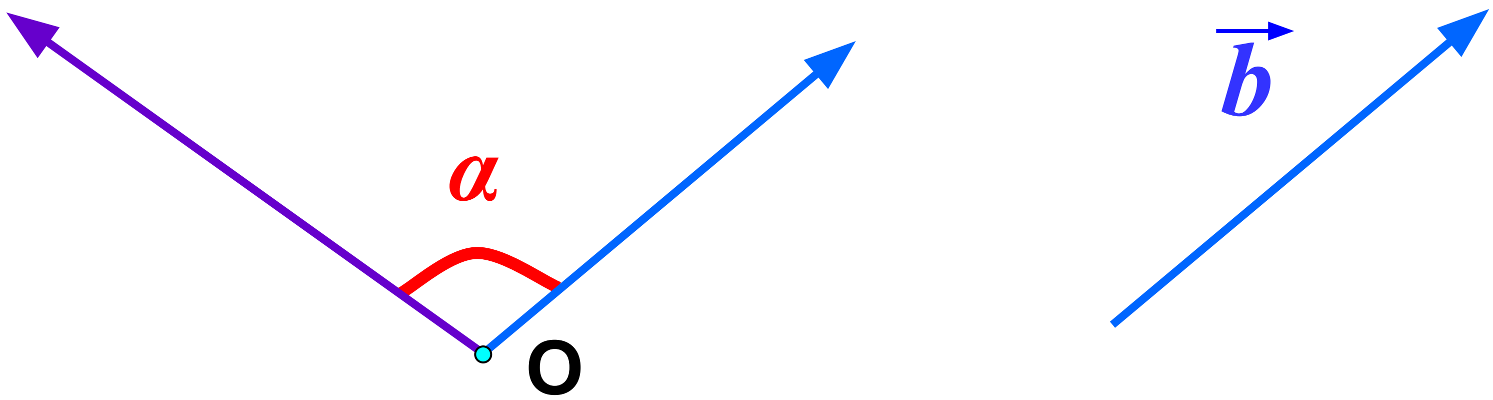
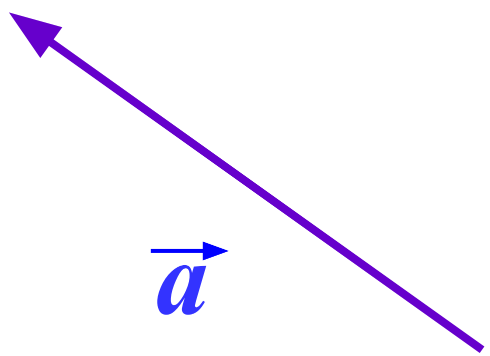
Скалярное произведение векторов

