Открытый банк заданий ЕГЭ по математике

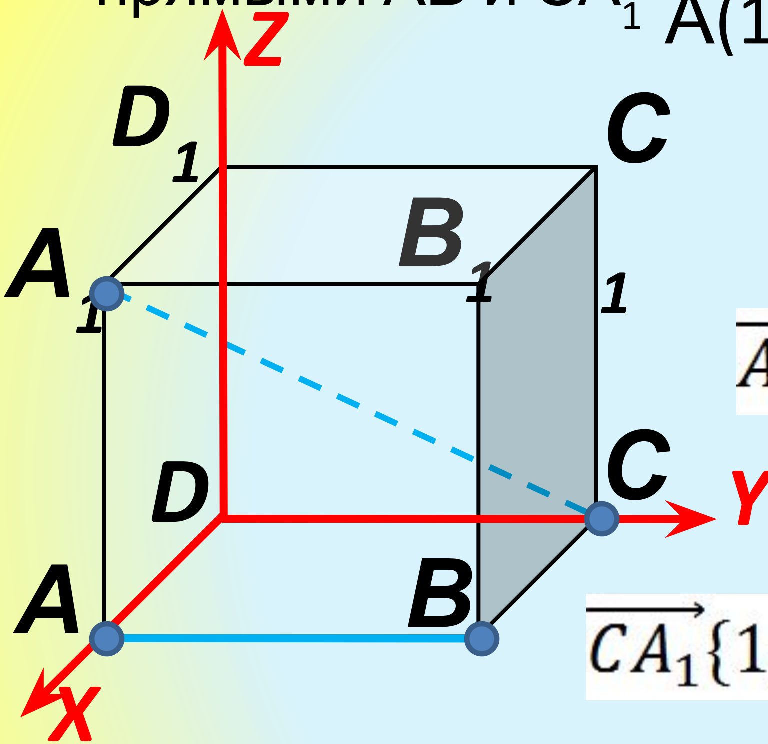
Задания С2

Тренировочная работа №1

Методическая разработка Какора М.Е.,
ГБОУ СОШ №1477 ,Г.Москва

1.В кубе А………D_1 найдите косинус угла между прямыми АВ и $СА_1$

A(1;0;0), B (1;1;0)



Координаты вектора

$\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$

$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$

$\overrightarrow{AB}\ \{0; 1; 0\}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

C(0;1;0), $A_1\,(1; 0; 1)$

$\overrightarrow{CA_1}\{1; -1; 1\}, |\overrightarrow{CA_1}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

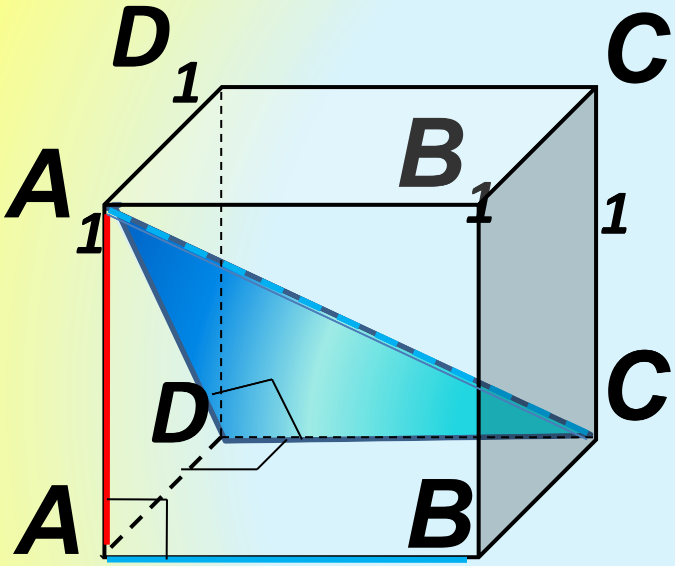
$$cos\varphi = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1|}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

1.В кубе А………D_1 найдите косинус угла между прямыми АВ и CA_1

Пусть все ребра равны 1.



