ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА
«ПЕРВЫЕ ШАГИ В НАУКУ»

«РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Выполнили:

Введение

«Уравнения – это золотой ключ, открывающий все математические сезамы»
(С. Коваль)

Проблема

заключается в том, что на протяжении всех лет обучения мы решаем уравнения, но школьный курс алгебры предусматривает ограниченный набор решений по данной теме.

Введение

Цель работы

выявление способов решения уравнений, отличных от изучаемых в
школьной программе
и их применение.

Введение

Задачи

- создать банк заданий по теме исследования;

Введение

Объект исследования

Рациональные уравнения

Предмет исследования

Нестандартные методы рациональных уравнений

Введение

Методы исследования

- поисковый метод с использованием научной и учебной литература, а также поиск необходимой информации в сети Интернет;
- практический «Методы решения рациональных уравнений;
- сравнение, анализ, полученный в ходе исследования.

Введение

Гипотеза:

если знать нестандартные методы решения рациональных уравнений, то это позволит повысить качество выполнения некоторых олимпиадных и тестовых заданий ОГЭ.

Введение

Практическая значимость исследования

Материал данного исследования имеет практическую значимость и будет полезен любознательным школьникам, а так же выпускникам школы.

Она позволит улучшить подготовку и расширить математический кругозор в решении уравнений.

Основные понятия

- Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.
- Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левые и правые части которого – целые выражения.

Основные понятия

- Дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, причем хотя бы одно из них – дробным выражением.

Из истории рациональных уравнений

- Необходимость решать уравнения в древности была вызвана потребностью в умении делить доходы и имущество, вычислять площади земельных участков и стоимость товара, определялась развитием астрономии и самой математики;

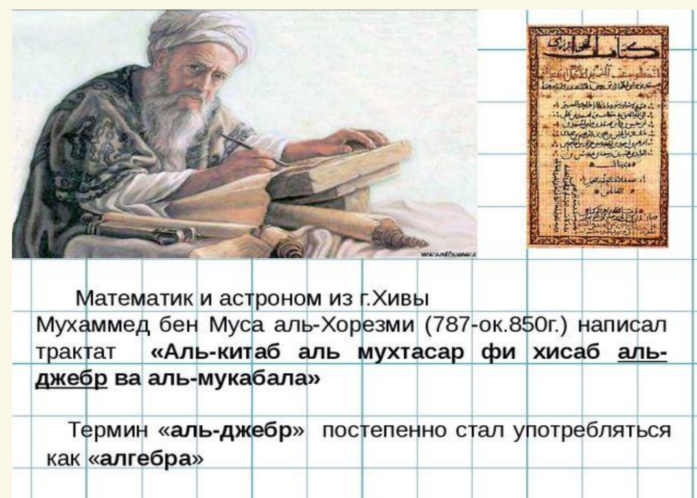
Из истории рациональных уравнений

еще 3-4 тыс. лет до нашей эры египтяне и вавилоняне умели решать простейшие уравнения.

Наибольший успех в развитии учения достиг греческий ученый Диофант (III в);

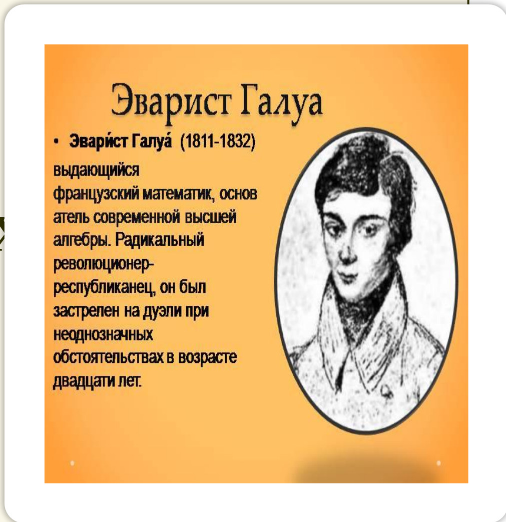
Из истории рациональных уравнений

- однако первым руководством по решению задач, получившим широкую известность, стал труд багдадского ученого IX в. Мухаммеда бен Мусы аль-Хорезми. В своей книге «Ал-джабар» описал способы решения различных уравнений, в том числе и уравнений высших степеней;



