процессами путем изменения величины – *G*. Для этого в цепь вводится элемент управления – 4, т.е. элемент, проводимость которого можно изменять некоторым внешним управляющим воздействием – *Q*

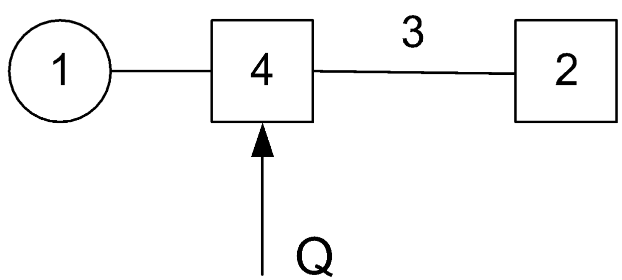


Рис. 1.2. Процесс с элементом управления

Зависимость, характеризующую процесс управления, можно записать в виде $Q = \psi(B)$ т.е. ***управляющее воздействие содержит в себе информацию об интенсивности протекания процесса***.

Таким образом, процесс управления – это прежде всего передача информации.

Автоматическое регулирование

Целью автоматического регулирования является поддержание заданного значения определенной физической величины, называемой управляемой или регулируемой величиной – показателем X.

Объект, одна или несколько физических величин (показателей) которого регулируются, называется объектом регулирования (управления) (О.Р.).

Устройство, оказывающее воздействие на регулирующий орган объекта регулирования, т.е. осуществляющее управление объектом, называется регулятором (Р).

Внешние воздействия, оказывающие отрицательное влияние на регулируемые показатели объекта управления называются возмущениями Z.

Совокупность объекта управления и регулятора называется системой автоматического регулирования (управления) САР (САУ).

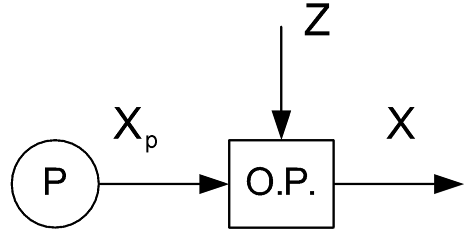
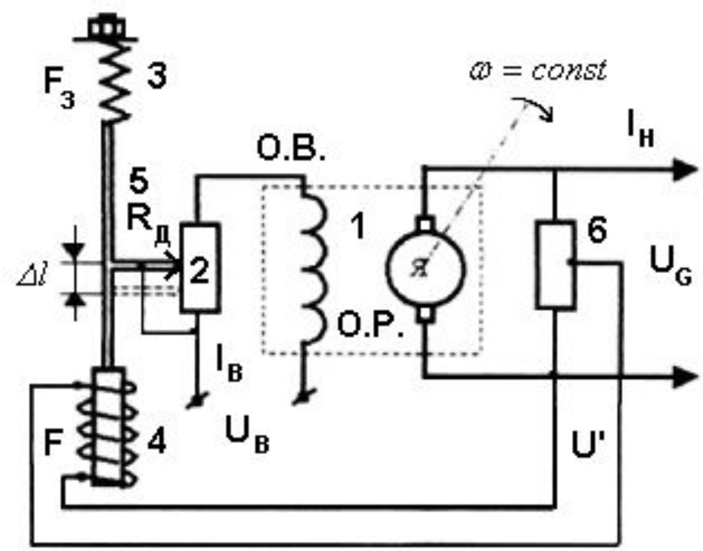


Рис.1.3. Основные элементы системы автоматического управления:
X – регулируемая величина, Z – возмущение, X_p – регулирующая величина, О.Р. – объект регулирования, Р – регулятор

Принцип регулирования по отклонению регулируемой величины от заданного значения (принцип Ползунова-Уатта)

Рис.1.4. САР напряжения генератора, построенная по принципу отклонения:
1– О.Р.– генератор;U_G – регулируемая величина; 2 – добавочное регулируемое сопротивление в цепи обмотки возбуждения (О.В.)генератора (исполнительный элемент); 3 – пружина (задающий элемент в системе); 4 – электромагнит (преобразовательный элемент); 5 – механическая связь, выполняющая роль элемента сравнения заданного и действительного значений регулируемого показателя; 6 – измерительное устройство (потенциометр)



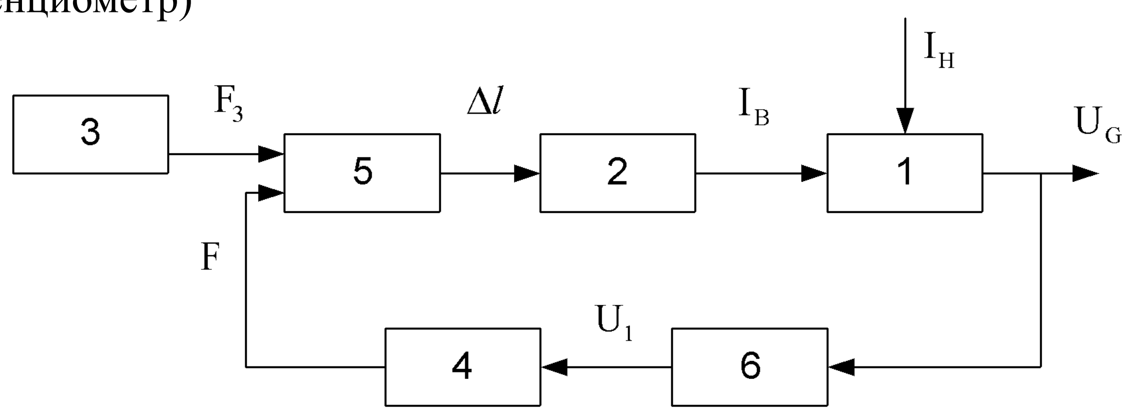


Рис. 1.5. Функциональная схема САР, построенная по принципу отклонения

Принцип регулирования по возмущению – принцип Понселе

заключается в том, что регулятор в системе реагирует на величину возмущения, действующего на О.Р. и вырабатывает такое управляющее воздействие, чтобы скомпенсировать действие этого возмущения.

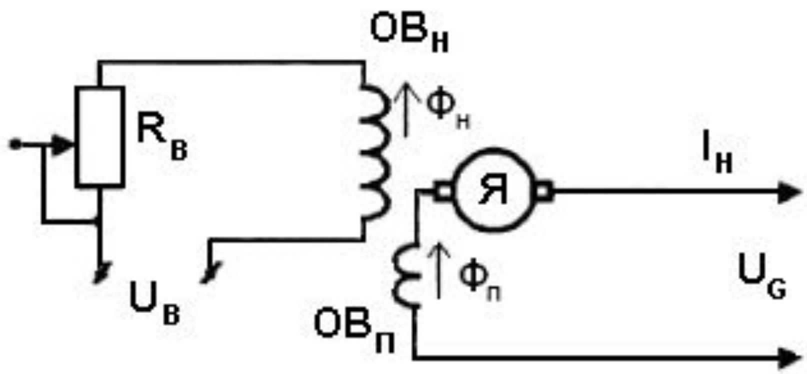


Рис.1.6. Схема генератора с компаундной обмоткой возбуждения

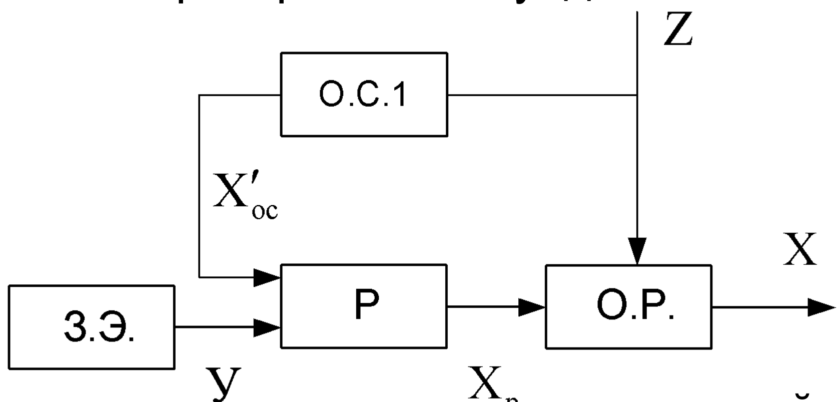


Рис. 1.7. Функциональная схема системы, построенной по принципу возмущения: О.С.1 – компенсирующая обратная связь по возмущению; X'_{oc} – сигнал обратной связи по возмущению

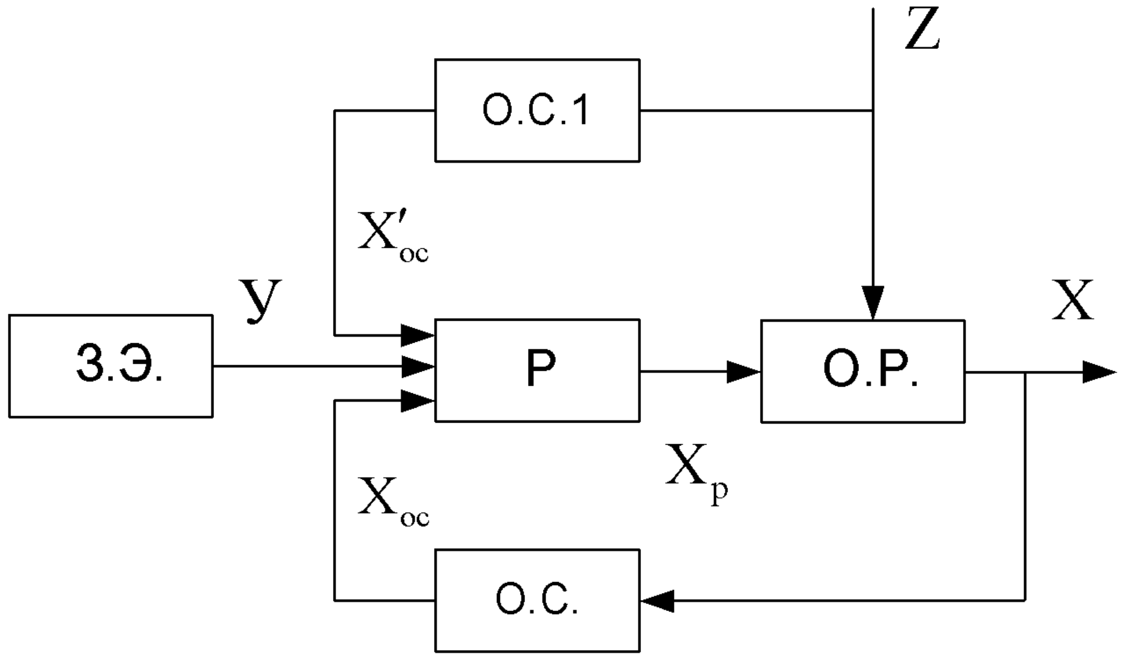
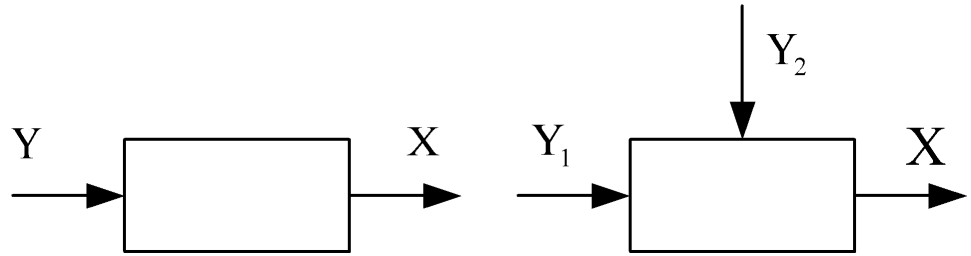


Рис. 1.8. Функциональная схема системы комбинированного регулирования

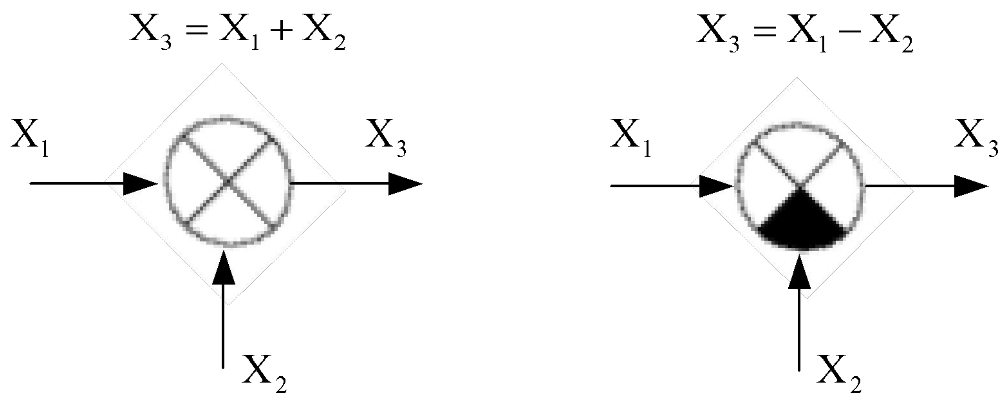
Понятия о функциональных схемах



а) одна входная величина *б) две входные величины*

Рис. 1.9. Примеры изображения элементов

Важную роль в схемах САР выполняют элементы сравнения – суммирующие узлы, выполняющие операцию алгебраической суммы входных сигналов

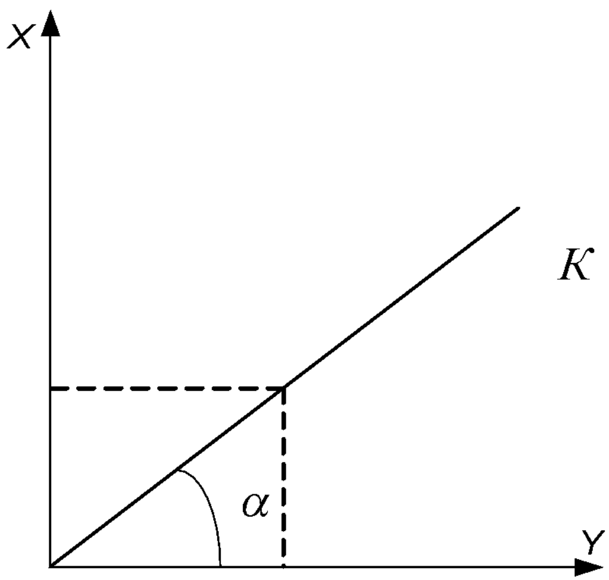


а) суммирование сигналов *б) разность сигналов*

Рис. 1.10. Примеры изображения суммирующих узлов

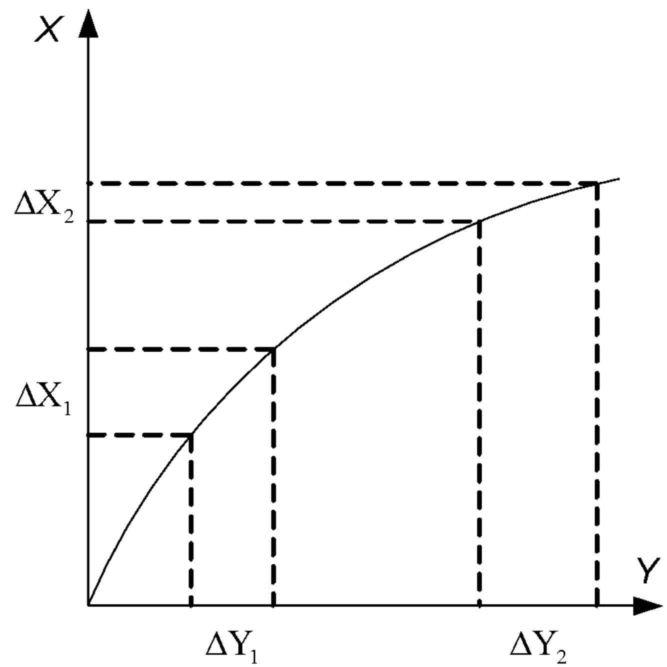
Функциональные схемы используются для анализа статических (установившихся) режимов систем. В этих режимах любой элемент характеризуется зависимостью *X=f(Y),* называемой **статической характеристикой элемента**. Входная величина – Y, выходная – X, несут в себе определенную информацию в данной системе управления.

$$\frac{\Delta X}{\Delta Y} = K$$ **- передаточным коэффициентом элемента**



$$K = tg\alpha = const$$

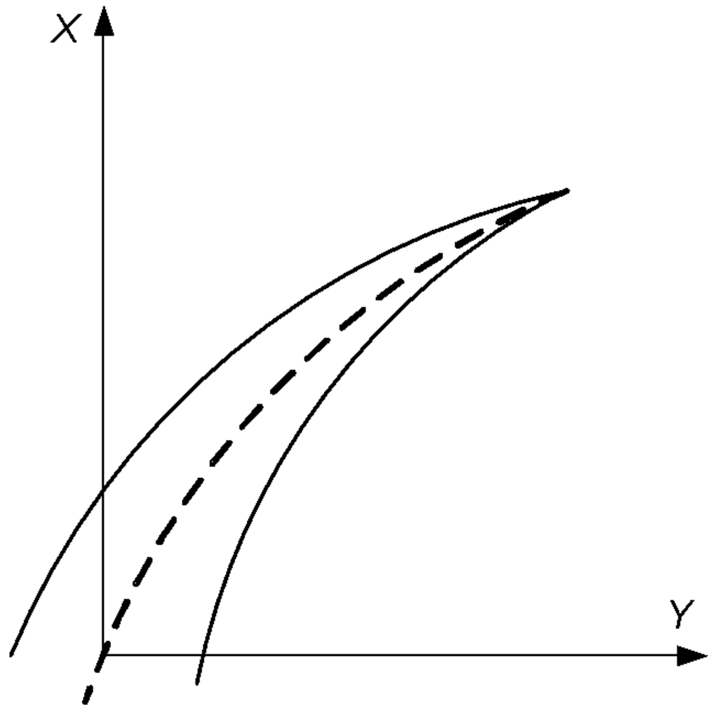
Рис. 1.11. Линейная статическая характеристика



$$K_1 = \frac{\Delta X_1}{\Delta Y_1}$$

$$K_2 = \frac{\Delta X_2}{\Delta Y_2}$$

Рис.1.12. Нелинейная статическая характеристика



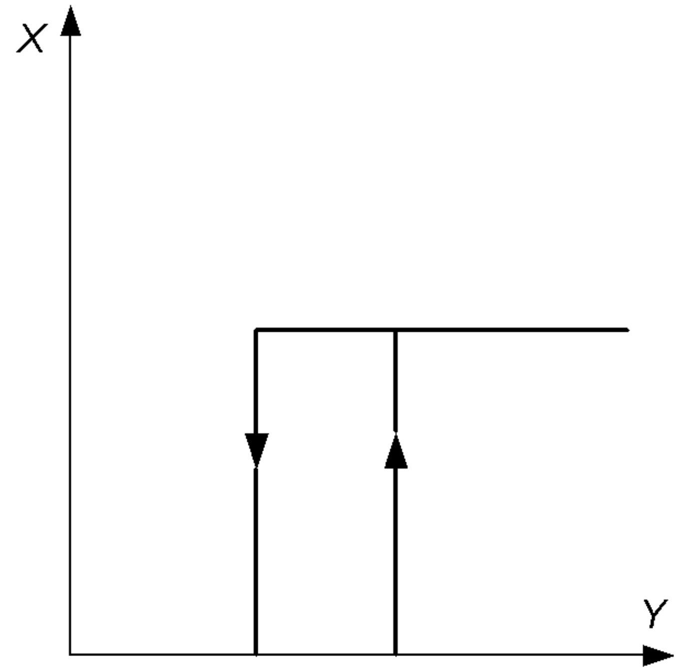


Рис. 1.13. Неоднозначные статические характеристики

Некоторые элементы не имеют жесткой математической зависимости между входным и выходным сигналами, но имеют зависимость между входным сигналом и скоростью изменения выходного сигнала:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot y$$

Такие элементы получили название *астатические.*

Для линейных элементов соотношение между входным и выходным сигналами записывается выражением $x = k \cdot y$,
которое называется **уравнением элемента в установившемся (статическом) режиме**.