$AB \parallel DC,\ A_1A \perp AB,$
$AD \perp DC$

По теореме о трех перпендикулярах

$A_1D \perp DC$

$\Rightarrow \Delta ADC$ – прямоугольный

$$\cos\angle A_1CD = \frac{DC}{A_1C}$$

$$A_1C = \sqrt{BC^2 + DC^2 + C_1C^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

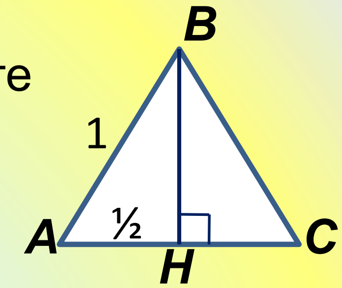
$DC = 1$

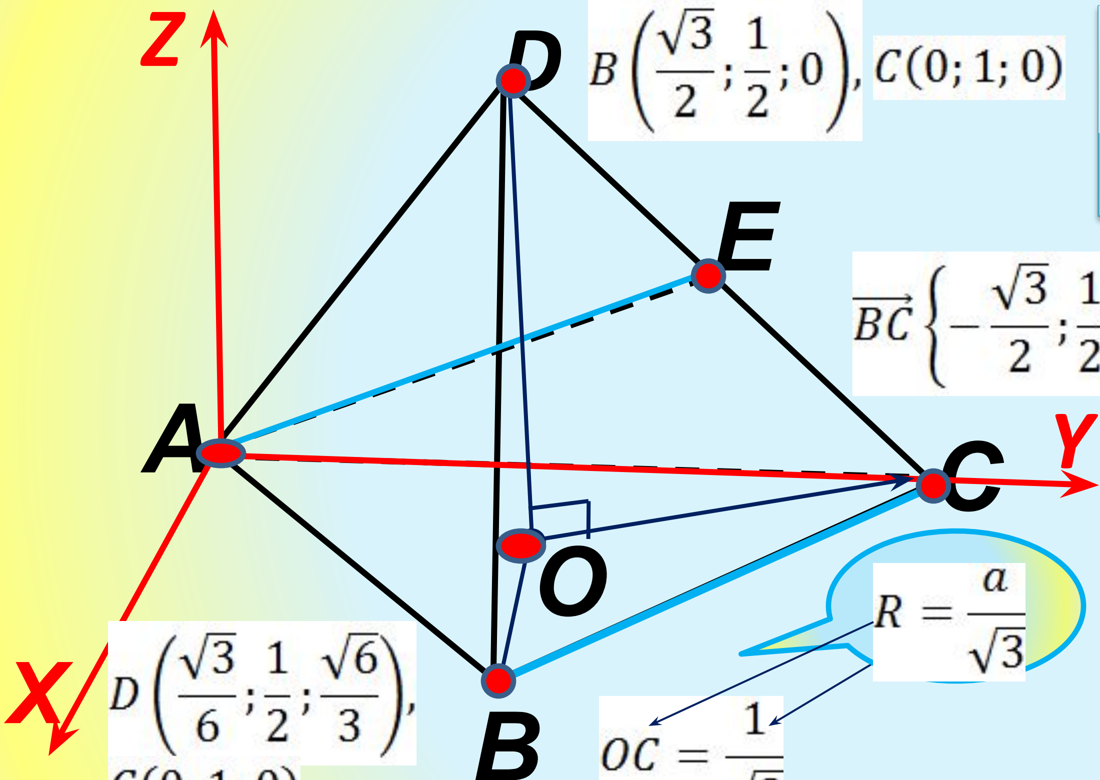
$$\cos\angle A_1CD = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

В правильном тетраэдре ABCD точка E-середина ребра CD.Найдите косинус угла м

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{1^2-(\tfrac{1}{2})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$





$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $C(0;1;0)$

Координаты вектора

$\overrightarrow{BC}\{(x_2-x_1);(y_2-y_1);(z_2-z_1)\}$

$B(x_1;y_1;z_1), C(x_2;y_2;z_2)$

$\overrightarrow{BC}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right\}$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0}=1$

DO-высота, O-центр правильного ∆ABC, OC-радиус описанной окруж

$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$

$OC=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$DO=\sqrt{1^2-(\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$D\left(\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $C(0;1;0)$

$E\left(\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\overrightarrow{AE}\left\{\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$