Из истории рациональных уравнений

- итальянский математик *Джироламо Кардано* 16в. вывел формулу для решения любого кубического уравнения;
- Франсуа Виет 16 в. «отец алгебры» – открыл несколько способов решения уравнений 4-й и 5-й степени;
- труды французского математика Эвариста Галуа 19 в.– по теории алгебраических уравнений положили начало развитию современной алгебры



Методы решения рациональных уравнений

1.Простейшие

Решаются путем простейших упрощений –приведение к общему знаменателю, приведению подобных членов и т.д.

2.Группировка

Путем группировки слагаемых, применяя формулы сокращенного умножения привести уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких множителей, справа – ноль. Затем приравниваем к нулю каждый множитель и решаем.

3.Подстановка

Ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначаем новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения.

Методы решения рациональных уравнений

4.Подбор

При решении уравнений высших степеней рациональные корни уравнения $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ищем в виде p / q, где p — делитель a_0, q — делитель a_n, p и q взаимно простые числа.

5. «Искусство»

Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи:

там, где нет трудности, нет и задачи.

(Д. Пойа)

Т.е. решать задачи нестандартно, придумать «свой метод», догадаться что-то прибавить и отнять, выделить полный квадрат, на что-то разделить и умножить и т.д.

Классификация рациональных уравнений

Биквадратное

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Замена: $x^2 = t,\ t > 0$

Возвратное

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$$

Замена: $x + \frac{k}{x} = t$

Симметрическое

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Замена: $x + \frac{1}{x} = t$

Однородное

$$aP^2(x) + bP(x)Q(x) + cQ^2(x) = 0$$

Замена: $\frac{P(x)}{Q(x)} = t$

Классификация рациональных уравнений

Уравнения вида

$$\boxed{(x-a)^4+(x-b)^4=A}$$

Замена: $t=x-\frac{a+b}{2}$

$$\boxed{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=l}$$

Замена: $t=x^2-(a+d)x$

«Искусство»

1.Приём выделения квадрата двучлена.

Пример. Решить уравнение.

$x^2 + 81x^2/(9 + x)^2 = 40$.

Решение: $x^2 + 81x^2/(9 + x)^2 = 40$, О.Д.З. $x \neq -9$.

Воспользуемся формулой $a^2+b^2= (a–b)^2 + 2ab$,

$(x – 9x/(9 +x))^2 + 2x\cdot 9x/(9 + x) = 40$,

пусть $x^2/(9 + x)= t$. Тогда $t^2 + 18t – 40 = 0$

$t_1 = -20$; $t_2 = 2$. Получаем:

$x^2/(9 + x)= 2$, или $x^2/(9 + x)= -20$

$x = 1 \pm\sqrt{19}$, корней нет.

Ответ: $1 \pm\sqrt{19}$.

«Искусство»

2. Приём почленного деления.

Пример . Решить уравнение.

$13x / (2x^2+x+3) + 2x / (2x^2-5x+3) = 6$.

Решение: $13x / (2x^2+x+3) + 2x / (2x^2-5x+3) = 6$.

(:на $x \neq 0$), обозначим: $2x + 3/x = t$. Получаем:

$13/(t+1) + 2/(t-5) = 6$;

$6t^2 - 39t + 33 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 5{,}5$.

$2x + 3/x = 1$; $2x^2 - x + 3 = 0$; $D = 1 - 24 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$.

$2x + 3/x = 5{,}5$; $4x^2 - 11x + 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 0{,}75$.

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = 0{,}75$.

«Искусство»

3.Прибавить и отнять в уравнении.

Пример. Решить уравнение.