Поскольку любой элемент – это устройство, связанное с передачей информации, то для него присущи понятия погрешности и зоны нечувствительности по аналогии с измерительной техникой:

$$\Delta X = X_{вых1} - X_{вых2}$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta X}{X_{вых1}} \cdot 100\%$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{X_{вых\max}} \cdot 100\%$$

где ΔX – абсолютная погрешность элемента; $X_{вых1}$ - идеальное значение выходного сигнала; $X_{вых2}$ – реальное значение выходного сигнала; ε' – относительная погрешность; ε – приведённая погрешность.

Зоной нечувствительности элемента называется максимальный диапазон изменения входного сигнала, при котором выходной сигнал ещё не изменяется

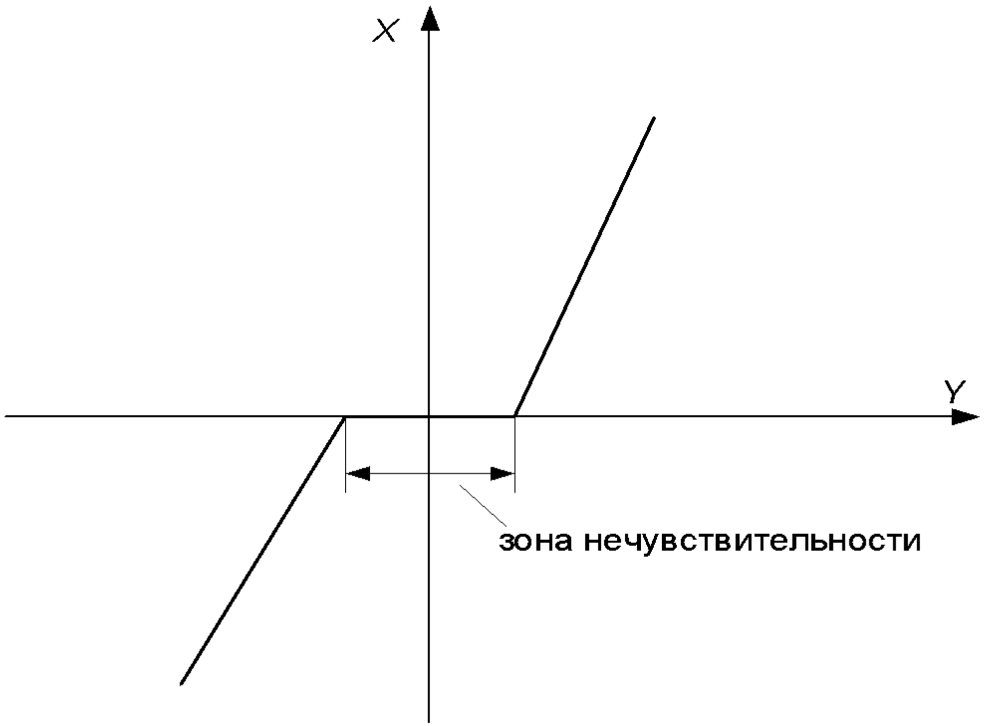
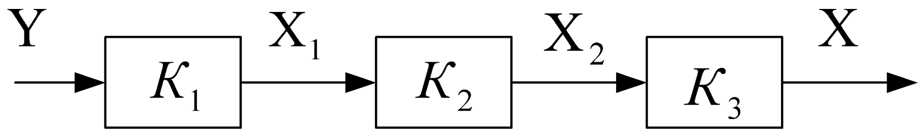


Рис. 1.14. Зона нечувствительности элемента

В схемах элементы могут соединяться между собой различным образом. Однако самые сложные схемы содержат три основных вида соединений элементов:

1. Последовательное соединение



Записывая для каждого элемента уравнения статики, получим

$$X_1 = K_1 \times Y;$$
$$X_2 = K_2 \times X_1;$$
$$X = K_3 \times X_2.$$

Исключая промежуточные неизвестные, можно записать соотношение между входным и выходным сигналами системы:

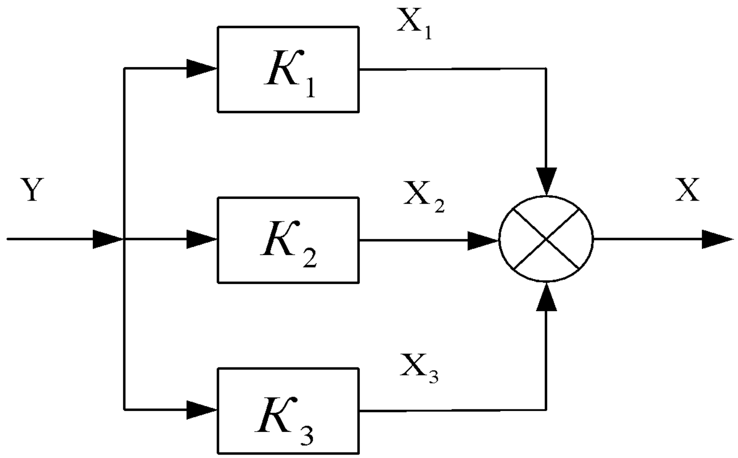
$$X = K_1 \times K_2 \times K_3 \times Y.$$

Таким образом, обобщённый передаточный коэффициент для n последовательно соединенных элементов можно определить как произведение n передаточных коэффициентов отдельных элементов.

$$K = \prod_{i=1}^{n} K_i$$

2. Параллельное соединение

Параллельным соединением элементов принято называть такое, в котором на вход всех элементов поступает общий входной сигнал, а выходные сигналы суммируются.



В соответствии с определением и схемой можно записать:

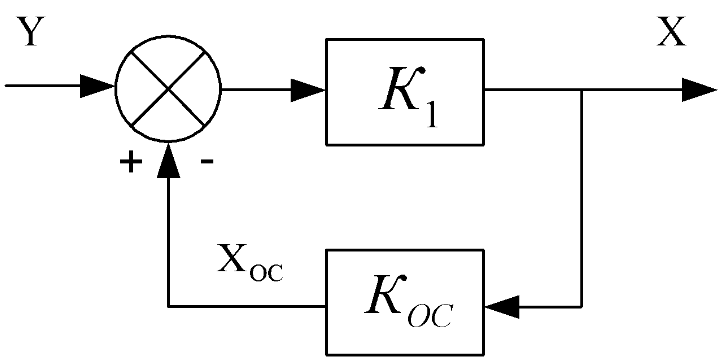
$X_1 = K_1 \times Y;$
$X_2 = K_2 \times Y;$
$X_3 = K_3 \times Y;$
$X = X_1 + X_2 + X_3 = (K_1 + K_2 + K_3) \times Y.$

Таким образом, в общем случае обобщенный передаточный коэффициент при параллельном соединении элементов определяется так:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

3. Встречно-параллельное соединение (элемент, охваченный обратной связью)

Встречно-параллельным соединением называется такое соединение элементов, когда выходной сигнал одного через устройства обратной связи подается снова на вход этого же или одного из предыдущих элементов. Обратная связь может быть положительной, если сигнал обратной связи суммируется с входным сигналом, и отрицательной, если – вычитается.



В соответствии со схемой можно записать:

$X = K_1\,(Y \pm X_{oc});$

$X_{oc} = K_{oc} \times X\,.$

Отсюда

$X = K_1(X \pm K_{oc} \times X);$

$X \pm K_1 K_{oc} \times X = K_1 Y;$

Тогда получим:

$$X = \frac{K_1}{1 \mp K_1 K_{OC}} \cdot Y$$

Таким образом, обобщенный коэффициент для встречно-параллельного способа соединения элементов определяется по выражению:

$$K = \frac{K_1}{1 \mp K_1 K_{OC}}$$

где знак (“–“) для положительной о.с.; знак (“+”) для отрицательной о.с.

СТАТИКА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

Различают два основных состояния систем:
-статическое (установившийся режим);
- динамическое (режим переходного процесса).

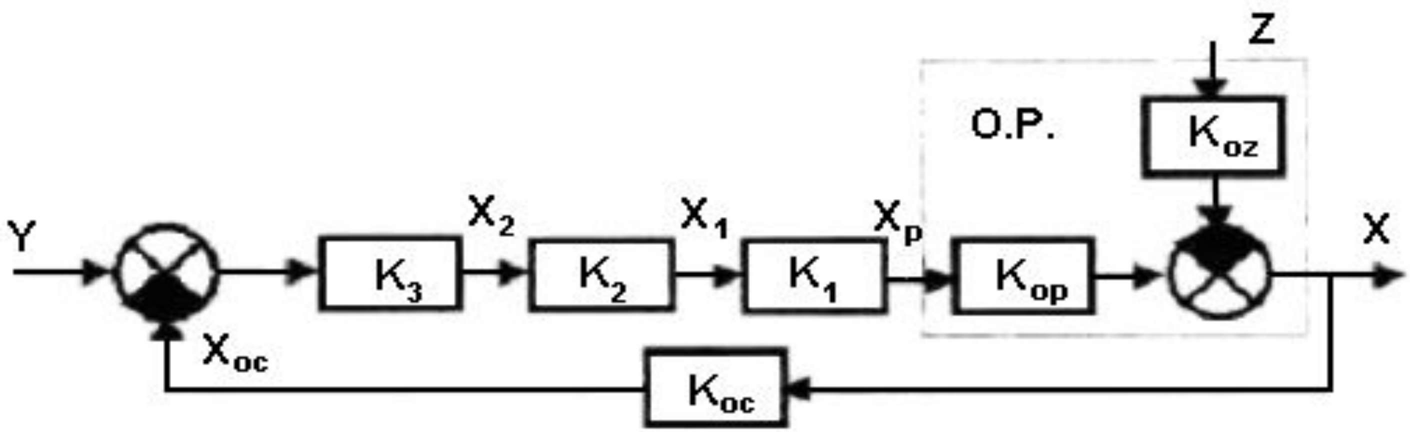
Установившееся состояние системы принято характеризовать следующими признаками:

- регулируемый параметр X достиг установившегося значения, которое равно заданному или отличается от него на определенную величину, которая получила название статической ошибки $\Delta X = X_{зад} - X$
- регулирующий орган неподвижен, находится в состоянии равновесия, т.е. $X_p = const.$

Цель статического расчёта:

1. Определение статической ошибки в системе, если заданы параметры системы (передаточные коэффициенты элементов) и величина максимально возможных возмущений.
2. Определение тех или иных параметров системы по заданной точности (статической ошибке) при заданном возмущении и известных остальных параметрах элементов.

Статическая система автоматического управления



Уравнения статики для каждого элемента:

Для О.Р.

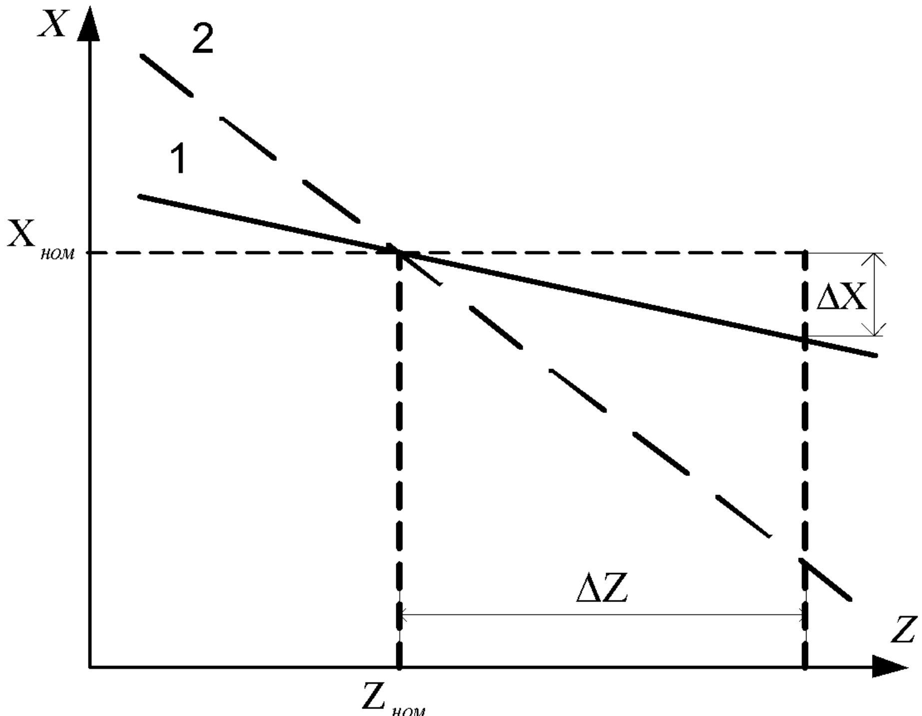
$X = K_{op} X_p - K_{oz} Z.$

Для элементов регулятора

$$\begin{cases} X_p = K_1 X_1; \\ X_1 = K_2 X_2; \\ X_2 = K_3 (Y - X_{oc}); \\ X_{oc} = K_{oc} X. \end{cases}$$

$X_p = K_1 K_2 K_3 (Y - K_{oc} X).$

Статическая характеристика статической САР



$$\Delta X = \frac{K_{oz}}{1+K_{pc}} \cdot \Delta Z$$

Основные свойства статических САР:

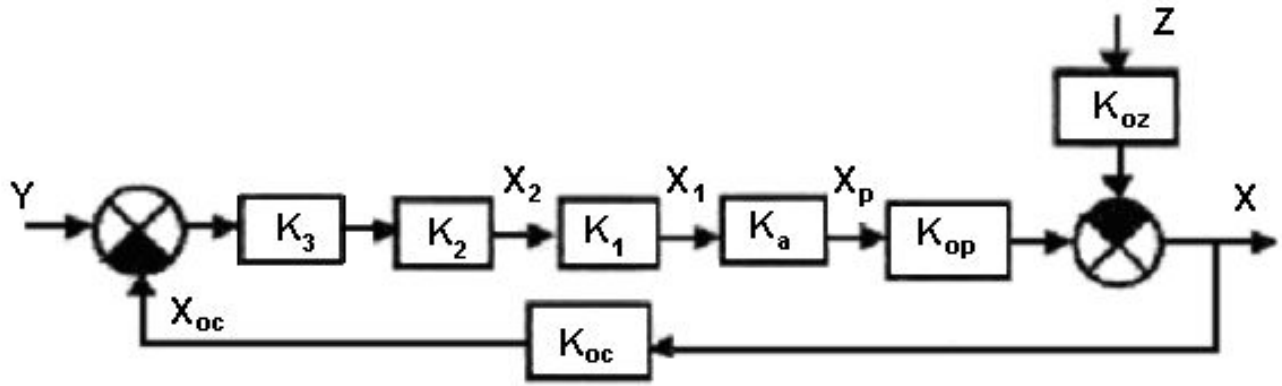
1) статическая ошибка в статических системах зависит от величины возмущения Z;

2) ошибка в системе тем меньше, чем больше коэффициент системы в разомкнутом состоянии $К_{рс}$;

3) при размыкании системы (обрыве обратной связи, т.е. $К_{ос}$=0, а значит, $К_{рс}$=0) система может работать, но ошибка возрастает (характеристика 2).

Астатическая система

Астатический элемент описывается уравнением $\dfrac{dX_{вых}}{dt} = К_а \cdot X_{вх}$



О.Р.