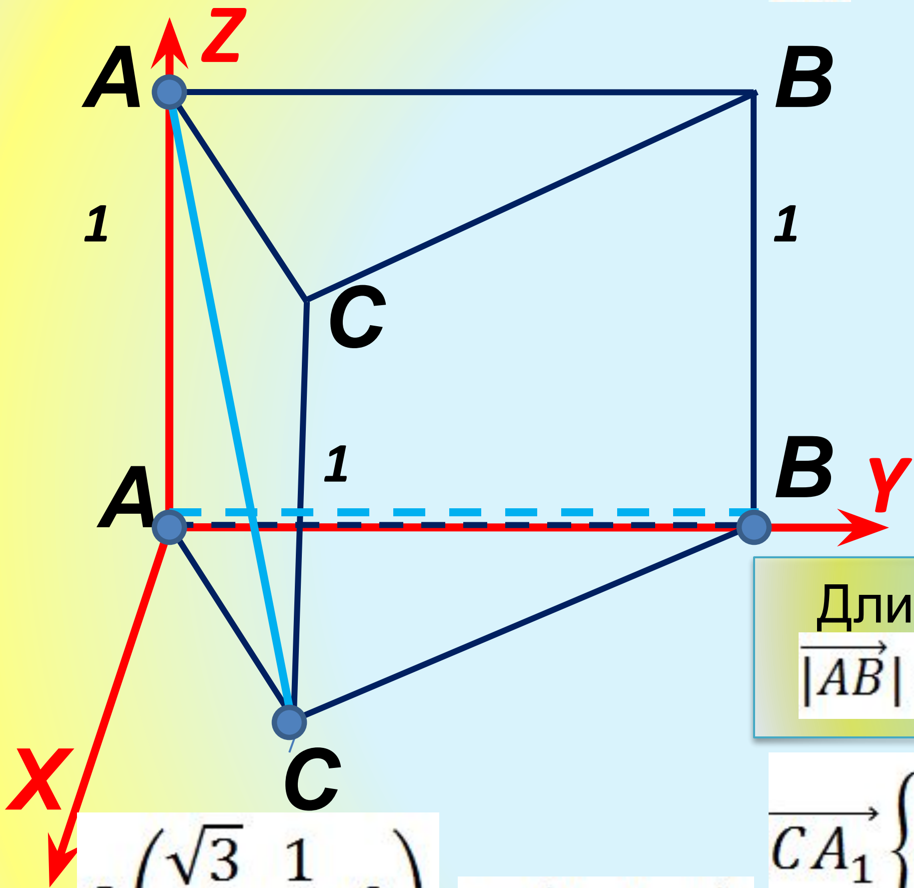
$$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{\frac{3}{144}+\frac{9}{16}+\frac{6}{36}}=\sqrt{\frac{108}{144}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\varphi=\frac{\left|-\frac{3}{24}+\frac{3}{8}\right|}{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

A(0;0;0)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1. Найдите косинус угла между прямыми АВ и CA_1



А(0;0;0), В(0;1;0) $\overrightarrow{AB}\{0;1;0\}$

Координаты вектора

$\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$

$A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2)$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0+1+0}=\sqrt{1}=1$$

Длина

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $A_1(0;0;1)$,

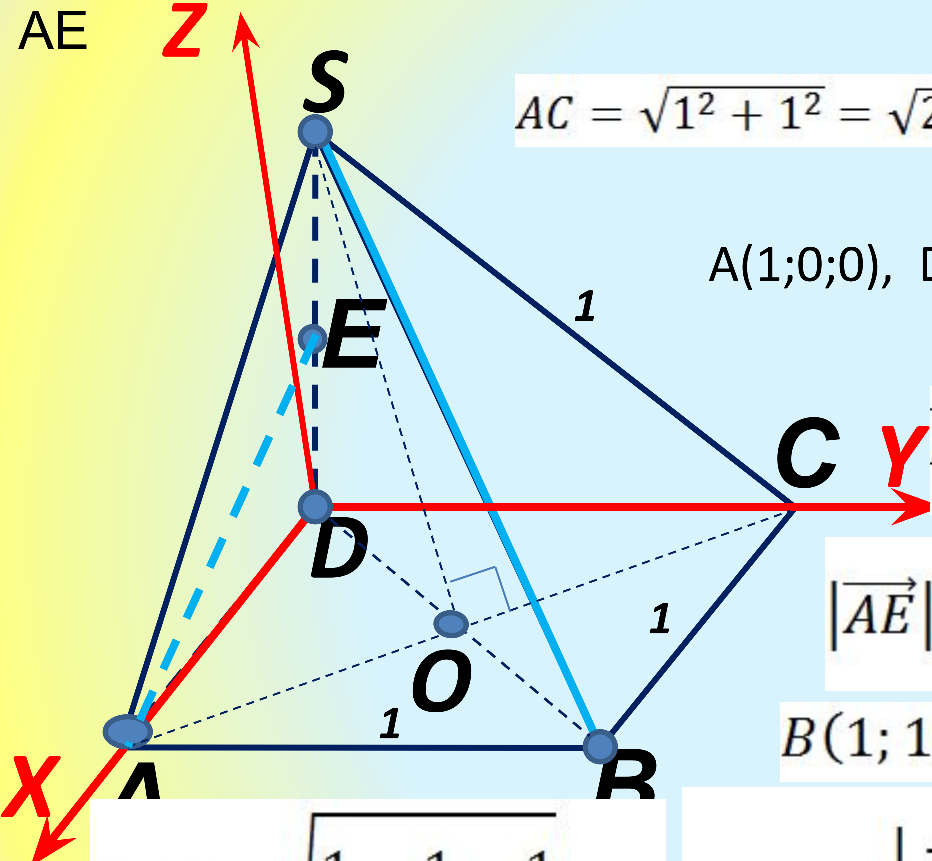
$$\overrightarrow{CA_1}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right\},$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$|\overrightarrow{CA_1}|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{2}$$

$$cos\varphi=\frac{|1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)|}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, точка E-середина SD.Найдите тангенс угла между прямыми SB и AE