Угол между векторами

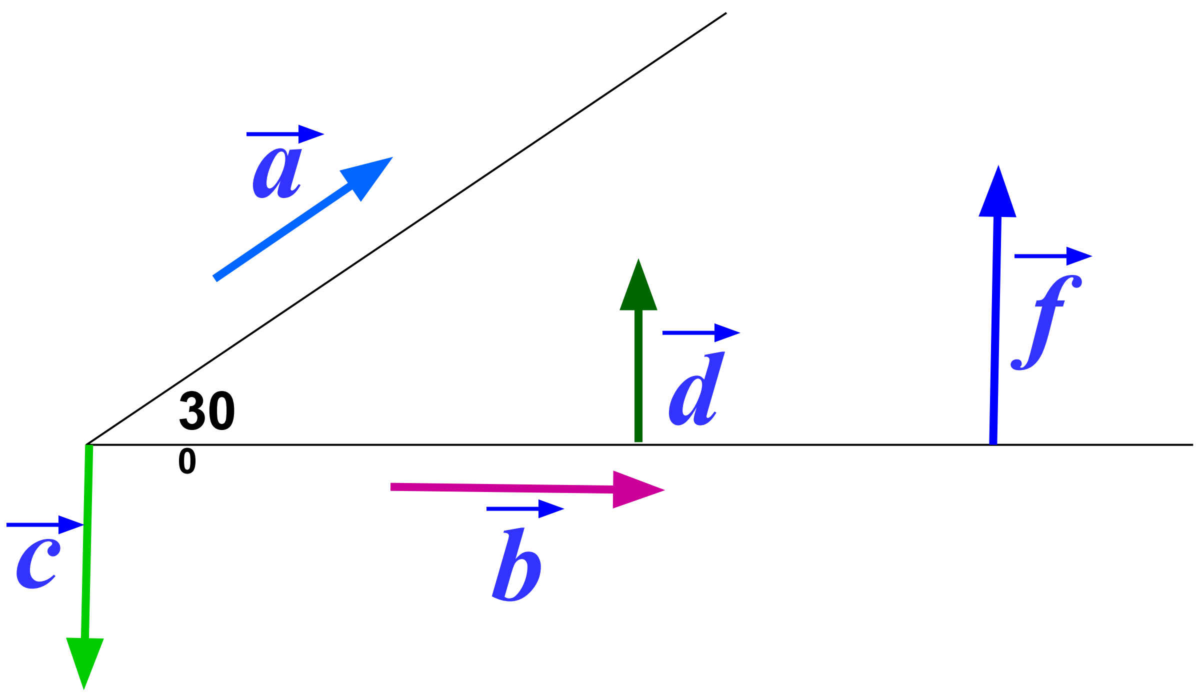




Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α .

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$$

Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 30^0$$

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{c}} = 120^0$$

$$\widehat{\vec{b}\ \vec{c}} = 90^0$$

$$\widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = 180^0$$

$$\widehat{\vec{d}\ \vec{f}} = 0^0$$

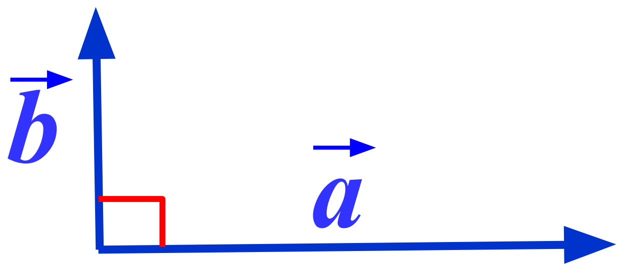
Определение

<u>Скалярным произведением</u> двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – **число!**

Частный случай №1

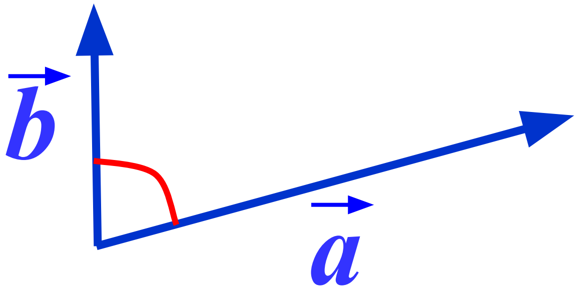


$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

Частный случай №2



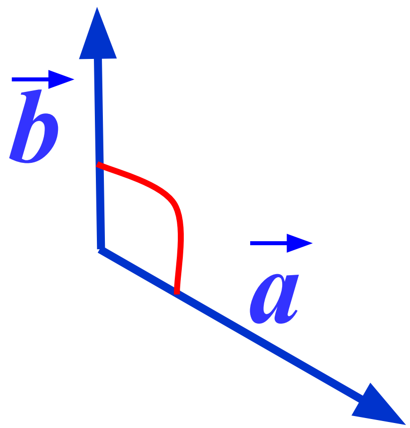
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

$$> 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

Частный случай №3



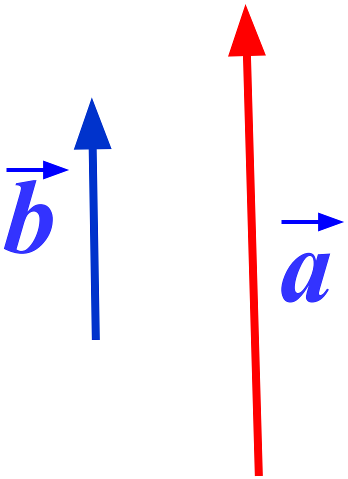
$\widehat{\vec a\,\vec b} > 90^0$

< 0

$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos\alpha$ < 0

$\vec a \cdot \vec b < 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec a\,\vec b} > 90^0$