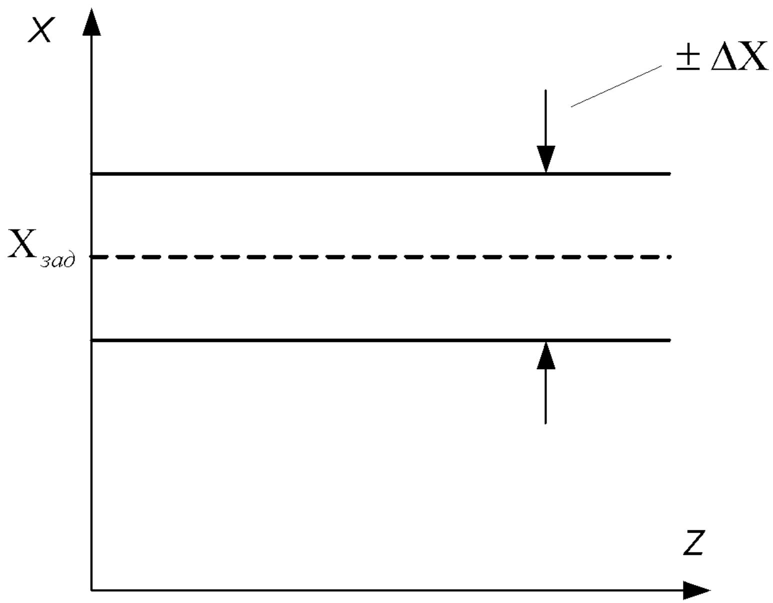
$X = К_{op}\, X_p - К_{oz}\, Z$

Астатический элемент

$$\begin{cases} \dfrac{dX_p}{dt} = К_а \cdot X_1 \\ X_1 = К_1К_2К_3\,(Y - X_{oc}) \\ X_{oc} = К_{oc}\, X \end{cases}$$

$$X_1 = К_1К_2К_3У - К_1К_2К_3К_{oc}\, X$$

Статическая характеристика астатической системы



$$\Delta X = \frac{\varepsilon}{K_1 K_2 K_3 K_{ос}}$$

Свойства астатических систем:

1) ошибка в системе от возмущения не зависит, а зависит только от нечувствительности астатического элемента ε;

2) ошибка тем меньше, чем больше величины коэффициентов (K_1 K_2 K_3 $K_{ос}$);

3) в разомкнутом состоянии ($K_{ос}=0$) система работать не может, т.к. $\Delta X \to \infty$.

Динамика линейных систем

В общем виде уравнение системы автоматического управления n-го порядка после линеаризации:

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_n x=b_0\frac{d^m y}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\dots+b_m y+$$
$$+c_0\frac{d^R z}{dt^R}+c_1\frac{d^{R-1}z}{dt^{R-1}}+\dots+c_R z,$$

Для линейных системах:

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_n x=b_0\frac{d^m y}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\dots+b_m y$$

Применение операторных методов в теории автоматического управления

прямое преобразование Лапласа $$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt$$

$$L\frac{dx}{dt} = P \cdot X(p) - x(0) \qquad L\frac{d^2x}{dt^2} = P^2 \cdot X(p) - P \cdot x(0) - \left.\frac{dx}{dt}\right|_0$$

При нулевых начальных условиях $$L\frac{d^kx}{dt^k} = P^k \cdot X(p)$$

Уравнение линейной системы автоматического управления в операторном виде

$$a_0 p^n \cdot X(p) + a_1 p^{n-1} \cdot X(p) + \dots + a_n \cdot X(p) = b_0 p^m \cdot У(p) +$$
$$+ b_1 p^{m-1} \cdot У(p) + \dots + b_m \cdot У(p)$$

Понятие о передаточной функции и комплексном передаточном коэффициенте

Передаточной функцией в форме преобразования Лапласа принято называть отношение изображения по Лапласу выходного сигнала к изображению входного при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{X(p)}{У(p)}$$

Для уравнения обобщённой САР можно записать

$$X(p) \cdot (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) = У(p) \cdot (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m)$$

$$W(p) = \frac{X(p)}{У(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$$

Преобразование Фурье отличается от преобразования Лапласа тем, что в качестве комплексного переменного используется комплекс частоты, т.е. p=jω.

Уравнение обобщённой САР в форме преобразования Фурье

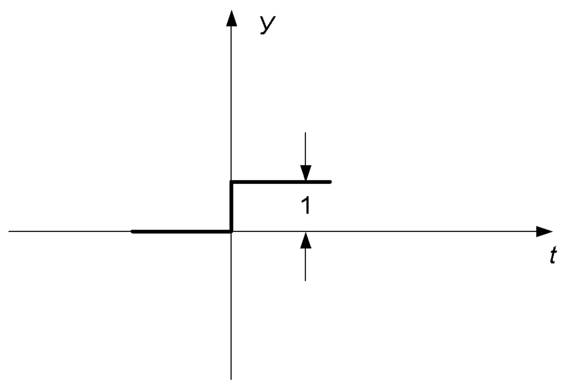
$$a_0(j\omega)^n \cdot X(j\omega) + a_1(j\omega)^{n-1} \cdot X(j\omega) + \dots + a_n \cdot X(j\omega) =$$
$$= b_0(j\omega)^m \cdot У(j\omega) + b_1(j\omega)^{m-1} \cdot У(j\omega) + \dots + b_m \cdot У(j\omega)$$

комплексный передаточный коэффициент

$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{У(j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}$$

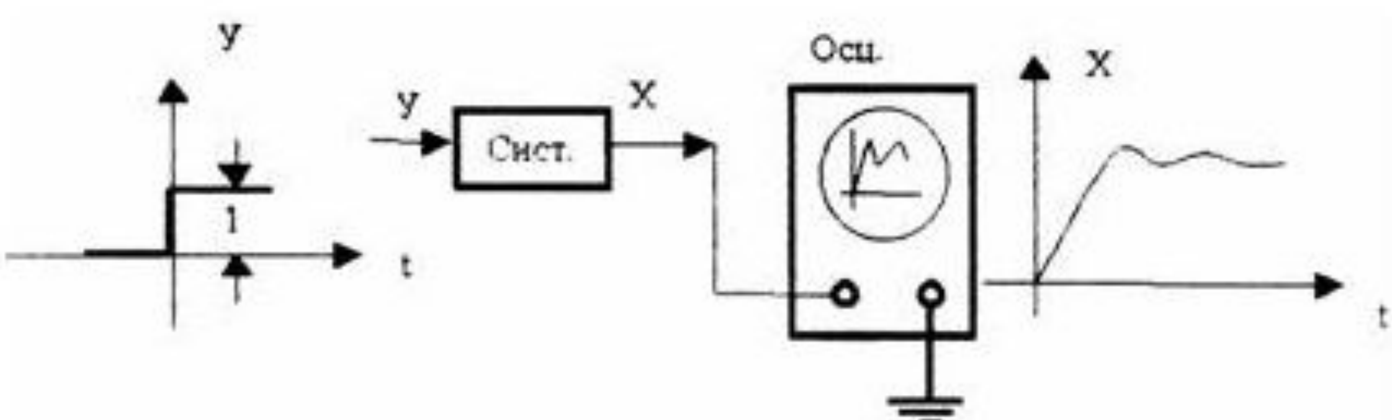
Понятие о переходных и частотных характеристиках

Если получить графическое изображение переходного процесса в системе, т.е. x=f(t), *то по этой кривой можно проанализировать все свойства системы.*



Кривая x=f(t), вызванная единичной ступенчатой функцией на входе системы, получила название переходной характеристики.

Если имеется идеальная система и возможно её экспериментальное исследование, то переходную характеристику можно получить экспериментально*.*



Физический смысл ***частотных характеристик*** *– это различные аспекты реакции системы на синусоидальные входные сигналы различной частоты. Аналитически все основные частотные характеристики получаются из выражения для комплексного передаточного коэффициента W(jω)*

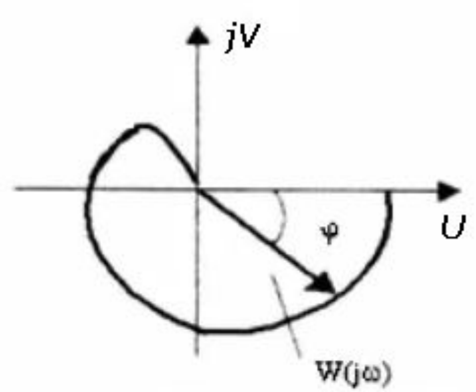
$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = R(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$U(\omega)$ – вещественная частотная характеристика (в.ч.х.);
$V(\omega)$ – мнимая частотная характеристика (м.ч.х.);

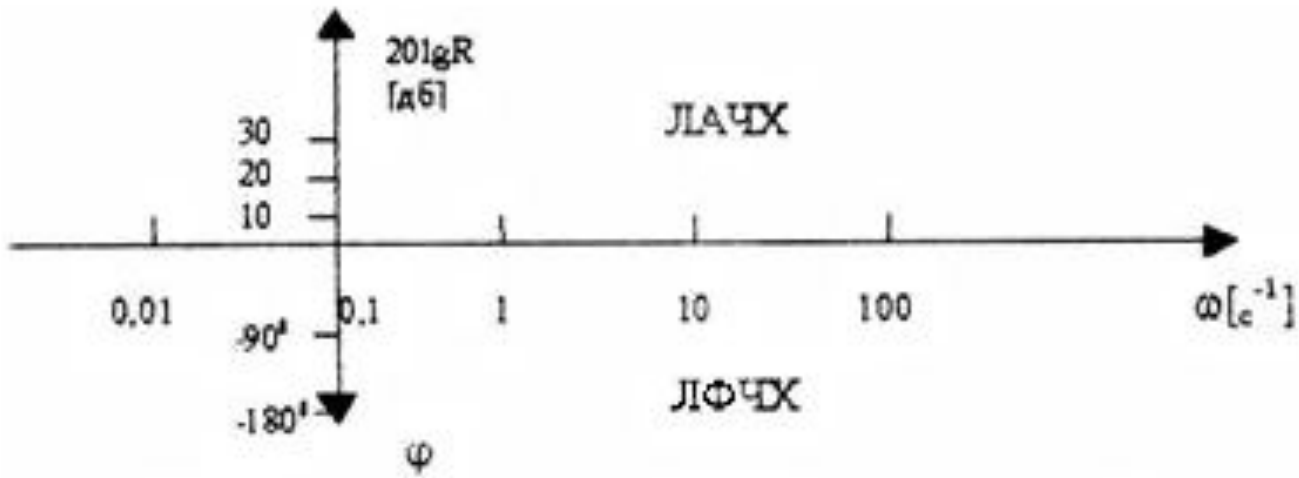
$R(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ – амплитудно-частотная характеристика (а.ч.х.);

$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}$ – фазово-частотная характеристика (ф.ч.х.).

Любое комплексное число – это вектор, который можно изобразить в комплексной плоскости. При изменении частоты от 0 до ∞ вектор W(jω) будет описывать кривую, которая получила название амплитудно-фазовой характеристики:



В практике построения частотных характеристик частота может меняться в очень широких пределах, поэтому линейные шкалы частот не всегда удобны. В связи с этим получили широкое применение логарифмические частотные характеристики.



Таким образом, из одного и того же выражения для комплексного передаточного коэффициента $W(j\omega)$ получается семь основных частотных характеристик:

1. вещественная частотная характеристика (в.ч.х.);
2. мнимая частотная характеристика (м.ч.х.);
3. амплитудно-частотная характеристика (а.ч.х.);
4. фазово-частотная характеристика (ф.ч.х);
5. амплитудно-фазовая характеристика (а.ф.х.);
6. логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ);
7. логарифмическая фазово-частотная характеристика (ЛФЧХ).

Понятие о структурных схемах

В статике использовалось понятие функциональной схемы, состоящей из *элементов,* а в динамике – структурной схемы.

Структурные схемы графически напоминают функциональные, но состоят из *звеньев*. Звено – это часть системы, определенным образом относящаяся к переходному процессу, т.е. устройство, описываемое определенным видом уравнения (дифференциальным) или передаточной функцией.

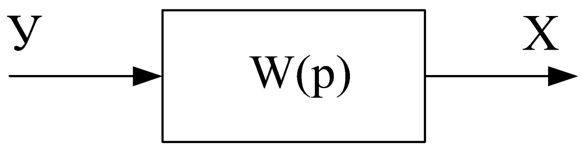


Рис. Звено системы

Структурные схемы так же, как и функциональные, могут преобразовываться к другому виду, посредством обобщенных передаточных функций.

По виду уравнений (передаточных функций) различают пять основных (типовых) звеньев, из которых могут состоять системы автоматического управления:
безынерционное звено;
апериодическое звено 1 порядка
апериодическое звено 2 порядка
дифференцирующее звено;
интегрирующее звено;
особые звенья.

Типовые звенья, их переходные и частотные характеристики

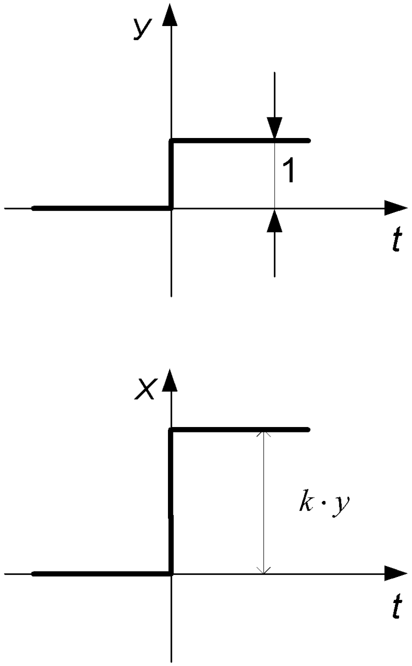


Рис. Переходная характеристика безынерционного звена

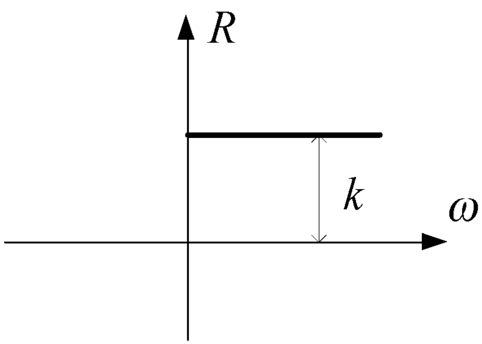
Безынерционное звено **$x = k \cdot y$.**

Для того чтобы получить частотные характеристики, необходимо записать уравнение в операторной форме:

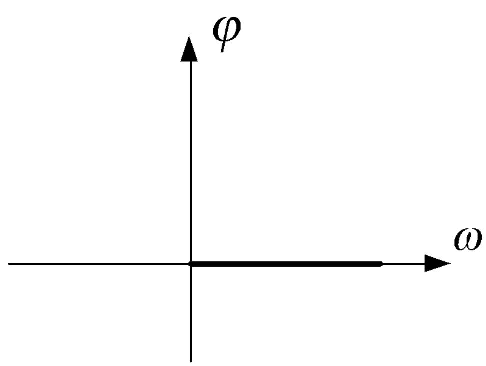
$$X(p) = k \cdot Y(p);$$

Передаточная функция: $W(p) = \dfrac{X(p)}{Y(p)} = k$

Комплексный передаточный коэффициент: $W(j\omega) = \dfrac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = k$



а) амплитудно-частотная



б) фазово-частотная

Частотные характеристики:

$$W(j\omega) = k + j0 = Re^{j\varphi}$$

$R = \sqrt{k^2 + 0^2}$ *– а.ч.х.*

$\varphi = arctg\dfrac{0}{k} = 0$ *– ф.ч.х.*

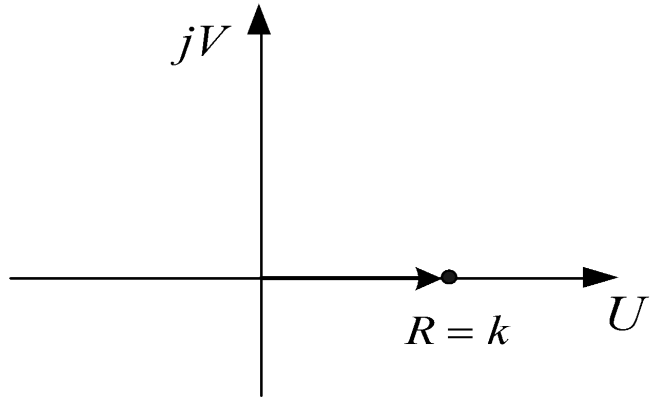


Рис. Амплитудно-фазовая частотная характеристика безынерционного звена

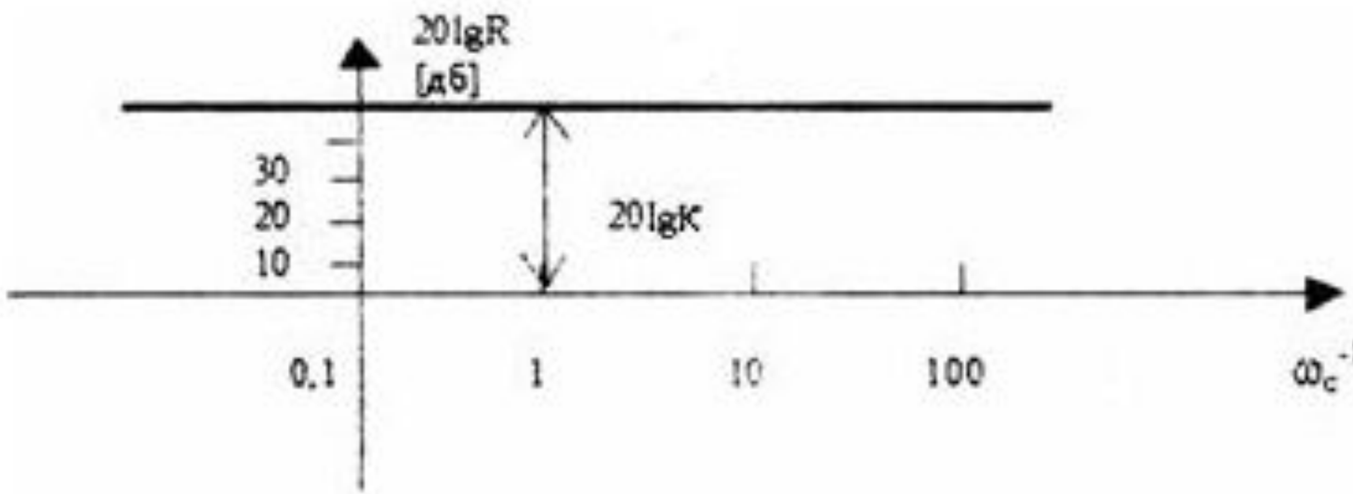
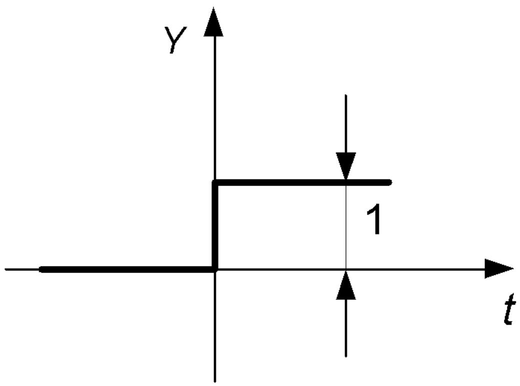