$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad OC = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad SO = \sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A(1;0;0), D(0;0;0), $S(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}})$ $E(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2\sqrt{2}})$

…ктора середины

$$\overrightarrow{AE}\left\{-\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\} \qquad \ldots x_s \ldots;\frac{y_d + y_s}{2};\frac{z_d + z_s}{2})$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$B(1;1;0)$, $S(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}})$ $\overrightarrow{SB}\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$,

$$|\overrightarrow{SB}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 1 \qquad cos\varphi = \frac{|-\frac{3}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}|}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad tg\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{2}$$

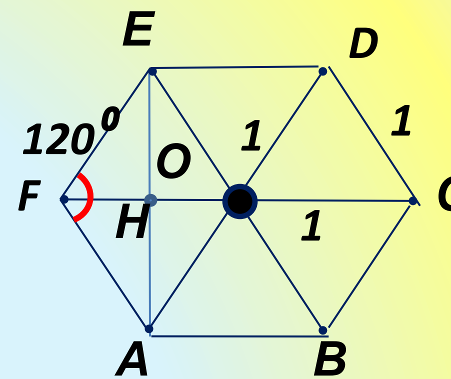
Ответ: $\sqrt{2}$

В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$,все ребра которой равны 1,

найдите угол между прямыми АВ и FE_1

$$AE = \sqrt{AF^2 + FE^2 - 2 \cdot AF \cdot FE \cdot \cos 120^0}$$

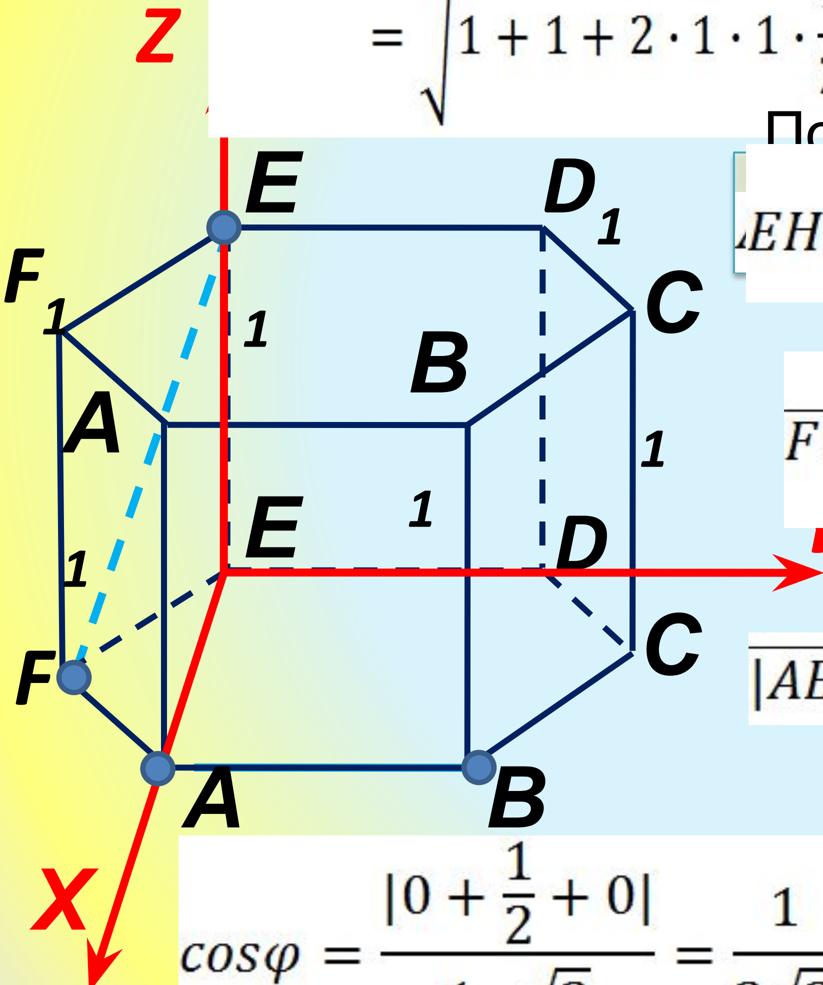
$$= \sqrt{1 + 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$



По теорем

$EH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $^2 + FE$

$E_1(0;0;1)$, $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$



$\overrightarrow{FE_1}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right\}$, $|\overrightarrow{FE_1}| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{2}$