$x^4–2x^3+x- 3/4 =0.$

Решение: $x^4 – 2x^3 + x - 3/4 = 0.$

Прибавим и вычтем в левой части x^2, выделим полный квадрат, получим:

$x^4 – 2x^3 + x^2 – x^2 + x – 3/4 = 0,$

$(x^2 – x)^2 – (x^2 – x) – 3/4 = 0.$ Пусть $x^2 – x = t,$

тогда $t^2 – t –3/4=0,$ $t_1 = -0,5;$ $t_2 = 3/2.$

$x^2 – x = -0,5,$ или $x^2 – x = 3/2$

$x \in \varnothing.$ $x_{1,2} = (1 \pm\sqrt{7}) / 2.$

Ответ: $(1 \pm\sqrt{7}) / 2.$

Результаты

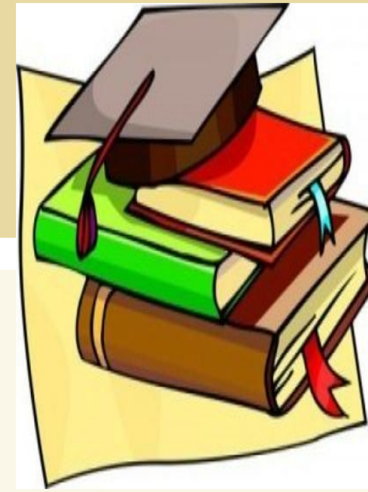
В процессе написания работы:

- изучены и обобщены научные сведения по теме «Рациональные уравнения»;
- рассмотрены основные способы решения рациональных уравнений;

Результаты

- выявлены приёмы, позволяющие понизить степень уравнения и тем самым упростить процесс решения;
- скомплектован банк задач на различные методы рациональных уравнений, представленных в приложении.

Заключение



- изучено большое количество математической литературы, освоение которой, позволило повысить уровень знаний по математике;
- рассмотрены различные способы решения рациональных уравнений;

Заключение

- приобретенные навыки будут использованы

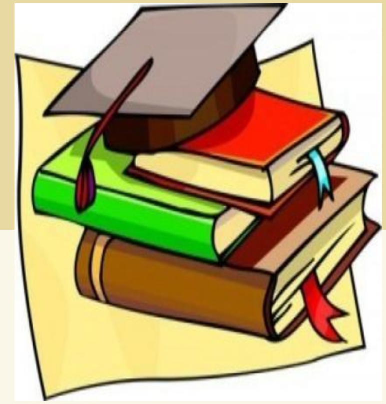
при решении неравенств, систем неравенств и уравнений, а так же

при изучении математики

в старших классах

и сдачи экзаменов.

Литература



- 1. Г. И. Глейзер. «История математики в школе»
- 2. Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1995. – 176 с.
- 3.Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра. 9 класс – 15-е изд., дороб. – М.: Просвещение, 2014г.
- 4. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 9-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2013. – 215 с. : ил.
- 5. Петрушина С.Н., Жуковский Е.С. Математика для поступающих в вузы: Изд-во ТГУ им. Г.Р. Державина, 2004. 97с.
- 6. Письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике. – Москва, Издательство «Айрис», 2005. – 136 с. : ил.
- Интернет-ресурс:
- 7. http://900igr.net/up/datai/83838/0003-003-.jpg
- 8. https://ds03.infourok.ru/uploads/ex/0de4/0004401b-e1bcc051/640/img10.jpg
- 9. http://mmetodika.narod.ru/page/urav2.htm

«Однородное уравнение»

Уравнения вида, $ay^{2a} + by^a z^a + cz^{2a} = 0$, где a, b, c заданные числа $\neq 0$. Делим оби части уравнения на $y^{2a} \neq 0$. Обозначаем $(y/z)^a = t$, получаем квадратное.