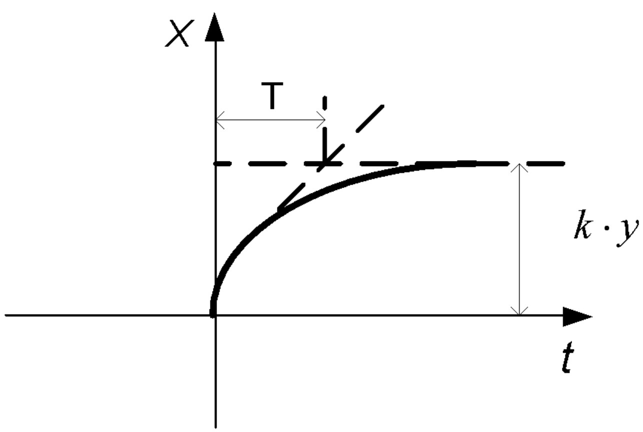
Рис. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика безынерционного звена

Апериодическое звено 1 порядка

$$T\frac{dx}{dt} + x = k \cdot y$$

$$x = k \cdot y\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$





Переходная характеристика

Уравнение в операторной форме:

$$T \cdot P \cdot X(p) + X(p) = \kappa \cdot У(p),$$

Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{X(p)}{У(p)} = \frac{k}{T \cdot P + 1}$$

Комплексный передаточный коэффициент:

$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{У(j\omega)} = \frac{k}{j\omega \cdot T + 1}$$

Апериодическое звено 1 порядка

комплексный передаточный коэффициент:

$$W(j\omega)=\frac{k(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)}=\frac{k}{1+\omega^2T^2}-j\frac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

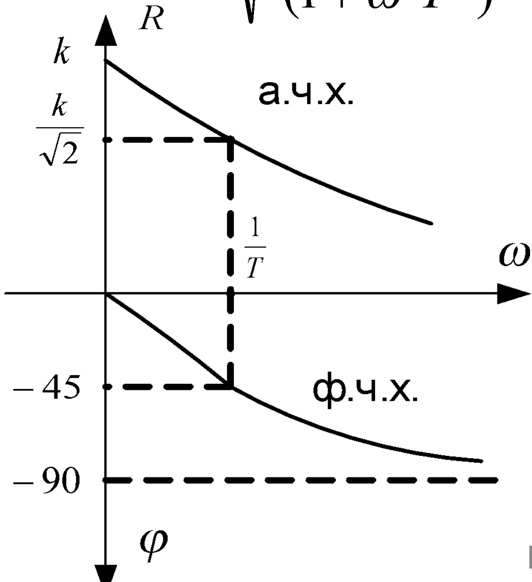
в.ч.х $\quad U(\omega)=\dfrac{k}{1+\omega^2T^2}$ $\qquad$ м.ч.х $\quad \mathrm{V}(\omega)=-\dfrac{\mathrm{k}\omega\mathrm{T}}{1+\omega^2\mathrm{T}^2}$

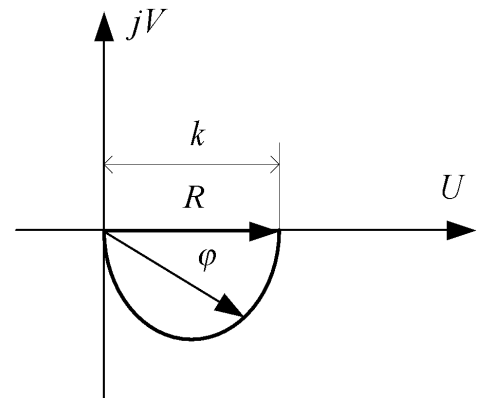
а.ч.х

$$R=\sqrt{U^2+V^2}=\sqrt{\frac{k^2+k^2\omega^2T^2}{(1+\omega^2T^2)^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

ф.ч.х

$$\varphi=arctg\frac{V}{U}=artg(-\omega T)=-arctg(\omega T)$$





Амплитудно-фазовая характеристика

Апериодическое звено 1 порядка

Логарифмическую амплитудно-частотную характеристику можно построить из выражения:

$$20\lg R = 20\lg\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

Эту характеристику обычно строят не по точкам, а упрощенно. Для этого задаются следующими условиями:

1) $\omega << \frac{1}{T}$; тогда $\omega^2T^2 << 1$; $20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2} \approx 0$ и выражение для 1-го участка характеристики $20lgR=20lgk$ – (горизонтальная линия);

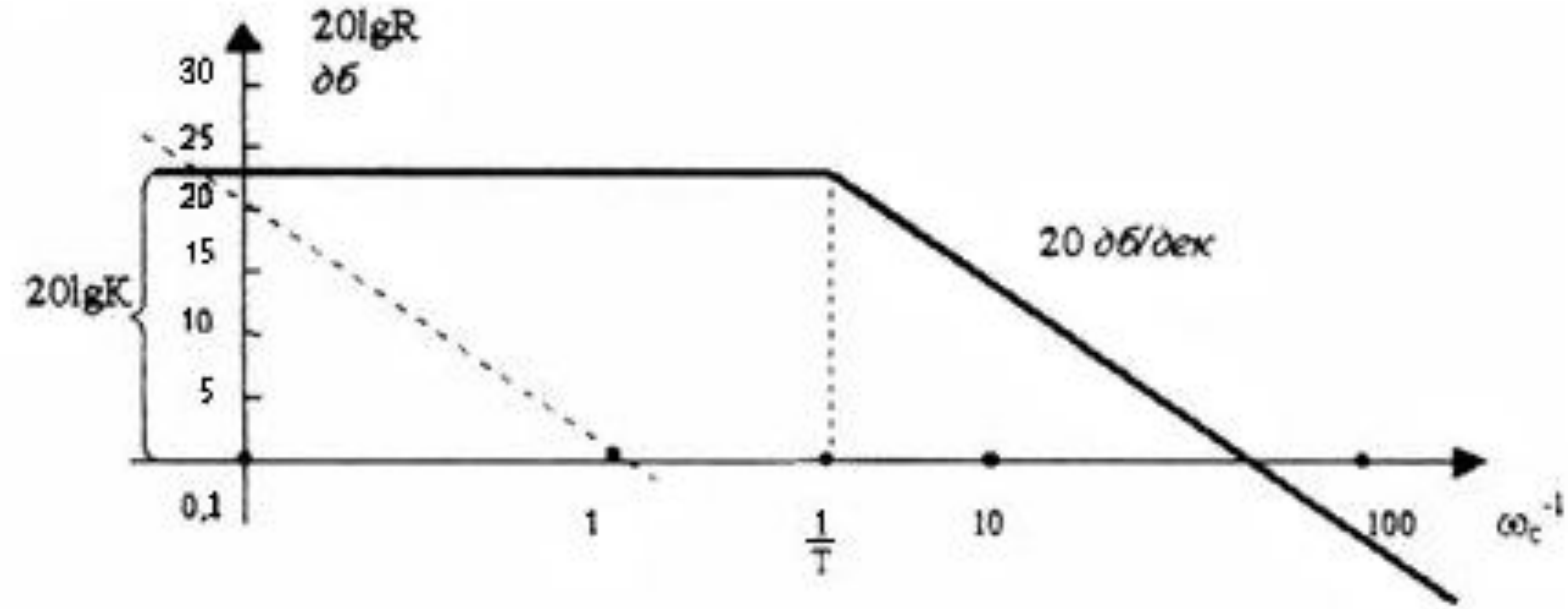
2) $\omega >> \frac{1}{T}$; тогда $\omega^2T^2 >> 1$; $20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2} \approx 20\lg \omega T$ выражение для 2-го участка характеристики $20lgR=20lgk - 20\, lg\omega T$ – (наклонная прямая).

Особенность 2-го участка такова, что величина наклона независимо от параметров данного звена будет одинаковой. Для определения наклона характеристики вычислим изменение амплитуды характеристики на участке при изменении частоты в 10 раз (на одну декаду):

$$\Delta=(20\, lgk - 20\, lg\omega T)-(20\, lgk - 20\, lg10\omega T)= 20\, lgk - 20\, lg\omega T - 20lgk + 20\, lg\omega T + 20\, lg10 = 20\ дб.$$

Для любого звена 1-го порядка высокочастотный участок имеет наклон *20 дб/дек*. Допущением является то, что характеристика изображается не плавной, а в виде двух отрезков, точка сопряжения соответствует $\omega = \dfrac{1}{T}$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика апериодического звена 1-го порядка



Интегрирующее звено

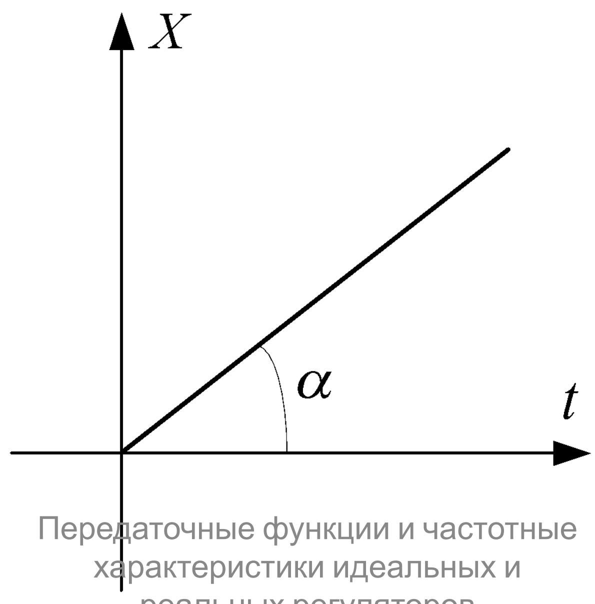
Уравнение интегрирующего звена

$$\frac{dx}{dt} = K_a \cdot y \quad \text{или} \quad x = K_a \int_0^t y \cdot dt$$ где K_a – постоянный коэффициент

При y=1: $x = K_a \int_0^t 1 \cdot dt = K_a \cdot t$

т.е. линейно нарастающая зависимость под углом α=*arctg(*K_a)

Переходная характеристика интегрирующего звена



Интегрирующее звено

Для получения частотных характеристик необходимо записать уравнение интегрирующего звена в операторной форме: $$p\,X(p) = K_a\,У(p)$$

Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{X(p)}{У(p)} = \frac{K_a}{P}$$

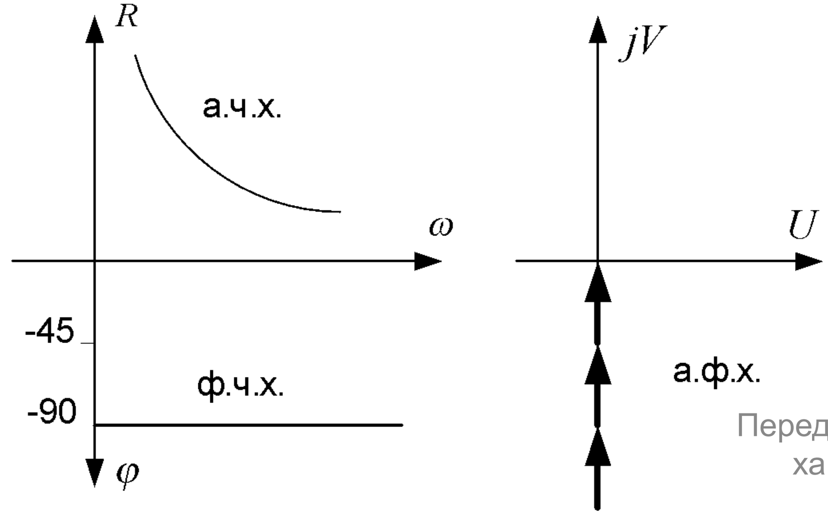
Комплексный передаточный коэффициент:

$$W(j\omega) = \frac{K_a}{j\omega} = 0 - j\frac{K_a}{\omega}$$

АЧХ: $$R = \sqrt{0^2 + \frac{K_a^2}{\omega^2}} = \frac{K_a}{\omega}$$

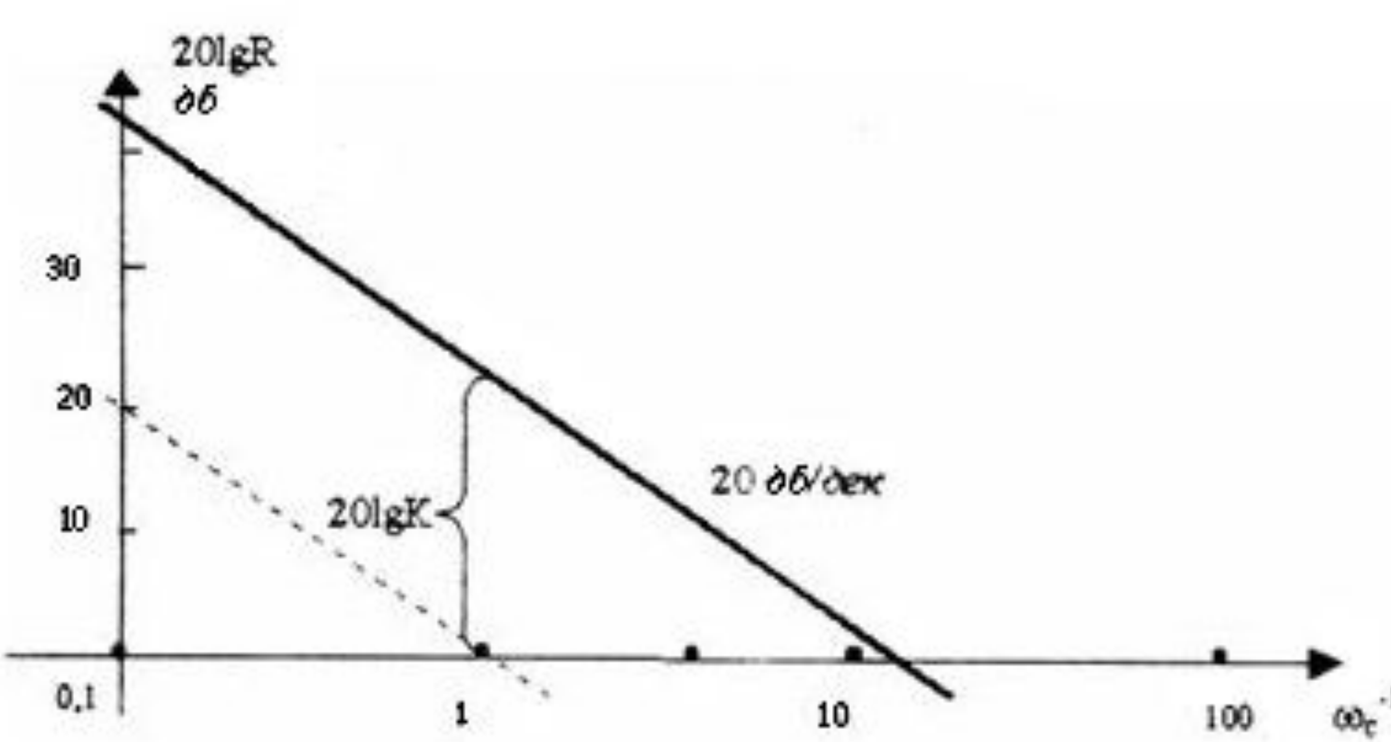
ФЧХ: $$\varphi = arctg\left(\frac{-\frac{K_a}{\omega}}{0}\right) = -arctg\,\infty = -90$$

Частотные характеристики интегрирующего звена



Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика строится из выражения $20lgR=20lgK_a-20\ lg\omega$.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика



Дифференцирующие звенья

Три вида дифференцирующих звеньев со следующими уравнениями:

1) идеальное дифференцирующее звено $$x = K_\partial \cdot \frac{dy}{dt}$$

2) реальное дифференцирующее звено $$T\frac{dx}{dt} + x = K_\partial \cdot \frac{dy}{dt}$$