$A(\sqrt{3}; 0; 0)$, $B(\sqrt{3}; 1; 0)$ $\overrightarrow{AB}\{0;1;0\}$,

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$cos\varphi = \frac{|0 + \frac{1}{2} + 0|}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

В правильной шестиугольной призме $A\dots.F_1$,все ребра которой равны

найдите косинус угла между прямыми AB и FE_1

2 способ

$AB \parallel E_1D_1$ $\Rightarrow \angle FE_1D_1$ – угол между прямыми AB и FE_1

ΔFEE_1 – прямоугольный по теореме Пифагора

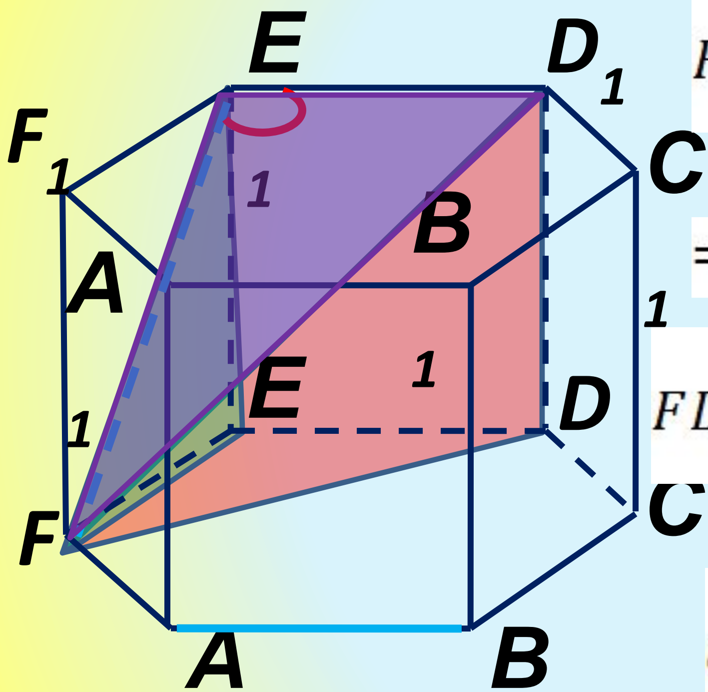
$$FE_1 = \sqrt{FE^2 + EE_1{}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$DD_1 \perp (ABC) \Rightarrow DD_1 \perp FD$

$\Rightarrow \Delta FDD_1$ – прямоугольный

по теореме Пифагора

$$FD_1 = \sqrt{FD^2 + DD_1{}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$



из ΔFE_1D_1 по теореме косинусов

$$cos\varphi = \frac{|FE_1{}^2 + E_1D_1{}^2 - FD_1{}^2|}{2 \cdot FE_1 \cdot E_1D_1}$$

$$cos\varphi = \frac{|1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2|}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1