Пример . $3(x^2 – x + 1)^2 – 5(x + 1)(x^2 – x + 1) - 2(x + 1)^2 = 0.$

Решение: $3(x^2 – x + 1)^2 – 5(x + 1)(x^2 – x + 1) - 2(x + 1)^2 = 0.$

Разделим обе части данного уравнения на $(x + 1)^2 \neq 0.$

$3((x^2 – x + 1)/ (x + 1))^2 - 5(x^2 – x + 1)/ (x + 1) – 2 = 0.$

Пусть $(x^2 – x + 1)/ (x + 1) = t$, тогда

$3t^2 – 5t – 2= 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -1/3$. Следовательно,

$(x^2 – x + 1)/ (x + 1) =2$ или $(x^2 – x + 1)/ (x + 1) = -1/3$

$x_{1,2}= 3\pm\sqrt{13}/2$, $x \in \varnothing$.

Ответ: $x_{1,2}= 3\pm\sqrt{13}/2$.

Уравнения вида $(x+a)^4+(x+в)^4=c$, сводится к квадратному, подстановка: $x= t - (a+b)/2$

Пример . $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$.

Решение: $(x + 3)^4 + (x + 5)^4=16$.

Сделаем подстановку: $x= t - (3+5)/2$, т.е. $x= t - 4$.

Тогда получаем $(t-1)^4 +(t+1)^4=16$.

Воспользуемся формулами

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2\ \ 4 \pm ab^3 + b^4$

Получим:

$t^4 -4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1=16.$

$2t^4 + 12t^2 - 14=0, \quad t^4 + 6t^2 - 7=0.$

Положим $t^2= z \geq 0$, где $z^2 +6z - 7=0$, $z1=-7$ пост.кор. , $z_2=1, t^2= 1, t_1= -1, t_2=1$. Следовательно,

$x_1 = -1 - 4=-5$, $x_2 =1 - 4=-3$.

Ответ: -5; -3.

Уравнение вида:

$(x + a)(x + в)(x + c)(x + d) = l$

сводится к квадратному, если $a + в = c + d$.

Пример 2. $(x – 4)(x – 5)(x – 6)(x – 7) = 1680.$

Решение: $(x – 4)(x – 5)(x – 6)(x – 7) = 1680$

Перепишем уравнение

$(x – 4)(x – 7) \cdot (x – 5)(x – 6) = 1680,$

$(x^2 – 11x + 28)(x^2 – 11x + 30) = 1680.$

Обозначим $x^2 – 11x + 28 = t$, тогда

$t(t + 2) = 1680$, $t^2 + 2t – 1680 = 0$, $t_1 = – 42$; $t_2 = 40$.

$x^2 – 11x + 28 = – 42$; $x^2 – 11x + 70 = 0$; $D = 121 – 280 < 0 \Rightarrow x_{1,2} \in \varnothing$.

$x^2 – 11x + 28 = 40$; $x^2 – 11x – 12 = 0$; $x_1 = 12$; $x_2 = – 1$.

Ответ: $x_1 = 12$; $x_2 = – 1$.

3.3.Симметрическое уравнение

Уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ называют симметрическим (коэффициенты членов, равностоящие от концов, равны) решаются подстановкой $x + 1/x = t$.

Пример . $2x^4 + 3x^3 – 16x^2 + 3x + 2 = 0$

Решение. $2x^4 + 3x^3 – 16x^2 + 3x + 2 = 0$

(:на $x^2 \neq 0$), т.е.$2(x^2 + 1 / x^2) + 3(x + 1 / x)–16= 0$,

обозначим $x + 1 / x = t$, получим:

$2t^2 + 3t – 20 = 0$, $t_1 = – 4$; $t_2 = 5 / 2$

$x + 1 / x = – 4$; $x^2 + 4x + 1 = 0$; $x_{1,2} = –2 \pm\sqrt{3}$,

$x + 1 / x = 5 / 2$; $2x^2 – 5x + 2 = 0$; $x_3 = 2$;

$x_4 = 1 / 2$. Ответ: $x_{1,2} = –2 \pm\sqrt{3}$; $x_3 = 2$; $x_4 = 1 / 2$.

Спасибо
за
внимание