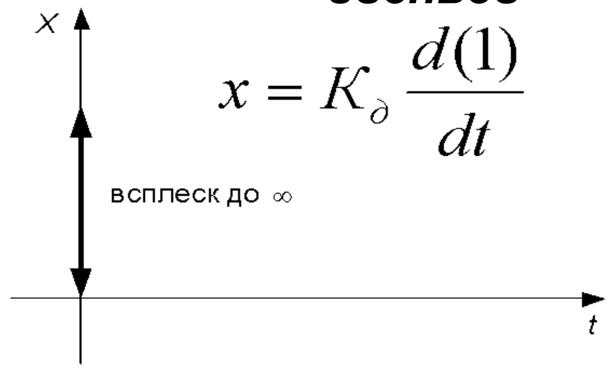
3) реальное дифференцирующее звено со статизмом $$T\frac{dx}{dt} + x = K_\partial \cdot \frac{dy}{dt} + K \cdot y$$

где K_∂ – коэффициент пропорциональности; K – передаточный коэффициент;
T – постоянная времени

Переходные характеристики дифференцирующих звеньев

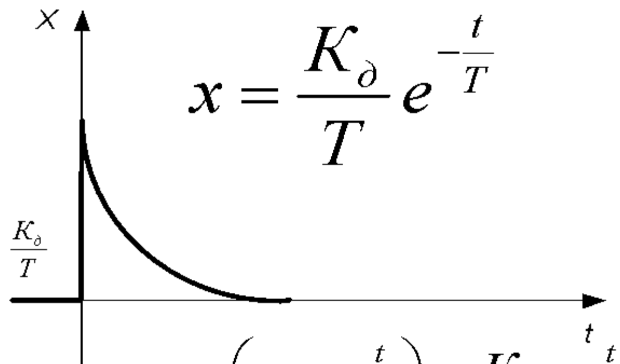
а)

$$x = K_{\partial} \frac{d(1)}{dt}$$



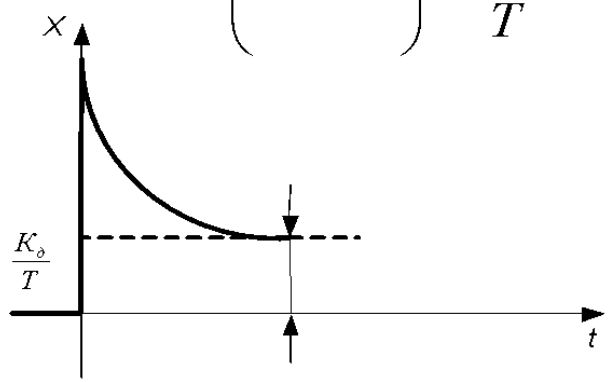
б)

$$x = \frac{K_{\partial}}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



в)

$$x = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + \frac{K_{\partial}}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена

Уравнение идеального дифференцирующего звена в операторной форме:

$$X(p) = K_\partial \cdot p \cdot У(p)$$

Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{X(p)}{У(p)} = K_\partial \cdot P$$

Комплексный передаточный коэффициент:

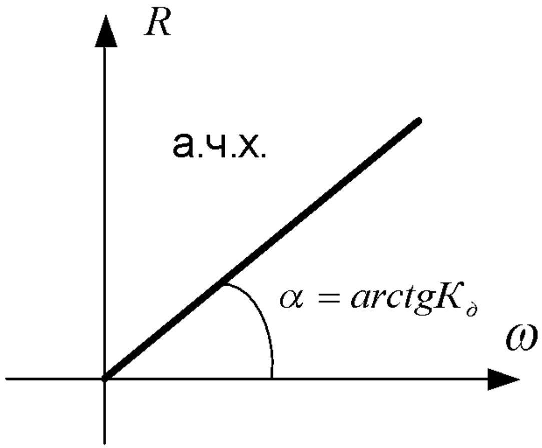
$$W(j\omega) = jK_\partial \cdot \omega = 0 + jK_\partial \cdot \omega$$

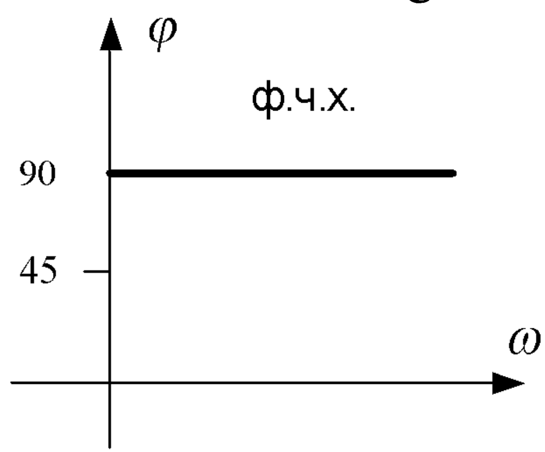
АЧХ:

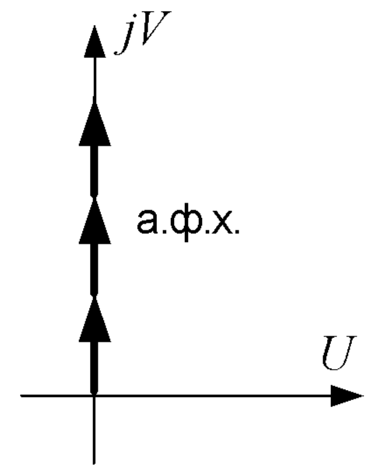
$$R = \sqrt{0^2 + K_\partial^2 \omega^2} = K_\partial \cdot \omega$$

ФЧХ:

$$\varphi = arctg\frac{V}{U} = arctg\,\infty = +90^o$$



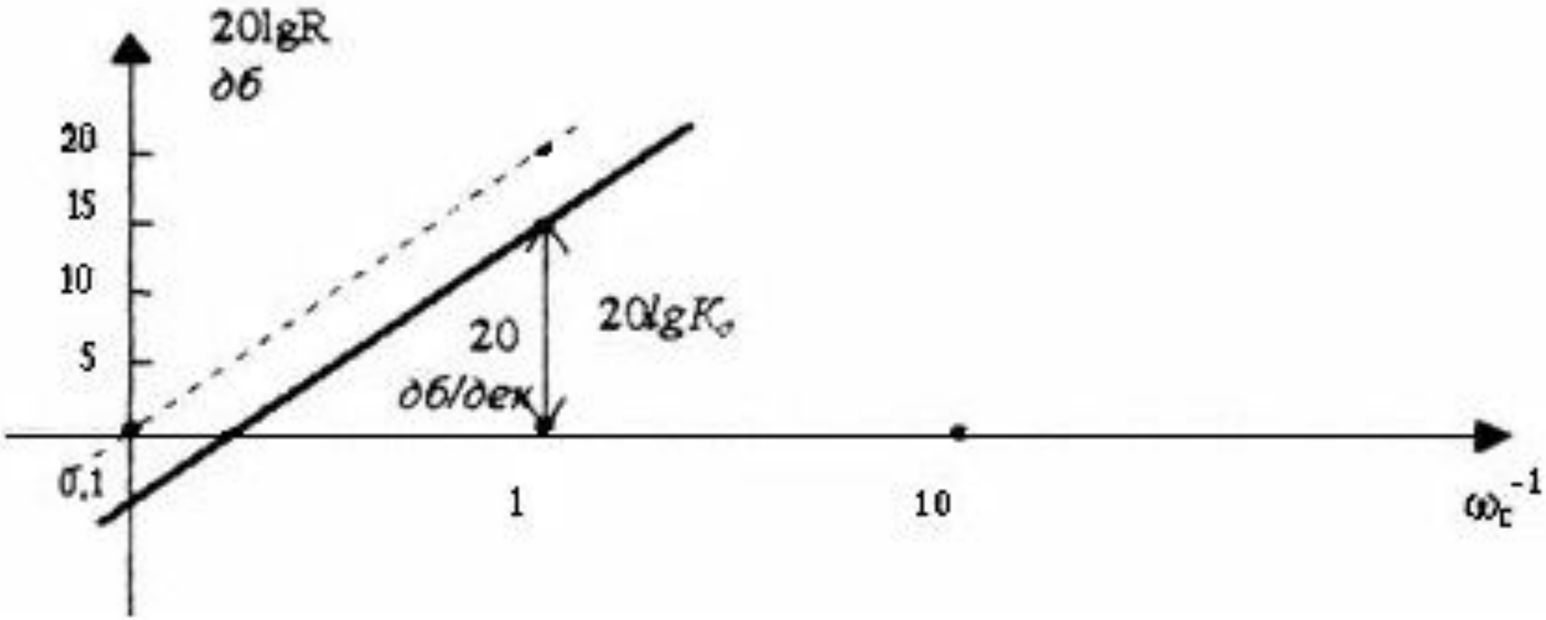




Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика идеального дифференцирующего звена может быть построена из выражения:

$$20lgR=20lgK_{д}+20lg\omega$$

ЛАЧХ идеального дифференцирующего звена



Апериодическое (колебательное) звено 2-го порядка

$$T^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\rho \cdot T \frac{dx}{dt} + x = k \cdot y$$

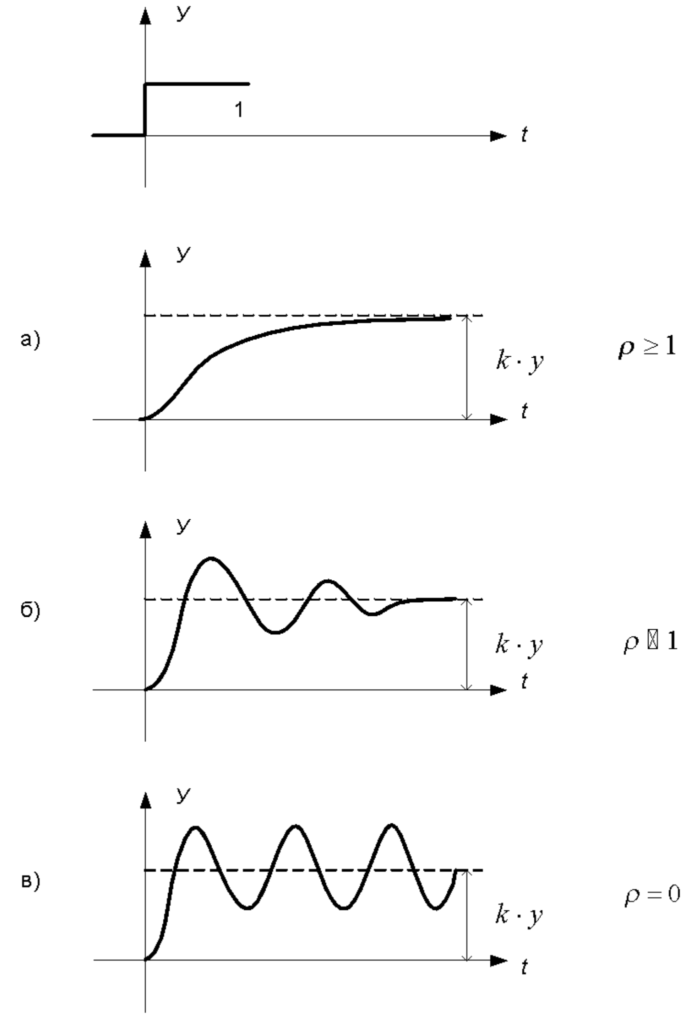
где T – постоянная времени; ρ – коэффициент затухания; k – передаточный коэффициент

Характер переходного процесса в звене зависит от вида корней характеристического уравнения:

1. Если корни p_1, p_2 вещественные, то в этом случае $\rho \geq 1$, переходный процесс апериодический и звено называют апериодическим (рис.а).

2. Если корни p_1, p_2 комплексные, тогда $\rho < 1$, переходный процесс в звене колебательный и звено называют колебательным (рис.б).

3. Если корни p_1, p_2 чисто мнимые, ρ=0, то переходный процесс представляет собой реализацию незатухающих колебаний, звено называют консервативным (рис. в).



Для построения частотных характеристик уравнение звена необходимо записать в операторной форме

$$T^2P^2X(p) + 2\rho \cdot T \cdot P \cdot X(p) + X(p) = k \cdot У(p)$$

Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{k}{T^2P^2 + 2\rho TP + 1}$$

Комплексный передаточный коэффициент:

$$W(j\omega) = \frac{k}{-T^2\omega^2 + j2\rho T\omega + 1}$$

Умножим и разделим W(jω) на выражение, сопряженное знаменателю:

$$W(j\omega) = \frac{k\left[(1 - T^2\omega^2) - j2\rho T\omega\right]}{\left[(1 - T^2\omega^2) + j2\rho T\omega\right] \cdot \left[(1 - T^2\omega^2) - j2\rho T\omega\right]} =$$

$$= \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\rho^2T^2\omega^2} - j\frac{2k \cdot \rho \cdot T \cdot \omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\rho^2T^2\omega^2}$$

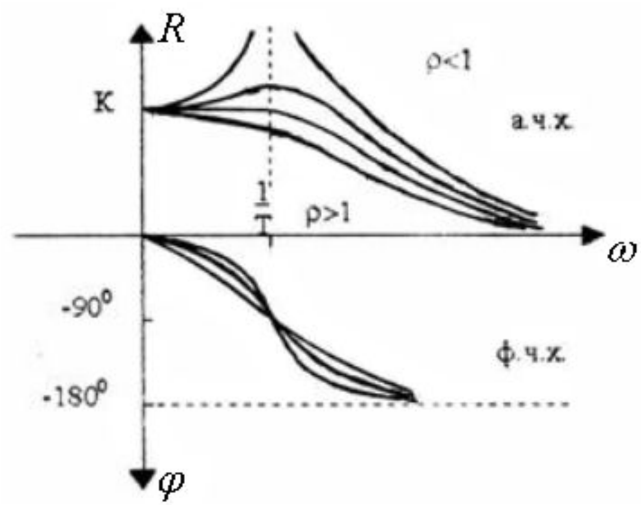
АЧХ

$$R=\sqrt{U^2+V^2}=\sqrt{\frac{k^2(1-T^2\omega^2)^2+4k^2\rho^2T^2\omega^2}{\left[(1-T^2\omega^2)^2+4\rho^2T^2\omega^2\right]^2}}=$$

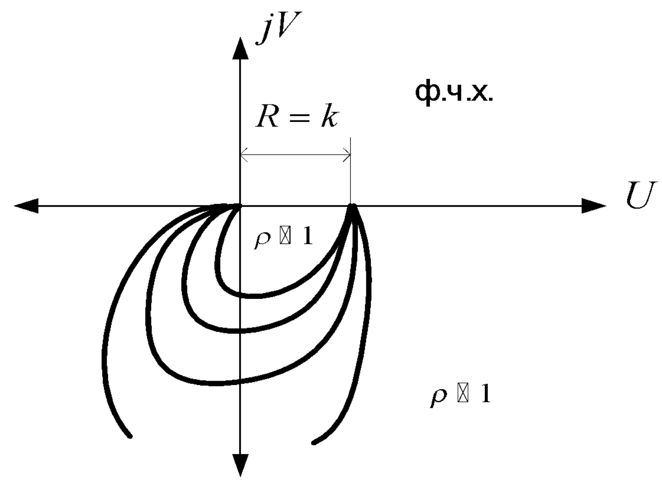
$$=\sqrt{\frac{k^2\left[(1-T^2\omega^2)^2+4\rho^2T^2\omega^2\right]}{\left[(1-T^2\omega^2)^2+4\rho^2T^2\omega^2\right]^2}}=\frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4\rho^2T^2\omega^2}}$$

ФЧХ

$$\varphi=arctg\frac{V}{U}=arctg\left(-\frac{2\rho T\omega}{1-T^2\omega^2}\right)=-arctg\frac{2\rho T\omega}{1-T^2\omega^2}$$



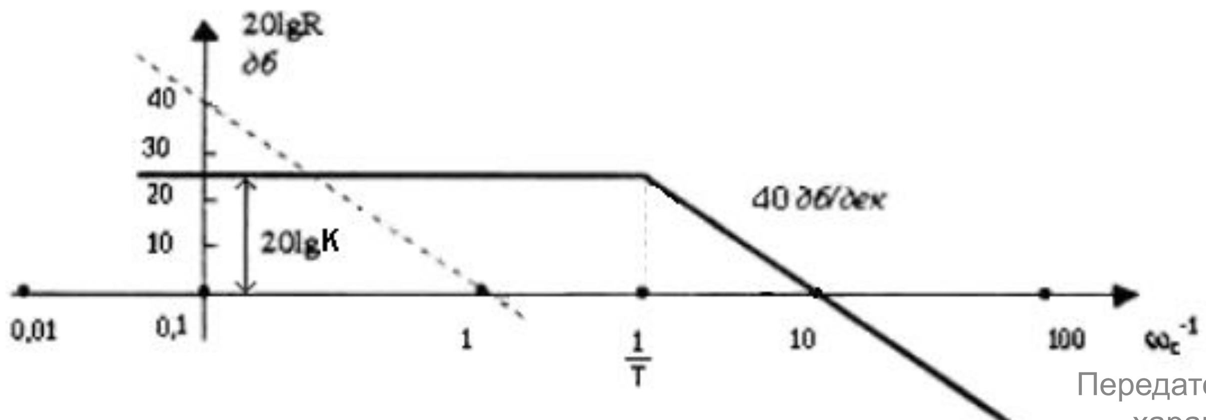
Амплитудно-фазовые характеристики звена 2-го порядка, т.е. кривые, описываемые вектором W(jω) в комплексной плоскости при изменении частоты от 0 до ∞.



ЛАЧХ звена 2-го порядка получается на основании выражения:

$$20\lg R = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\rho^2T^2\omega^2}$$

В упрощённом (асимптотическом) варианте эту характеристику можно построить состоящей из двух отрезков (аналогично звену 1-го порядка).