$A(\sqrt{3};0;0), B_1(\sqrt{3};1;1)$, $\overrightarrow{AB_1}\{0;1;1\}$,

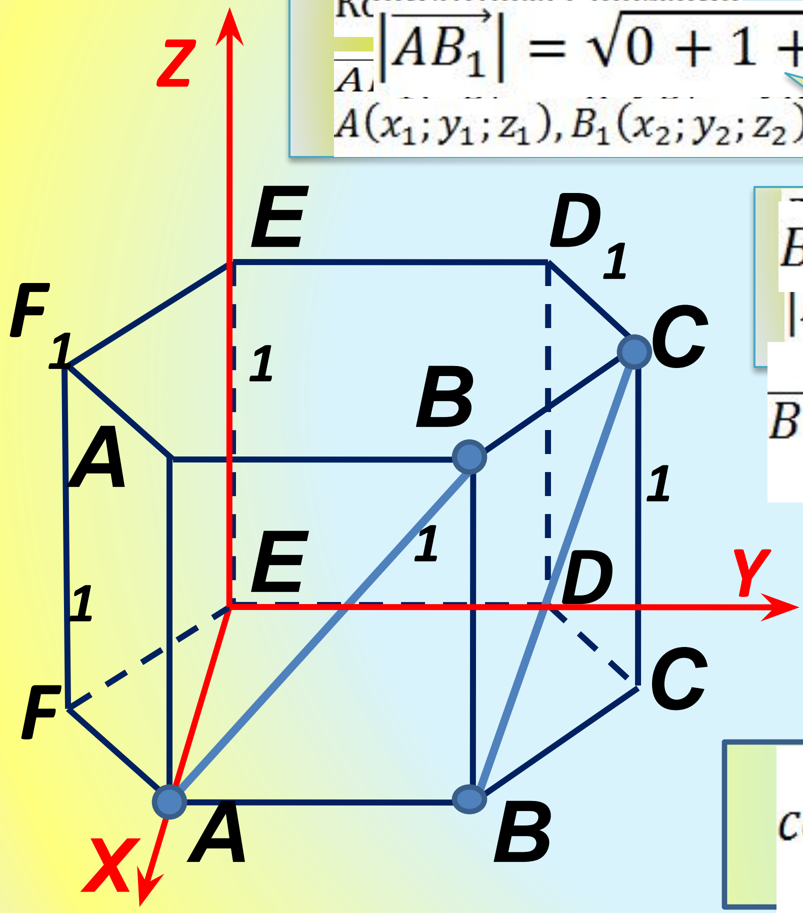
Координаты вектора

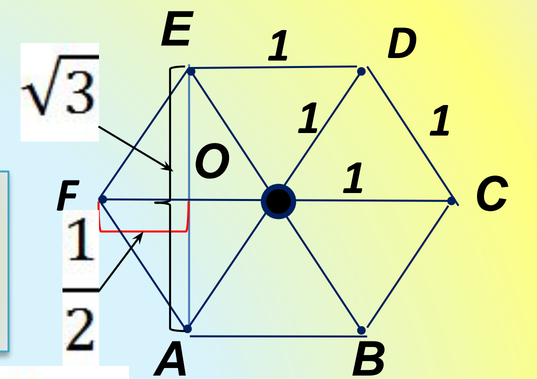
$|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

$A(x_1;y_1;z_1), B_1(x_2;y_2;z_2)$

$B(\sqrt{3};1;0)$ $C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1\right)$

$\overrightarrow{BC_1}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right\}$, $|\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{2}$





$$\cos\varphi = \frac{\left|0+\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{2}:2 = \frac{3}{4}$$

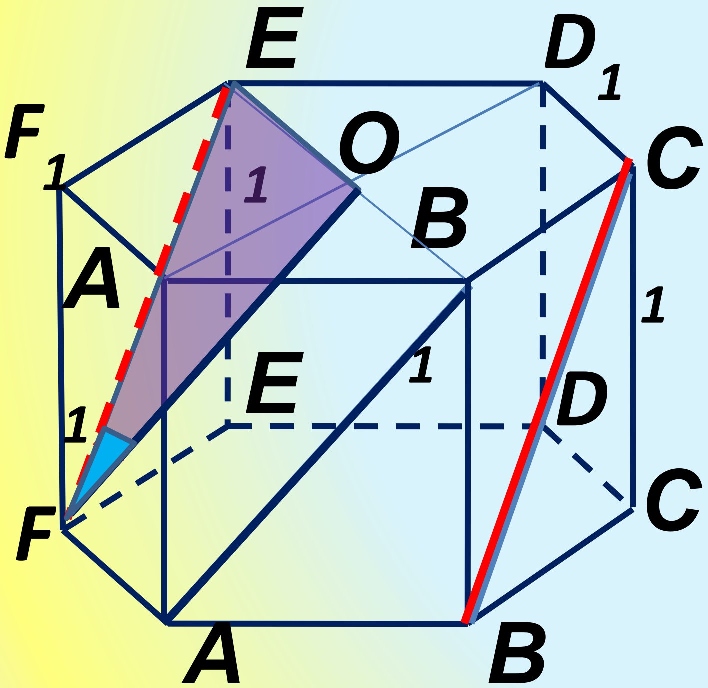
$$\cos\varphi = \frac{|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1

$BC_1 \parallel FE_1$, $AB_1 \parallel FO$

угол между прямыми AB_1 и BC_1 это угол между прямыми FO и FE_1, т.е. $\angle E_1FO$



