

Справочник по алгебре (7-9кл)

Математика — довольно интересная наука. Она дает нам средство для решения, казалось бы, настолько абстрактных задач, что представить их физическое решение затруднительно. Чего стоит кубический корень из яблока или мнимая единица, которая похожа на суслика из анекдота! Однако если благодаря этим комплексным числам мы можем летать на самолетах, то они стоят того, чтобы ломать над ними голову



Цели и задачи создания справочника:

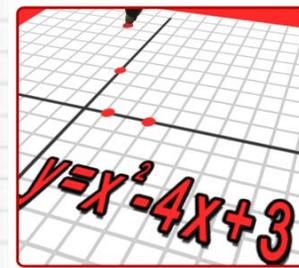
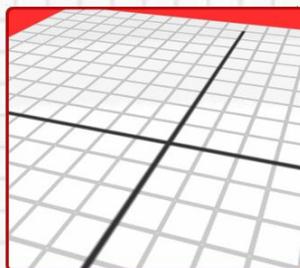
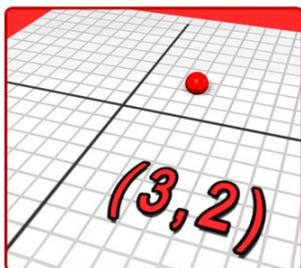
- систематизировать материал по основным математическим понятиям и формулам школьного курса алгебры;
- создать учащимся условия для беспроблемного решения многих математических задач при выполнении домашних заданий, при подготовке к контрольным и самостоятельным работам, к ЕГЭ и ГИА;
- способствовать развитию познавательной активности учащихся через знакомство с формулами, облегчающими процесс решения задачи;
- способствовать развитию математических способностей одарённых детей через знакомство с формулами, не входящими в школьную программу по математике.

"У математиков существует свой особый язык - это язык формул"

С. В. Ковалевская

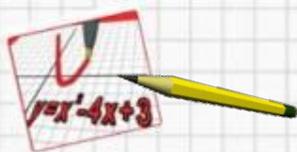
В какой-то момент перед детьми встает проблема огромного количества теорем и формул. Они представлены для каждого отдельного случая, позволяя считать быстрее и удобнее. Но их становится настолько много, что человеческий мозг просто не может удерживать внимание на них всех, и они забываются. Особенно сложно держать формулы в голове учащимся с гуманитарным складом ума

Поэтому было решено создать математические справочники, причем не только как подсказки в решении определённых задач, но и как средство для самоподготовки к ЕГЭ в 11 классе и ГИА в 9 классе. Предлагаем вам ознакомиться со следующими страницами этого справочника:



Справочник

Алгебра



Степень с натуральным показателем

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n$$

a^n - степень с натуральным показателем;

a – основание степени;

n – показатель степени.

$$a^1 = a$$



Таблица степеней

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

$$2^7 = 128$$

$$2^8 = 256$$

$$2^9 = 512$$

$$2^{10} = 1024$$

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 25$$

$$5^3 = 125$$

$$5^4 = 625$$

$$7^1 = 7$$

$$7^2 = 49$$

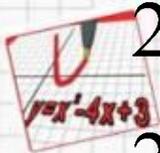
$$7^3 = 343$$

$$1^n = 1 \text{ для любого } n$$

$$0^n = 0 \text{ для любого } n$$

$$(-1)^n = 1 \text{ для четных } n$$

$$(-1)^n = -1 \text{ для нечетных } n$$



Свойства степеней

1. $a^1 = a;$

2.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}};$$

3. $a^0 = 1$, где $a \neq 0$;

4. $1^n = 1$;

5. $0^n = 0$;

6. $(-1)^{2n} = 1$;

7. $(-1)^{2n-1} = -1$;

8.  $10^n = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ раз}};$

9. $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$

10. $a^m : a^n = a^{m-n},$
где $m \geq n$;

11. $(a^n)^k = a^{nk};$

12. $a^n b^n = (ab)^n;$

13. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$
где $b \neq 0$.