Частотные характеристики систем

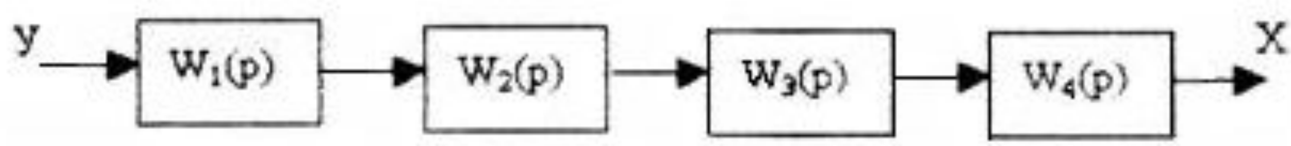


Рис.1. Разомкнутая система

Передаточная функция этой системы:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p)$$

Комплексный передаточный коэффициент:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \cdot W_3(j\omega) \cdot W_4(j\omega)$$

или

$$R_p e^{j\varphi_p} = R_1 e^{j\varphi_1} \cdot R_2 e^{j\varphi_2} \cdot R_3 e^{j\varphi_3} \cdot R_4 e^{j\varphi_4} = R_1 R_2 R_3 R_4 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)}$$

$R_p = R_1 R_2 R_3 R_4$ – а.ч.х. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ – ф.ч.х.

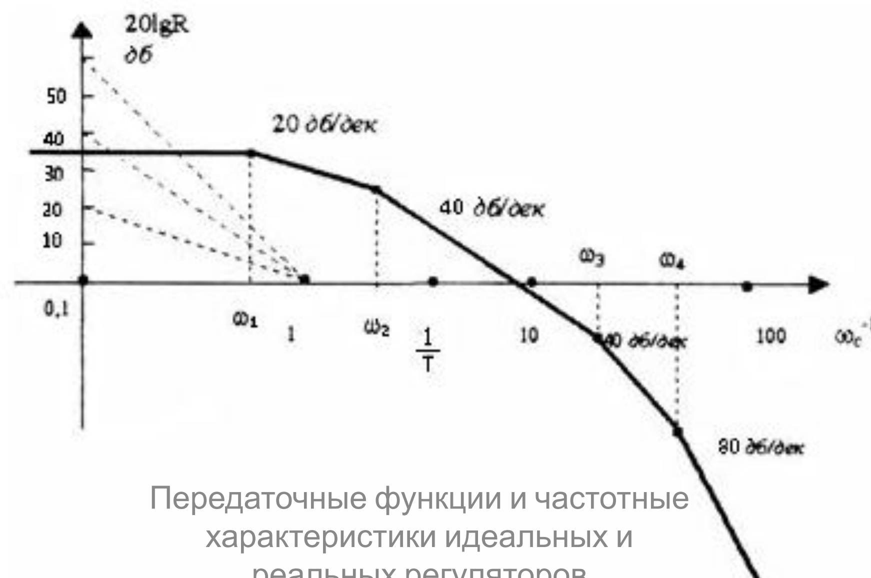
ЛАЧХ строится по выражению: $20lgR_p = 20lgR_1 + 20lgR_2 + 20lgR_3 + 20lgR_4.$

Поскольку ЛАЧХ обычно строятся упрощённо, суммарную ЛАЧХ разомкнутой системы можно построить непосредственно по передаточной функции. Например, дана передаточная функция для четырех последовательно соединённых звеньев 1-го порядка:

$$W_p(p) = \frac{K_p}{(T_1P+1)(T_2P+1)(T_3P+1)(T_4P+1)}.$$

В этом случае необходимо определить 20lgK_p, что является амплитуда низкочастотного горизонтального участка ЛАЧХ. Затем необходимо рассчитать частоты сопряжений $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$; $\omega_3 = \frac{1}{T_3}$; $\omega_4 = \frac{1}{T_4}$.

Каждая последующая частота сопряжений обеспечивает излом характеристики, увеличивая её наклон на 20 *дб/дек.*



Устойчивость линейных систем

Система автоматического регулирования или любая другая система считаются устойчивыми, если, будучи выведенной из состояния равновесия, а затем предоставленной самой себе, возвращается в прежнее или занимает новое состояние равновесия.

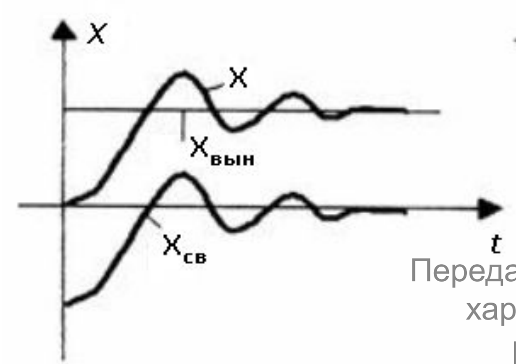
Система автоматического регулирования считается устойчивой, если переходный процесс в ней затухающий; неустойчивой – если переходный процесс в ней расходящийся.

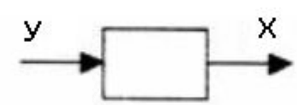
Устойчивость линейных систем зависит только от параметров самих систем и не зависит от величины возмущающих и других внешних воздействий.

Пусть система описывается дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m y$$

Решение этого дифференциального уравнения состоит из свободной и вынужденной составляющих: $x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t)$





Для того чтобы проанализировать систему на устойчивость, достаточно получить $x_{св}$, т.е. решить уравнение без правой части:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0$$

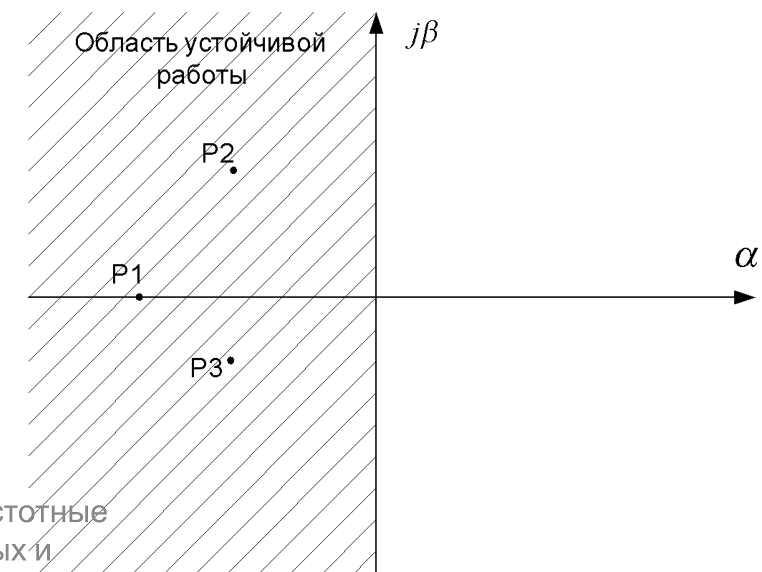
Если $x_{св} \to 0$, то система устойчива, если $x_{св} \to \infty$, система неустойчива.

Из математики известно, что свободная составляющая может быть найдена в следующем виде:

$$x_{св} = c_1 e^{P_1 t} + c_2 e^{P_2 t} + c_3 e^{P_3 t} + \dots + c_n e^{P_n t}$$

$x_{св} \to 0$ в том случае, если корни характеристического уравнения отрицательны.

САУ будет устойчива, т.е. переходный процесс в ней будет сходящимся, если среди корней характеристического уравнения системы не окажется ни одного с положительной вещественной частью.



Алгебраические критерии устойчивости

Формулировка критерия **Гурвица**:

Для того чтобы все корни характеристического уравнения системы имели отрицательную вещественную часть, т.е. система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ главный определитель характеристического многочлена и его диагональные миноры были больше 0.

Пусть имеется характеристическое уравнение: $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0$

Главный определитель имеет n-строк и n-столбцов. По главной диагонали записываются коэффициенты от a_1 до a_n . Выше коэффициентов, записанных по главной диагонали, записываются коэффициенты на порядок выше, ниже – коэффициенты на порядок ниже.

Выше a_n записываются 0, ниже коэффициента a_0 также записываются 0.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & & 0 \\ 0 & a_0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix} > 0.$$

Диагональные миноры получаются последовательным вычеркиванием последнего столбца и последней строки, начиная с главного определителя.

Пример.

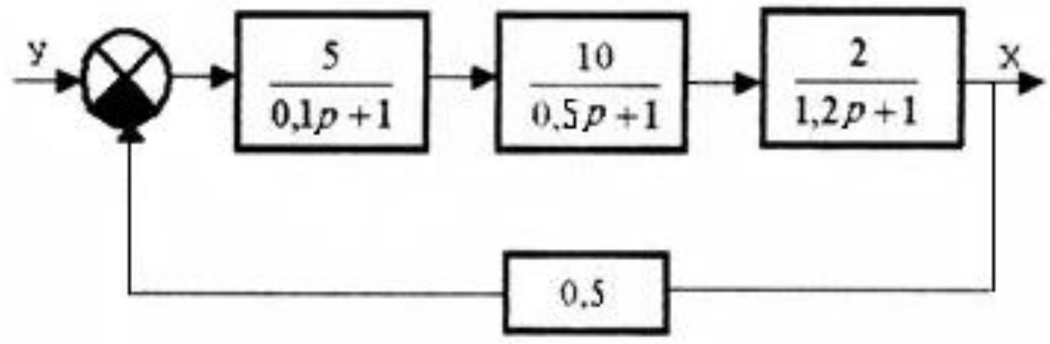


Рис. 2.Структурная схема системы

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{з.с.}}(p) = \frac{\dfrac{100}{(0{,}1p+1)(0{,}5p+1)(1{,}2p+1)}}{1+\dfrac{50}{(0{,}1p+1)(0{,}5p+1)(1{,}2p+1)}} = \frac{100}{(0{,}1p+1)(0{,}5p+1)(1{,}2p+1)+50} = \frac{100}{0{,}06p^3+0{,}77p^2+1{,}8p+51}.$$

Характеристический многочлен содержится в знаменателе выражения, т.е. a_0=0,06; a_1=0,77; a_2=1,8; a_3=51.

Тогда главный определитель системы

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0{,}77 & 51 & 0 \\ 0{,}06 & 1{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}77 & 51 \end{vmatrix} = 51\cdot(0{,}77\cdot 1{,}8 - 51\cdot 0{,}06) < 0,$$

т.е. система неустойчива.

Геометрические критерии устойчивости

Критерий Михайлова

Пусть имеется передаточная функция замкнутой системы:

$$W(p)=\frac{X(p)}{У(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n}$$

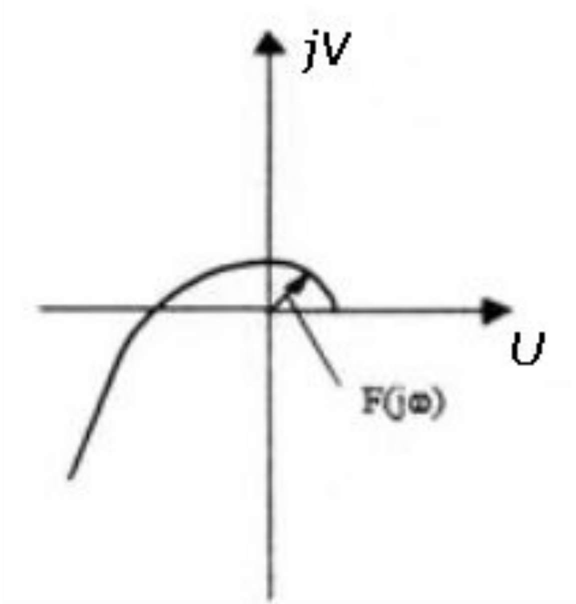
Подставив в выражение для передаточной функции $p=jw$, получим выражение для комплексного передаточного коэффициента:

$$W(j\omega)=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_n}$$

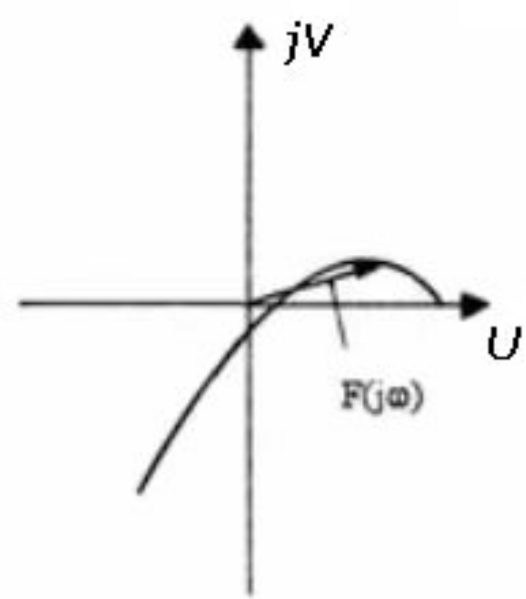
Знаменатель комплексного передаточного коэффициента (характеристический многочлен в комплексной форме записи) есть некое комплексное число, т.е. некоторый вектор. Это выражение получило название **вектора Михайлова**:

$$F(j\omega)=a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_n$$

Формулировка критерия: *Для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы радиус-вектор Михайлова при изменении частоты от 0 до ∞ повернулся на угол* $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$, *где n – порядок системы.*



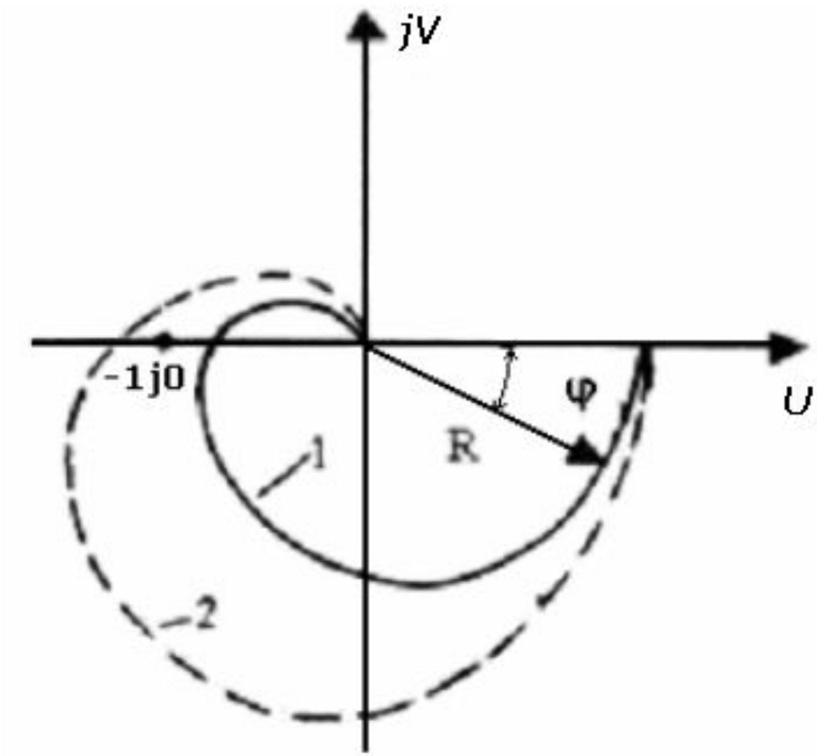
а) для устойчивой системы



б) для неустойчивой системы

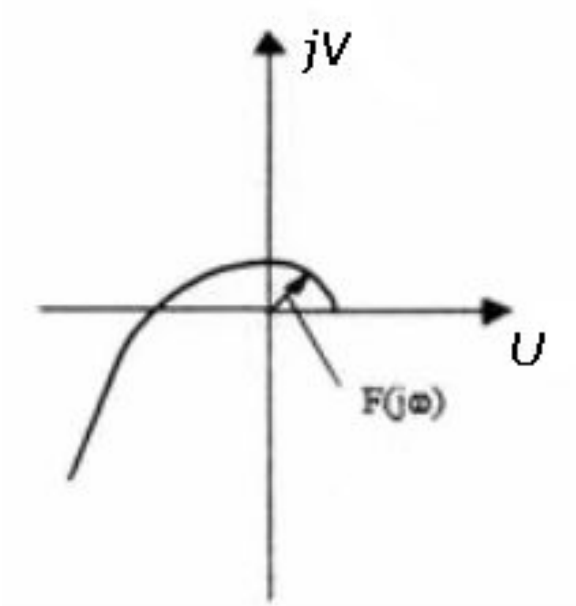
Критерий Найквиста

Для того чтобы замкнутая САР была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы а.ф.х. этой системы в разомкнутом состоянии не охватывала точку в комплексной плоскости с координатами [-1;j0].

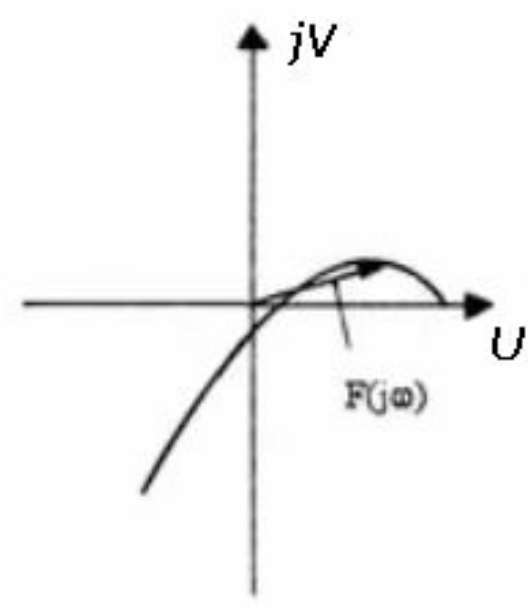


кривая 1 – замкнутая система устойчива;
кривая 2 – замкнутая система неустойчива .
При этом предполагается, что разомкнутая система заведомо устойчива.