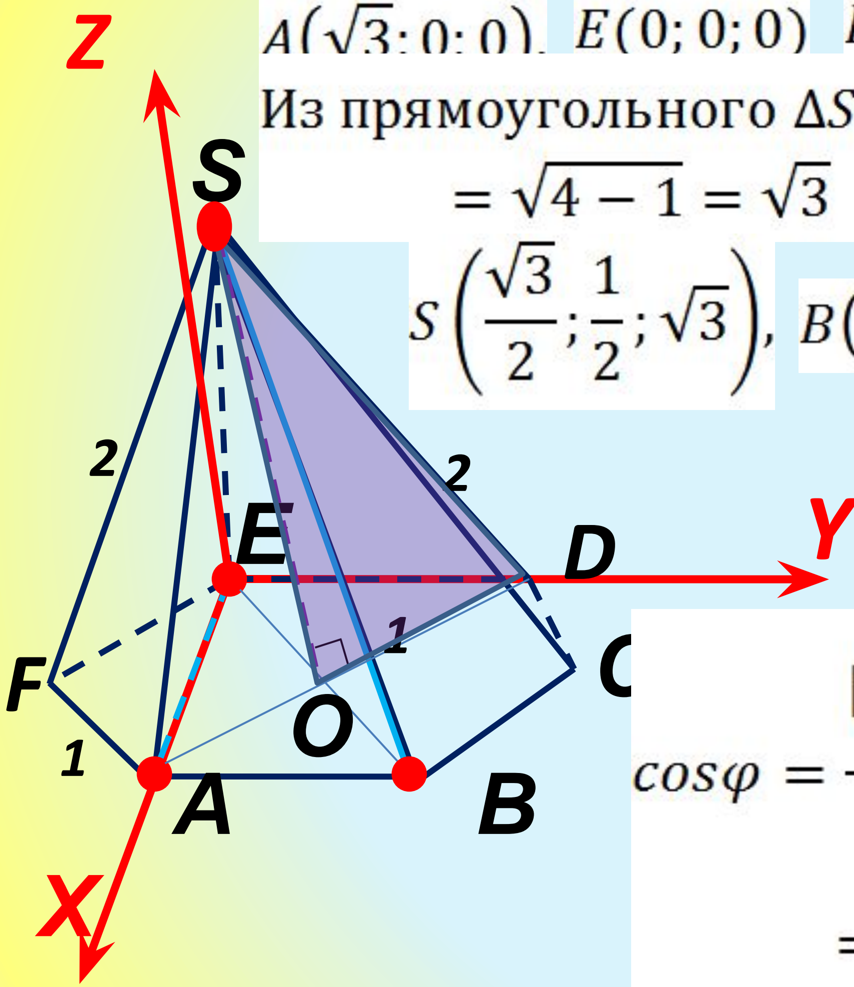
из ΔE_1FO по теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{FE_1{}^2 + FO^2 - E_1O^2}{2 \cdot FE_1 \cdot FO} = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

$$E_1O^2 = FE_1{}^2 + FO^2 - 2FE_1 \cdot FO \cdot \cos(\angle E_1FO)$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF , стороны оснований которой равны 1 , а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AE.



$A(\sqrt{3};0;0)$, $E(0;0;0)$ $\overrightarrow{EA}\{\sqrt{3};0;0\}$ $|\overrightarrow{EA}| = \sqrt{3+0+0} = \sqrt{3}$

Из прямоугольного $\Delta SOD, SO = \sqrt{SD^2 - OD^2}$

$$= \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$S\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};\sqrt{3}\right)$, $B(\sqrt{3};1;0)$ $\overrightarrow{SB}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\sqrt{3}\right\}$,

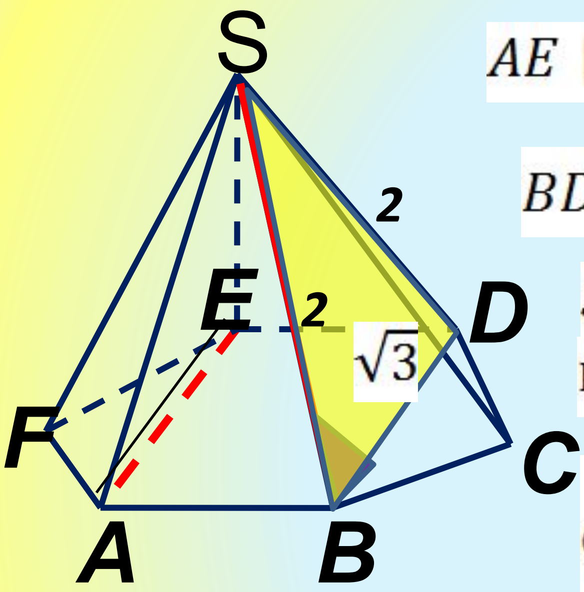
$$|\overrightarrow{SB}| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+3} = \sqrt{4} = 2$$

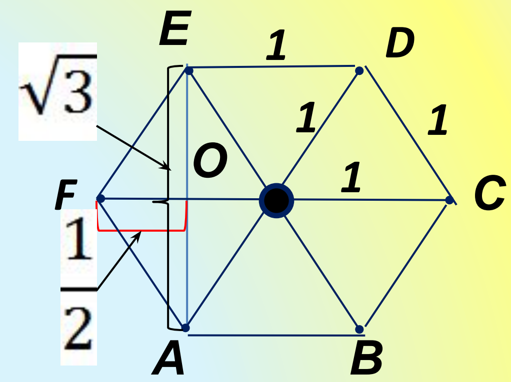
$$cos\varphi = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3}\cdot 2}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF , стороны оснований которой равны 1 , а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AE.