Формулы сокращённого умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$



Свойства неравенств

$$1). a > b, a + c > b + c$$

$$2). a > b, c > 0, ac > bc$$

$$3). a > b, c < 0, ac < bc$$

$$4). a > b, c > d, a + c > b + d,$$


$$5). a > 0, b > 0, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Квадратные корни

$$a \geq 0, \text{ то } \sqrt{a} \geq 0;$$

$$(\sqrt{a})^2 = a; \sqrt{a^2} = |a|$$

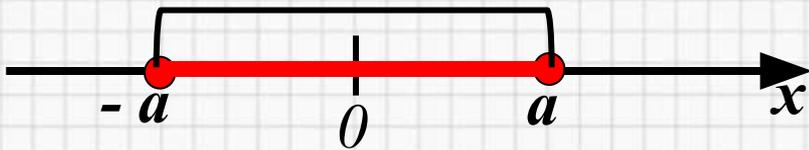
$$a \geq 0, b \geq 0, \text{ то } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

$$a \geq 0, b > 0, \text{ то } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$



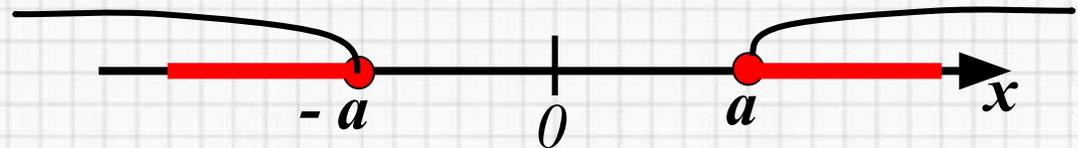
Модуль числа

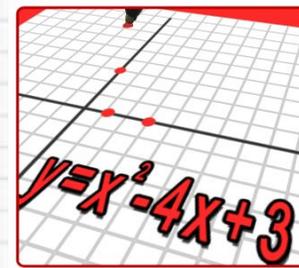
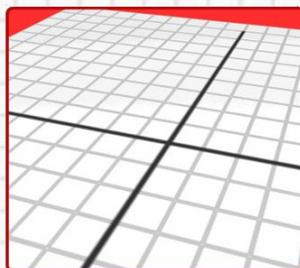
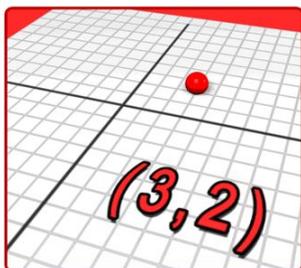
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$



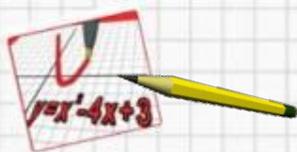
$$|x| \leq a$$

$$|x| \geq a$$





Квадратные уравнения



Классификация квадратных уравнений .

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$a \neq 0$, b, c -любые числа, x - переменная

неполное

$$b = 0;$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$c = 0;$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$b = 0; c = 0;$$

$$ax^2 = 0$$



Решение

неполных квадратных уравнений

$$1. ax^2 = 0;$$

$$x = 0$$

$$2. ax^2 = c = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Если числа a и c одного знака, то уравнение имеет корни, если разных знаков, то уравнение не имеет корней

$$3. ax^2 + vx = 0$$

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = -\frac{v}{a};$$



$$ax^2 + bx + c = 0$$

полное квадратное уравнение

$$D = b^2 - 4ac$$

дискриминант – «различитель»

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



**Количество корней
квадратного
уравнения**

$$D > 0$$

2 корня

$$D < 0$$

**корней
нет**

$$D = 0$$

**1
корень**



$$ax^2 + vx + c = 0$$

чётное квадратное уравнение, если

$$v - \text{чётное} \Rightarrow k = \frac{v}{2}$$

$$D = k^2 - ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a}$$



$$x^2 + px + q = 0 -$$

- приведённое квадратное уравнение

$$a = 1,$$

p – второй коэффициент,

q – свободный член.

$$D = p^2 - 4q$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$$



Теорема Виета:

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену

Теорема обратная теореме Виета:

Если $x_1 + x_2 = -p$, и $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 - корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$, то

x_1, x_2 - корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если x_1, x_2 -корни уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1) \cdot (x-x_2)$$

Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$, то при всех x справедливо равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1) \cdot (x-x_2)$$



Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; y = ax_0^2 + bx_0 + c$$

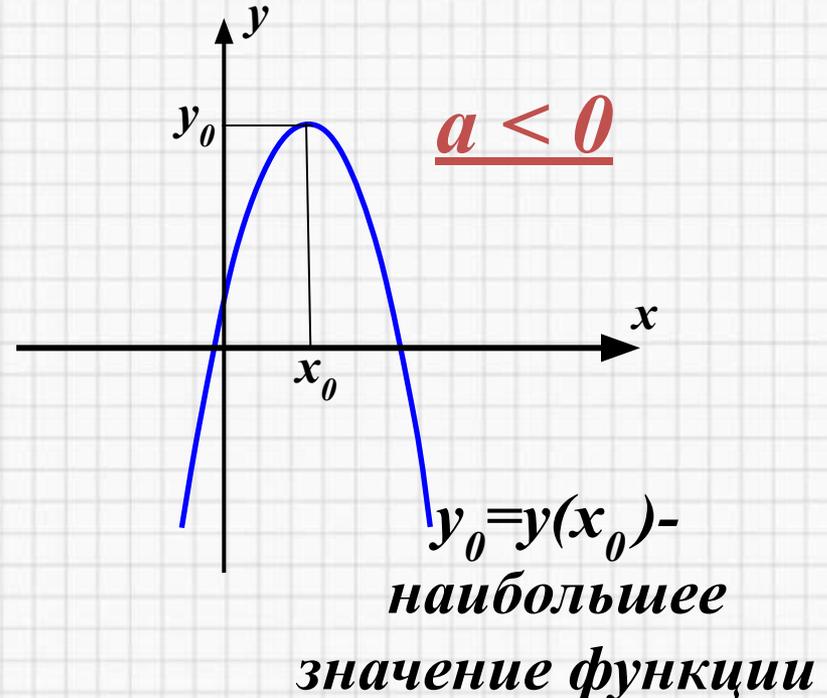
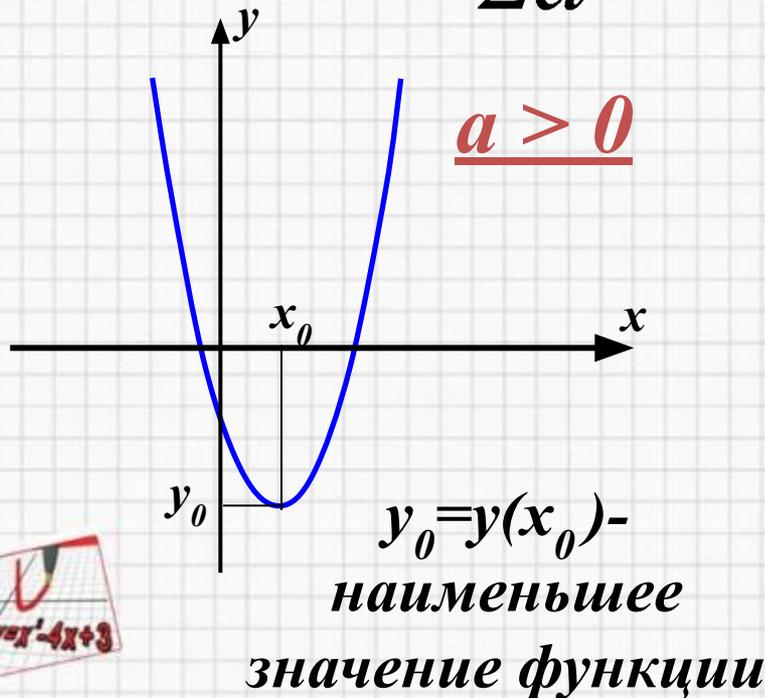


Схема построения графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Построить вершину параболы (x_0, y_0) :
 $[x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = (x_0)]$
2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, - ось симметрии параболы.
3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.
4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные её оси.
5. Провести через построенные точки параболу