Формулировка критерия: *Для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы радиус-вектор Михайлова при изменении частоты от 0 до ∞ повернулся на угол* $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$, *где n – порядок системы.*



а) для устойчивой системы

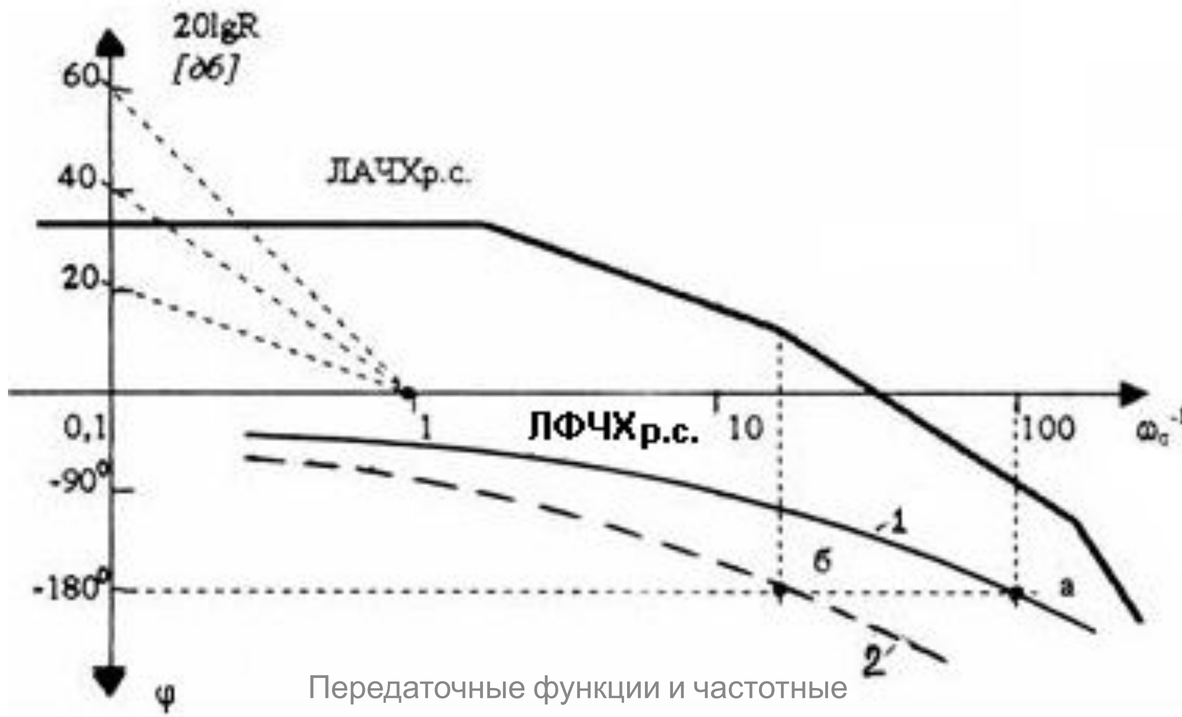


б) для неустойчивой системы

Логарифмический критерий устойчивости

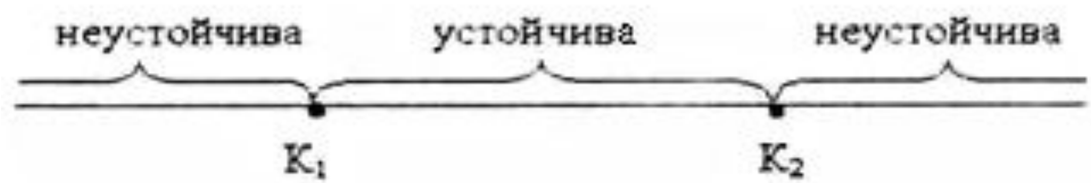
Позволяет судить об устойчивости замкнутой САР по логарифмическим амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристикам этой системы в разомкнутом состоянии.

Для того чтобы замкнутая САР была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы фазово-частотная логарифмическая характеристика этой системы (в разомкнутом состоянии) пересекала линию – 180^0 в зоне отрицательных значений ЛАЧХ.



Построение областей устойчивости в пространстве параметров систем (областей D-разбиения)

Если изменяется какой-либо один вещественный параметр, то задача заключается в отыскании граничных значений этого параметра на некой числовой оси:



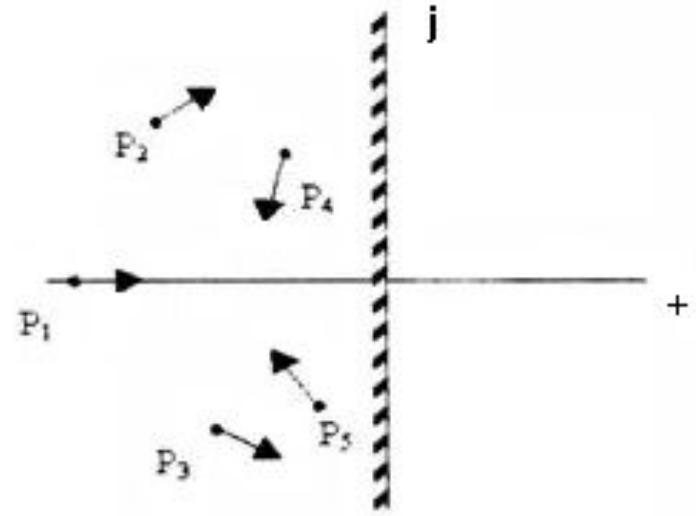
Если изменяются два вещественных или один комплексный параметр – задача состоит в отыскании некоторой области в прямоугольной системе координат, ограниченной кривой.

В общем случае в системе может изменяться S параметров, поэтому можно говорить о нахождении некой области устойчивости системы в S-мерном пространстве. Гиперповерхность, ограничивающая эту область, будет границей устойчивости в области параметров.

Области параметров, соответствующие равному количеству корней характеристического уравнения с отрицательной (положительной) вещественной частью, получили название областей D-разбиения.

Построение областей D-разбиения в пространстве одного (комплексного) параметра

Пусть имеется некоторый параметр $t = \pm A \pm jB$. В характеристическом уравнении системы этот параметр содержится в коэффициентах. При изменении этого параметра будут изменяться те коэффициенты, которые его содержат. Будут изменяться коэффициенты – будут изменяться корни характеристического уравнения системы, т. е. как-то перемещаться по комплексной плоскости корней:



Выделим из характеристического уравнения интересующий нас параметр τ, тогда получим некое выражение

$$\tau \cdot P(p) = Q(p),$$

где $P(p)$ – многочлен, содержащий параметр τ, $Q(p)$ – многочлен, не содержащий параметр τ.

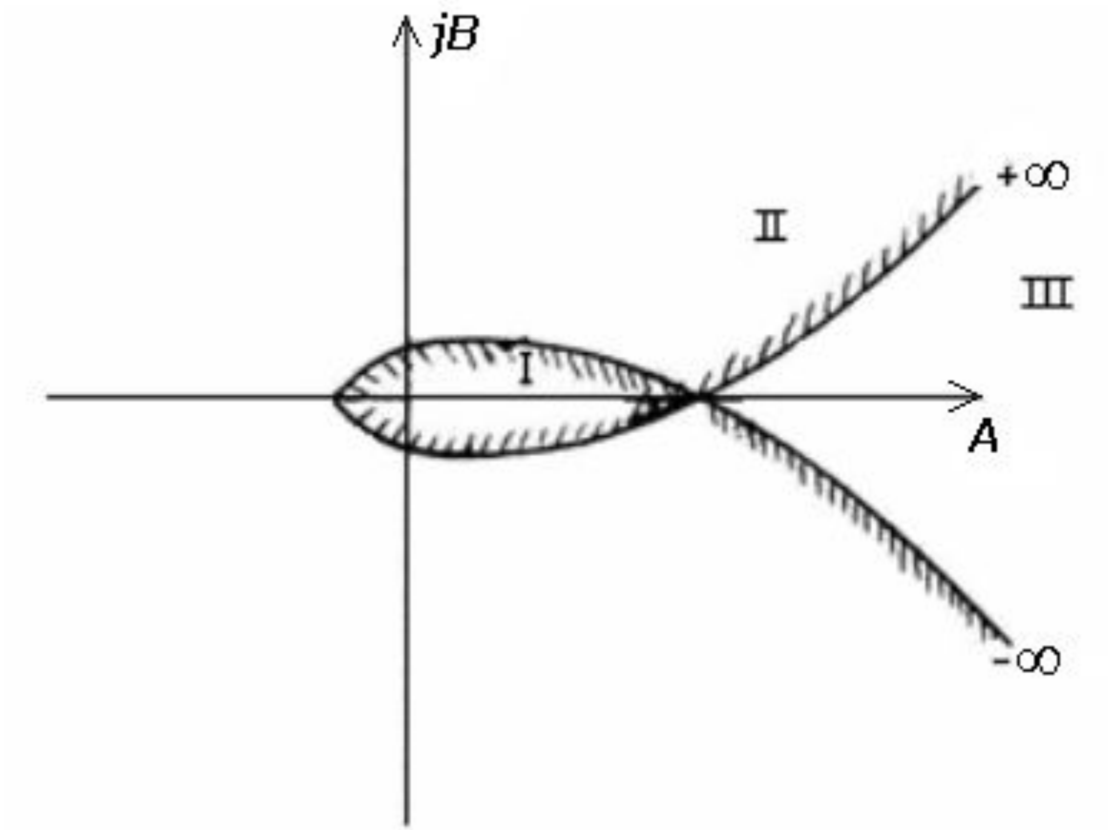
$$\tau = \frac{Q(p)}{P(p)}.$$

Подставим в это выражение $p=j\omega$ – чисто мнимый корень

$$\tau = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} = A(\omega) + jB(\omega).$$

Подставляя в выражение $\tau = \dfrac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} = A(\omega) + jB(\omega)$.

значения частоты от -∞ до +∞, получим границу областей D-разбиения в плоскости параметра *t*. Одна из этих областей является областью устойчивости



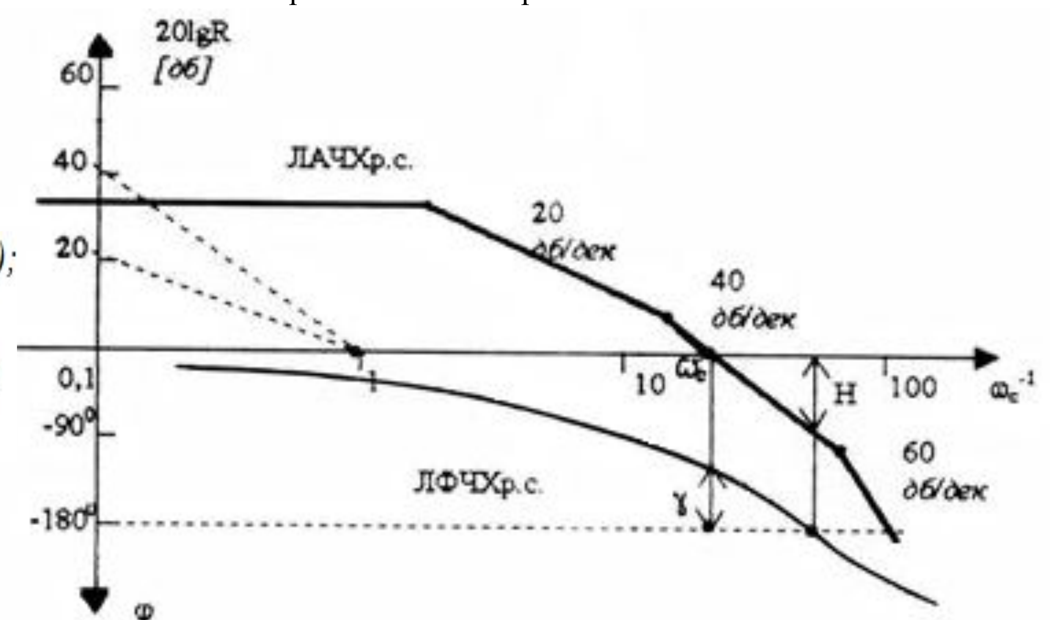
Запас устойчивости системы

Запас устойчивости предусматривает некоторое удаление расчётных параметров от значений, соответствующих границе устойчивости. Формулировка запаса устойчивости вытекает из того, что в основе двух наиболее распространенных критериев устойчивости (Найквиста и логарифмического) лежат характеристики, построенные на выражении для комплексного передаточного коэффициента разомкнутой системы:

$$W(j\omega)_{p.c.} = R(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Для оценки запаса устойчивости обычно вводят понятие запаса *по модулю* и *по фазе*. Эти величины можно определить, пользуясь ЛАЧХ$_{\text{р.с.}}$ и ЛФЧХ$_{\text{р.с.}}$ (логарифмический критерий) .

H(дб) – запас устойчивости по модулю (при φ = -180^0);
γ^0 = 180^0-$\varphi_{\omega c}$ – запас устойчивости по фазе (при ω_c);
$\varphi_{\omega c}$ – угол поворота (фаза) вектора $W(j\omega)_{p.c.}$ при частоте, равной ω_c – частота среза



Качество переходного процесса в системах и методы его исследования

Качество процесса оценивается следующими основными показателями:

1. *Устойчивость и запас устойчивости*

- показатели, характеризующие работоспособность системы.

2. *Колебательность*

При переходном процессе регулируемая величина может до достижения нового установившегося значения с определённой точностью совершать большее или меньшее число колебаний. Колебания в системе – явление нежелательное, т.к. это приводит к дополнительному износу деталей, отклонению выходного сигнала от установившегося значения. Поэтому стремятся так выполнить САР, чтобы колебательность свести к минимуму.

Колебательность процесса **соответствует наличию комплексных корней** в характеристическом уравнении системы. Аналитически колебательность оценивается показателем

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}$$ где β – мнимая часть комплексного корня ($p = \alpha + j\beta$);
α – вещественная часть комплексного корня.

$$\mu = \frac{\beta}{0} = \infty$$ - колебания незатухающие

$$\mu = \frac{0}{\alpha} = 0$$ - колебаний нет, процесс апериодический

3. *Быстродействие системы*

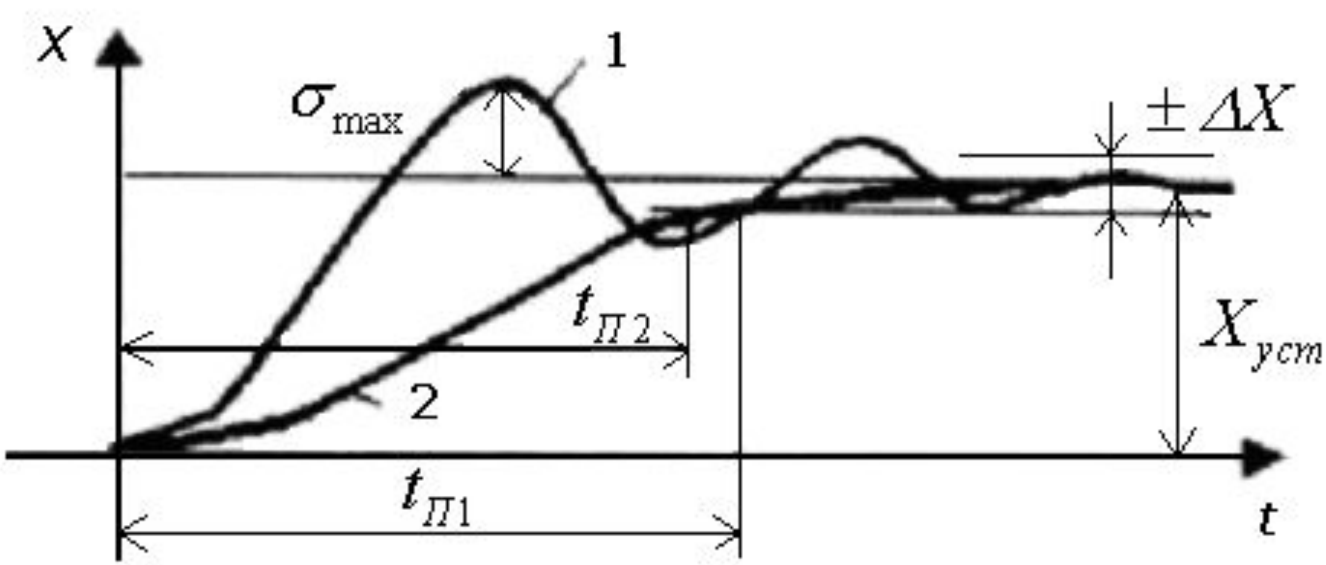


Рис. Переходная характеристика и основные показатели качества: 1 – колебательный переходный процесс; 2 – апериодический переходный процесс; ±ΔX – точность, с которой оценивается окончание процесса

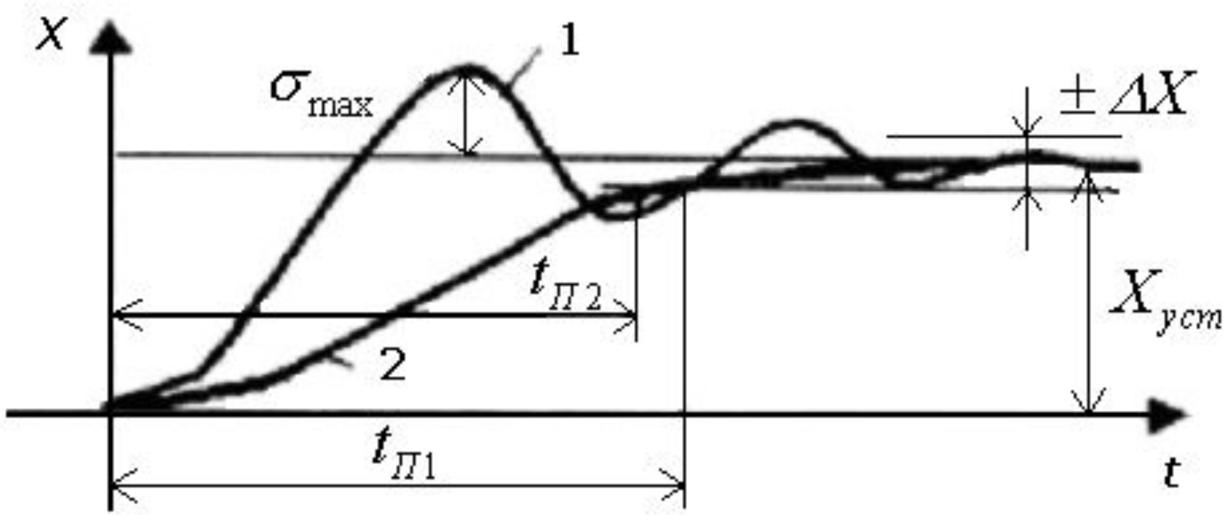
Быстродействие характеризует скорость реагирования САР на внешние воздействия. Для оценки быстродействия используется величина времени переходного процесса, т.е. времени, за которое выходной сигнал с определенной заданной точностью достигает своего установившегося значения.