$AE \parallel BD$ $\angle SBD$ – искомый

$BD = AE = \sqrt{3},$ $SB = 2,$

$SD = 2$

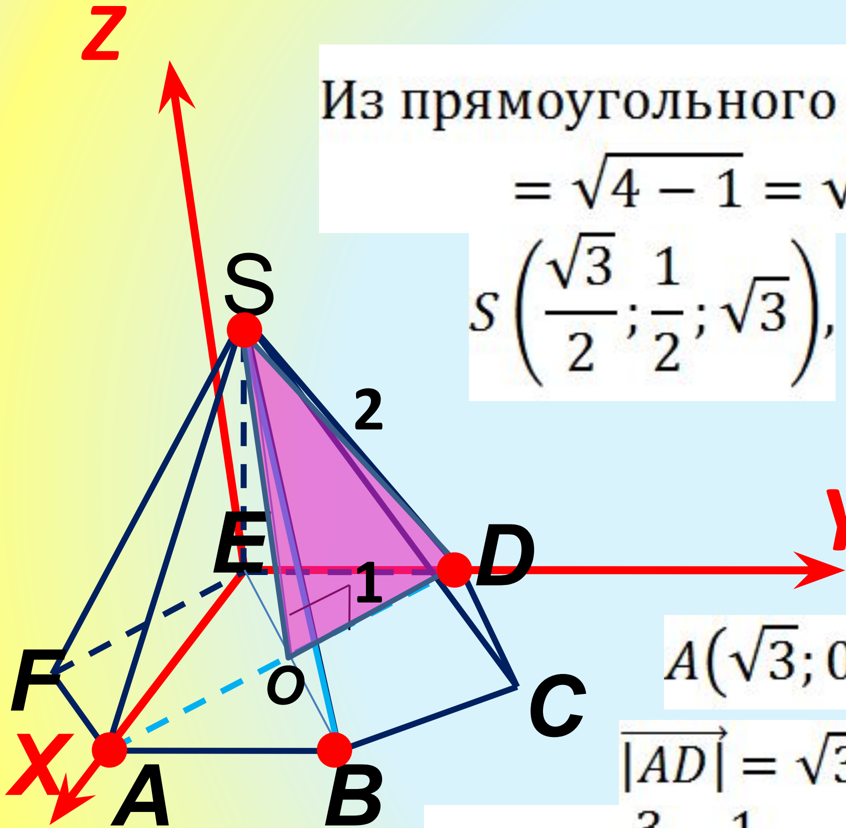
из ΔSBD по теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{SB^2 + BD^2 - SD^2}{2 \cdot SB \cdot BD} = \frac{4 + 3 - 4}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\ \varphi$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF , стороны оснований которой равны 1 , а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.



Из прямоугольного $\Delta SOD, SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$, $B(\sqrt{3}; 1; 0)$ $\overrightarrow{SB}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right\}$,

$$|\overrightarrow{SB}| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$A(\sqrt{3}; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$ $\overrightarrow{AD}\{-\sqrt{3}; 1; 0\}$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3+1+0} = \sqrt{4} = 2$$

$$cos\varphi = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right|}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

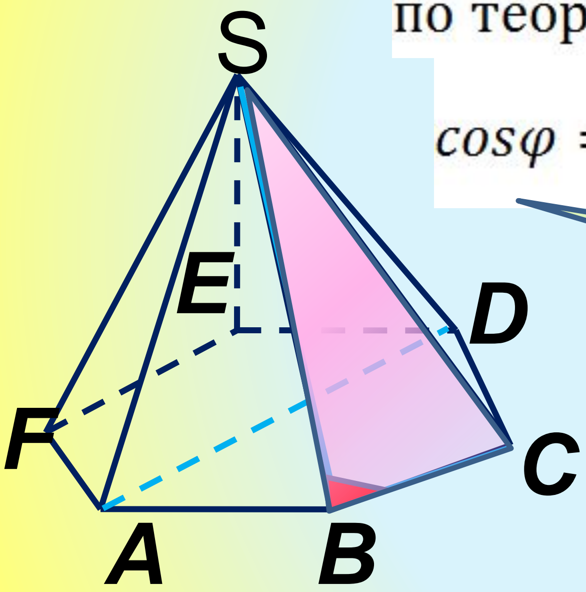
В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF , стороны оснований которой равны 1 , а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.

$AD \parallel BC$ $\quad \angle SBC$ – искомый

из ΔSBC, $BC = 1$, $SB = 2$, $SC = 2$

по теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{SB^2 + BC^2 - SC^2}{2 \cdot SB \cdot BC} = \frac{4+1-4}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{4}$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\varphi$$

Ответ: $\frac{1}{4}$