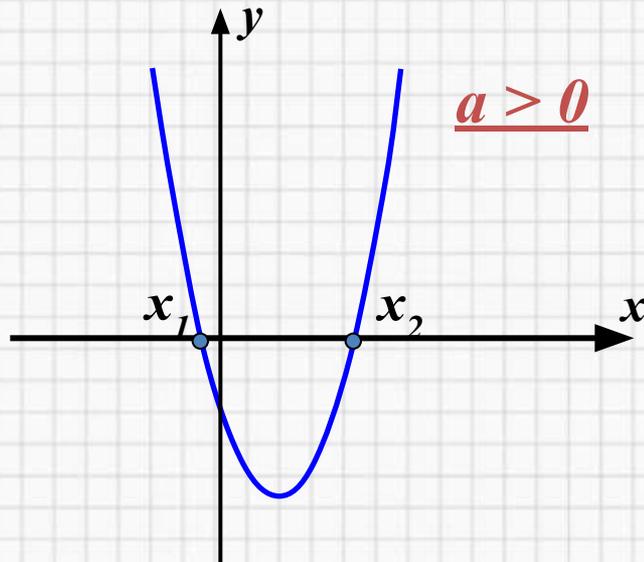


Квадратные неравенства

$a > 0$

1) $ax^2 + bx + c \leq 0,$

$x_1 \leq x \leq x_2$



2) $ax^2 + bx + c > 0,$

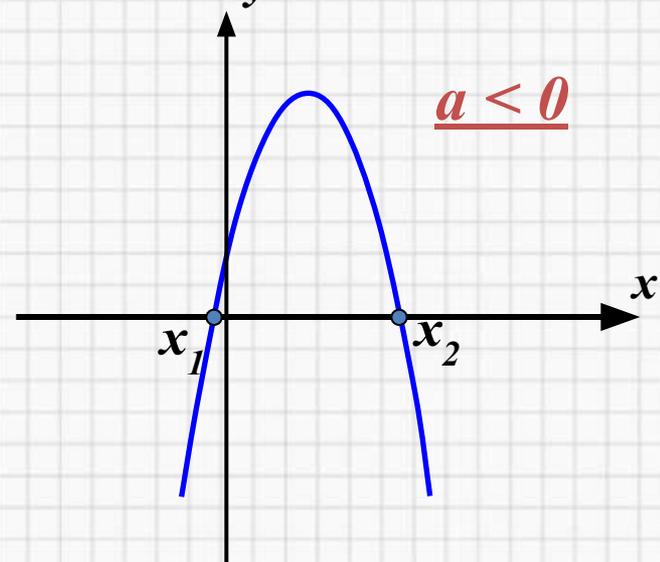
$x < x_1, x > x_2$



$a < 0$

1) $ax^2 + bx + c \leq 0,$

$x \leq x_1, x \geq x_2$



2) $ax^2 + bx + c > 0,$

$x_1 < x < x_2$

Решение квадратного неравенства с помощью графика

1. *Определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции;*
2. *Найти корни соответствующего квадратного уравнения или установить, что их нет;*
3. *Построить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (или касания) с осью Ox , если они есть;*
4. *По графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения*



(для решения квадратного неравенства)

$$ax^2+bx+c>0$$

$$[ax^2+bx+c\geq 0]$$

$$ax^2+bx+c<0$$

$$[ax^2+bx+c\leq 0]$$

1) Разложить данный многочлен на множители, т.е. представить его в виде

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0 \quad [a(x-x_1)(x-x_2)\geq 0]$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)<0 \quad [a(x-x_1)(x-x_2)\leq 0]$$

2) Корни многочлена нанести на числовую ось;

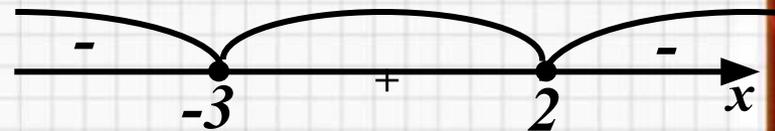
3) Определить знак функции в каждом из промежутков;

4) Выбрать подходящие промежутки и записать ответ

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0;$$

$$(x-2)(x+3) = 0;$$

$$x_1 = -3; x_2 = 2.$$



Ответ:

$$x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty).$$

Арифметическая прогрессия

Числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
-арифметическая прогрессия, если для всех
натуральных n выполняется равенство

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ где } d \text{ – некоторое число}$$

$$a_{n+1} = a_n + d \text{ – определение арифметической прогрессии}$$

$$d = a_{n+1} - a_n \text{ – разность арифметической прогрессии}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \text{ – формула } n\text{-го члена арифметической}$$

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, n > 1 \text{ – прогрессии}$$



$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ – сумма } n \text{ первых членов}$$

арифметической прогрессии

Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$

-геометрическая прогрессия, если для всех натуральных

n выполняется равенство $b_{n+1} = b_n \cdot q$,

где $b_n \neq 0$, q – число не равное 0

-определение геометрической прогрессии

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

-знаменатель геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

формула n -го члена
геометрической

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}; S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$$

сумма n первых
членов

где $q \neq 1$

где $q \neq 1$

геометрической
прогрессии



Литература:

- *Алимов Ш.А. Алгебра. Учебник для 7, 8, 9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2008.*
- *Бурмистрова Т.А. Алгебра 7 - 9 классы. Программы общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2009.*
- *Стандарт основного общего образования по математике//«Вестник образования» -2004 - № 12 - с.107-119.*
- *Электронные учебные пособия*
 - *Интерактивная математика. 5-9 класс. Электронное учебное пособие для основной школы. М., ООО «Дрофа», ООО «ДОС», 2002.*
 - *Математика. Практикум. 5-11 классы. Электронное учебное издание. М., ООО «Дрофа», ООО «ДОС», 2003.*