4. *Перерегулирование*

Характеризует отклонение выходного сигнала от установившегося значения в переходном процессе. Оценка идет по максимальному отклонению, $\sigma_{\max}$

Перерегулирование также явление нежелательное, т.к. это механические или электрические перегрузки, перенапряжения. Обычно перерегулирование оценивается в % к установившемуся значению выходного сигнала

$$\sigma_{\max}\% = \frac{\sigma_{\max}}{X_{уст}} \cdot 100\%$$

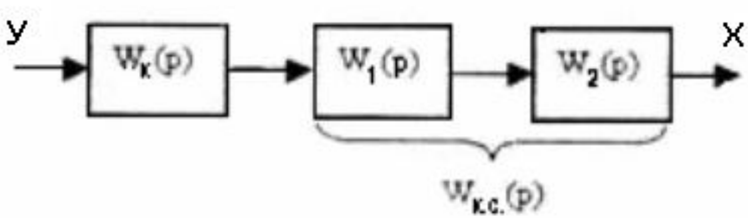


Коррекция систем автоматического управления

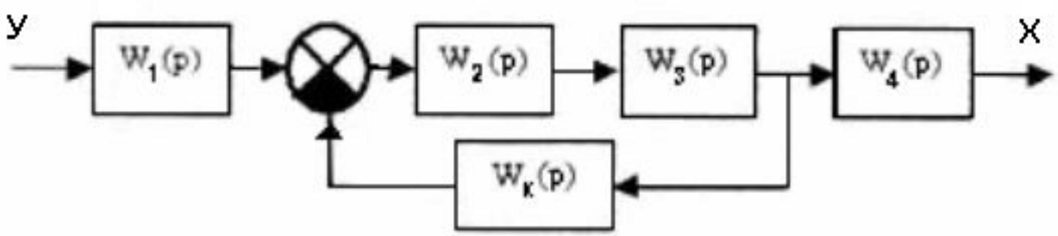
Необходимость в коррекции систем возникает при их проектировании или настройке.

Обеспечение устойчивой и качественной работы САУ с помощью дополнительных устройств называется коррекцией, а сами устройства – корректирующими.

По способу включения корректирующих звеньев различают последовательную (а) и параллельную (б) коррекцию.



а)



б)

Задача синтеза корректирующего звена по заданным показателям качества решается в следующей последовательности:

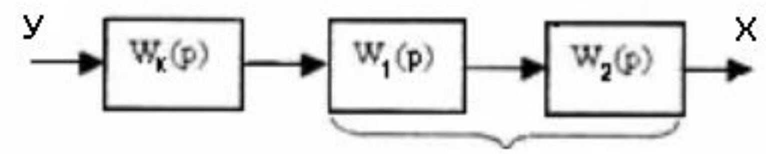
1) по заданным показателям качества (σ_{max}, t_n, H, γ) ищут либо передаточную функцию, либо частотную характеристику, либо уравнение системы, удовлетворяющей исходным требованиям (желаемой системы);

2) по передаточной функции (характеристике, уравнению) желаемой системы, сравнивая её с передаточной функцией (характеристикой, уравнением) исходной системы, находят передаточную функцию (характеристику, уравнение) дополнительного, корректирующего звена;

3) по передаточной функции (характеристике, уравнению) корректирующего звена определяют его вид и рассчитывают его параметры.

Синтез последовательного корректирующего звена методом ЛАЧХ

Передаточная функция скорректированной (желаемой) системы в разомкнутом состоянии будет иметь вид:



$$W_{ж}(p) = W_{к}(p) \cdot W_{н.с.}(p)$$

Где передаточная функция исходной (нескорректированной) системы:

$$W_{н.с.}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p)$$

Перейдя к комплексной форме записи, получим $W_{ж}(j\omega) = W_{к}(j\omega) \cdot W_{н.с.}(j\omega)$

или $R_{ж} e^{j\varphi_{ж}} = R_{к} e^{j\varphi_{к}} \cdot R_{н.с.} e^{j\varphi_{н.с.}} = R_{к} \cdot R_{н.с.} e^{j(\varphi_{к} + \varphi_{н.с.})}$

Перейдя к ЛАЧХ, запишем $20\lg R_{ж} = 20\lg R_{к} + 20\lg R_{н.с.}$,

где $20\lg R_{ж}$ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика желаемой системы (для краткости обычно обозначается $L_{ж}$); $20\lg R_{к}$ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика корректирующего звена ($L_{к}$); $20\lg R_{н.с.}$ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика исходной системы ($L_{н.с.}$).

$L_{ж} = L_{к} + L_{н.с.}$. Отсюда $L_{к} = L_{ж} - L_{н.с.}$.

Синтез последовательного корректирующего звена можно осуществить в следующей последовательности:

1) по передаточной функции $W_{н.с.}(p)$ в разомкнутом состоянии системы строится ЛАЧХ нескорректированной исходной системы $L_{н.с.}$; по заданным показателям качества переходного процесса $(\sigma_{\max}, t_п, H, \gamma)$ строится $L_ж$;

2) производится графическое вычитание $L_к = L_ж - L_{н.с.}$, и строится ЛАЧХ последовательного корректирующего звена – $L_к$;

3) по найденной характеристике $L_к$ определяется тип звена и его параметры.

Построение желаемой ЛАЧХ ($L_ж$)

Построение $L_ж$ обычно начинается со среднего участка, с точки пересечения этой характеристикой оси частот, т.е. с так называемой частоты среза – ω_c. Величина этой частоты определяется из условия получения *требуемой длительности переходного процесса* – $t_п$ и *заданного значения перерегулирования* – $\sigma_{\max}$.

$$\omega_c \geq \frac{K \cdot \pi}{t_п}.$$

Коэффициент $K=f(\sigma_{\max})$ определяется из графиков, приводимых в литературе. В пределах допустимых значений $\sigma_{\max}$ (25-35%) коэффициент K можно брать равным $3{,}5 \div 3{,}8$.

Требование устойчивости работы системы отражается в характеристике $L_{ж}$ наклоном её в окрестности частоты среза. Исследования показали, что система будет заведомо устойчивой, если этот наклон равен 20 *дб/дек*.

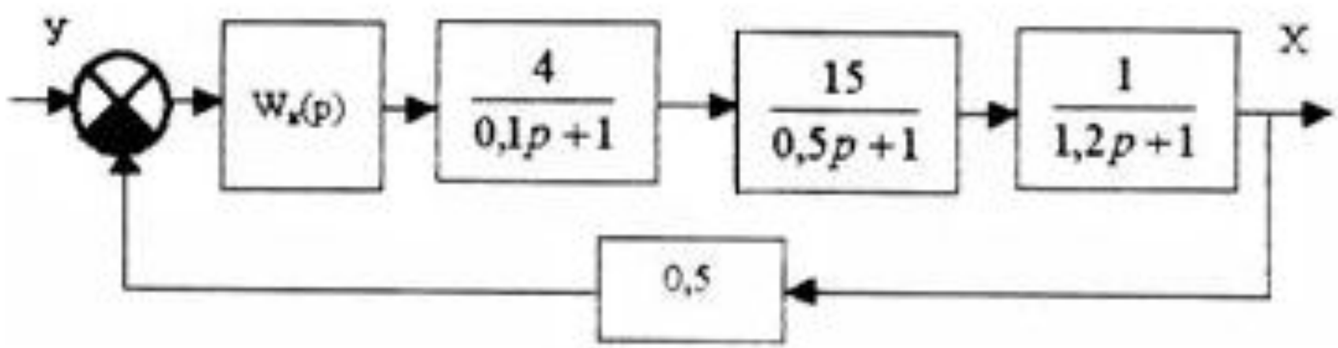
Требование необходимых запасов устойчивости (H, γ) отражается длиной участка $L_{ж}$ в районе частоты среза, имеющего наклон 20 *дб/дек*. Длина участка может быть вычислена в зависимости от H и γ по специальным номограммам

В первом приближении для обеспечения практически приемлемых запасов устойчивости участок с наклоном 20 *дб/дек* можно брать длиной, равной ± 10-15 дб.

Условие сохранения статической точности системы будет соблюдено, если совместить низкочастотные участки $L_{ж}$ и $L_{н.с.}$. Итак, известен низкочастотный участок $L_{ж}$, её отрезок в среднечастотной части, в окрестностях частоты среза. Из условия наиболее простой реализации корректирующего звена высокочастотный участок $L_{ж}$, мало влияющий на свойства системы, можно также совместить с $L_{н.с.}$ или провести параллельно этой характеристике.

Чем меньше изломов у характеристики корректирующего звена, тем проще его техническая реализация. Так как $L_{к} = L_{ж} - L_{н.с.}$, то наименьшее число изломов $L_{к}$ получится в том случае, если изломы $L_{ж}$ будут происходить при тех же частотах, при каких наблюдаются изломы $L_{н.с.}$, т.е. при сопрягающих частотах, и если изменения углов наклона этих двух характеристик в точках излома будут одинаковыми. Поэтому переход от среднечастотной части $L_{ж}$ к её низко- и высокочастотным участкам желательно по возможности осуществлять с помощью отрезков, которые имеют изломы в сопрягающих частотах $L_{н.с.}$.

Пример. Требуется выполнить коррекцию системы, структурная схема которой приведена на рис., последовательным корректирующим звеном, если необходимо обеспечить следующие показатели: $\sigma_{max} \leq 30\%$, $t_n \leq 4$с, достаточный практически запас устойчивости.



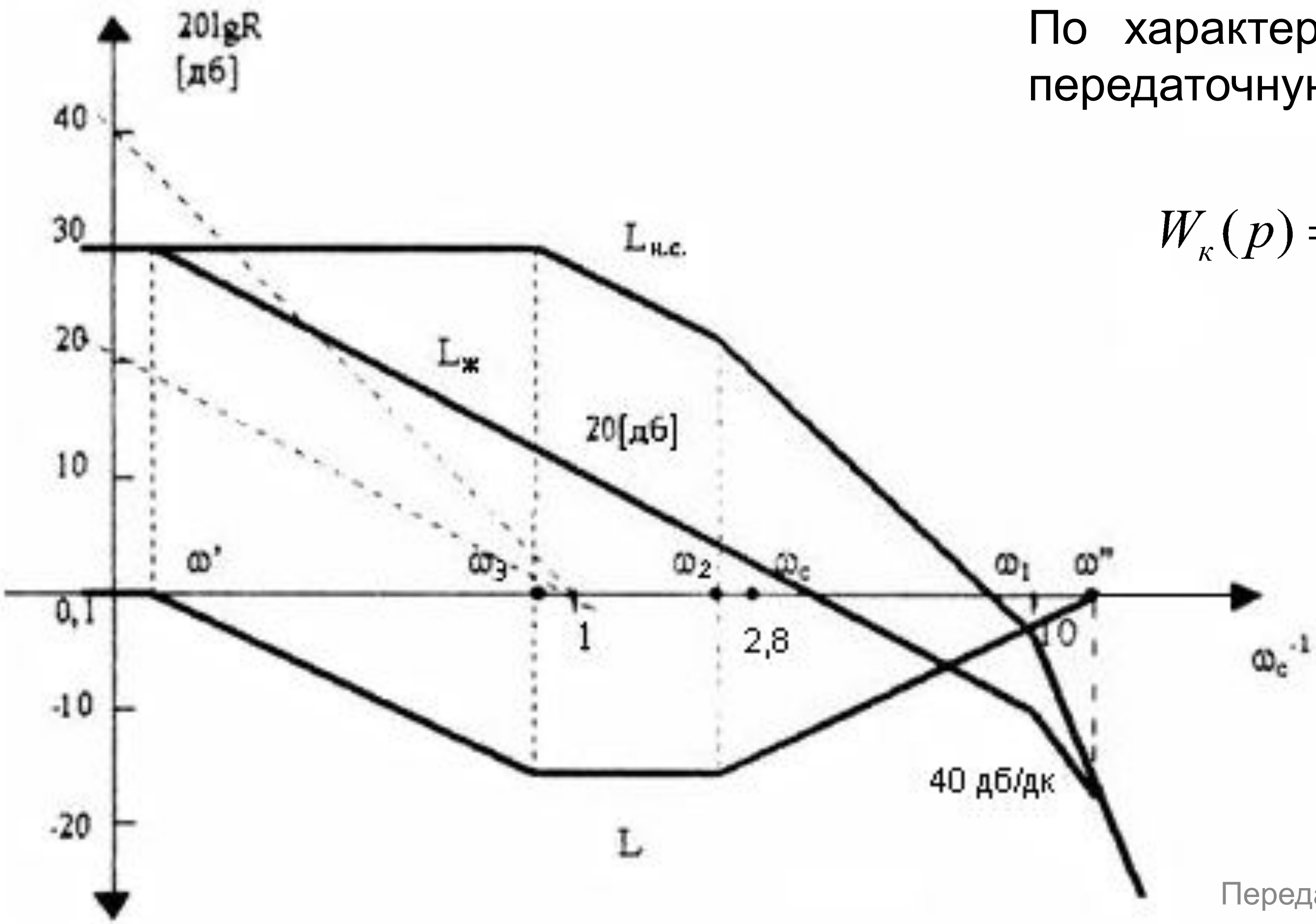
Запишем передаточную функцию исходной системы в разомкнутом состоянии:

$$W_{н.с.}(p) = \frac{30}{(0,1p+1)(0,5p+1)(1,2p+1)}$$

На основе этой передаточной функции строится ЛАЧХ нескорректированной системы $L_{н.с.}$. Для этого вычисляются амплитуда низкочастотного участка 20lg30 = 29,5 *дб* и сопрягающие частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10\,c^{-1};\ \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,5} = 2\,c^{-1};\ \omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{1,2} = 0,83\,c^{-1}.$$

При построении $L_{ж}$ учтём все необходимые условия. Частота среза $\omega_c \geq \frac{3{,}5 \cdot \pi}{4} = 2{,}8$ с$^{-1}$. Достаточные запасы устойчивости учитываются длиной участка $L_{ж}$ с наклоном 20 дб/дек не менее ± 10 дб. Низкочастотный участок $L_{ж}$ совместим с $L_{н.с.}$, высокочастотный – также. Вычитая $L_{н.с.}$ из $L_{ж}$ геометрически, получим $L_{к}$ – характеристику последовательного корректирующего звена.



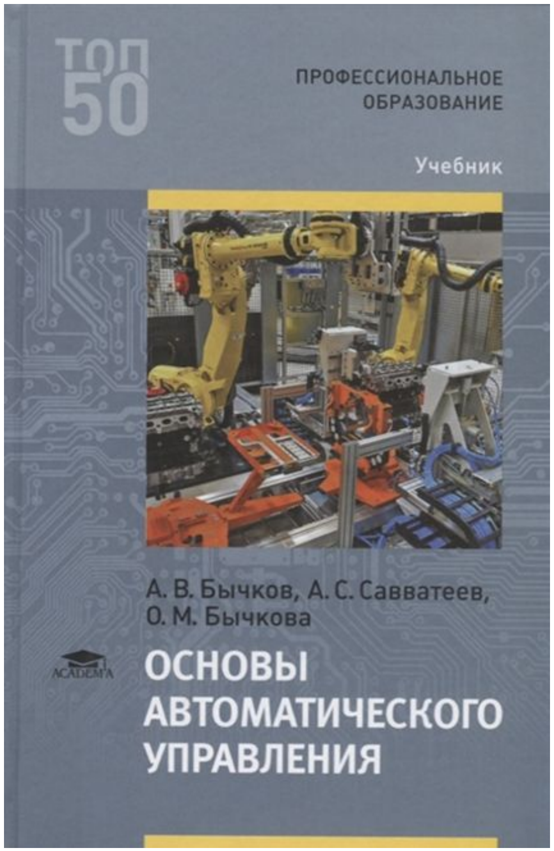
По характеристике $L_к$ запишем передаточную функцию

$$W_к(p) = \frac{1 \cdot (T_3 p + 1)(T_2 p + 1)}{\left(\frac{1}{\omega'} p + 1\right)\left(\frac{1}{\omega''} p + 1\right)}$$

Самостоятельная работа

- Нарисовать график устойчивости Найквиста.
- Нарисовать график перерегулирования.

Домашнее задание



ОИ1 стр.79-83