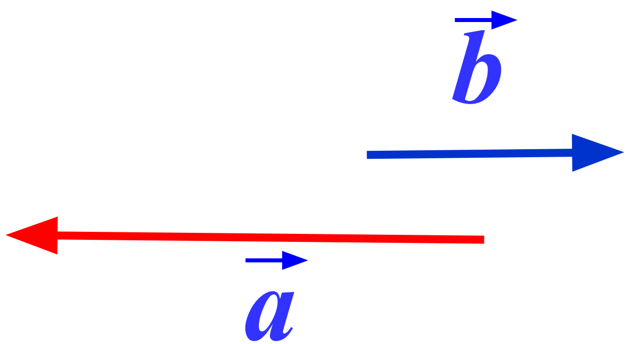
Частный случай №4



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

$$1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



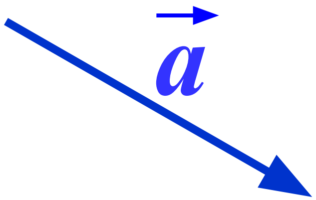
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

$$-1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Частный случай №5

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\overbrace{\cos 0^0}^{1} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Примеры:

1. $\left|\vec{a}\right| = 2$ $\left|\vec{b}\right| = 3$ $\alpha = 60^0$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3\cdot \cos\left(60^0\right) = 3$

2. $\left|\vec{a}\right| = 5$ $\left|\vec{b}\right| = 1$ $\alpha = 30^0$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot 1\cdot \cos\left(30^0\right) = \dfrac{5\cdot\sqrt{3}}{2}$

3. $\left|\vec{a}\right| = 7$ $\left|\vec{b}\right| = 4$ $\alpha = 45^0$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot 4\cdot \cos\left(45^0\right) = 14\cdot\sqrt{2}$

4. $\left|\vec{a}\right| = 1$ $\left|\vec{b}\right| = 1$ $\alpha = 120^0$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1\cdot \cos\left(120^0\right) = \dfrac{-1}{2}$

5. $\left|\vec{a}\right| = 7$ $\left|\vec{b}\right| = 5$ $\alpha = 90^0$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot 5\cdot \cos\left(90^0\right) = 0$

1

тест

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cos\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}} = 6\cdot 3\cos 60^0 = 18\cdot\frac{1}{2}$$

ПОДУМАЙ!

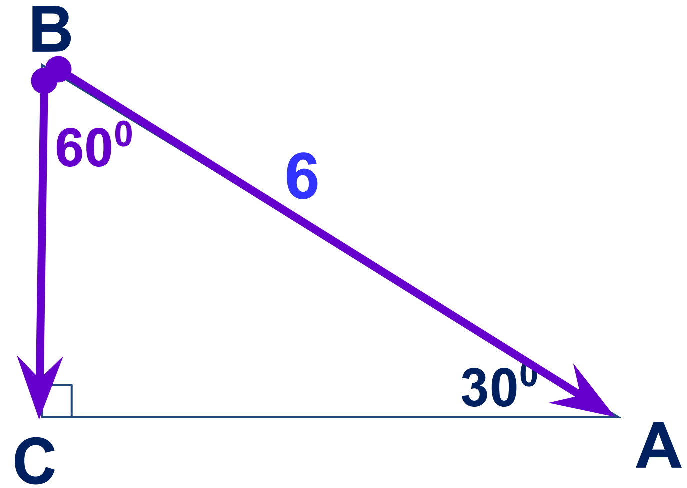
1 $9\sqrt{3}$

ВЕРНО!

2 9

3 18

ПОДУМАЙ!



Проверка

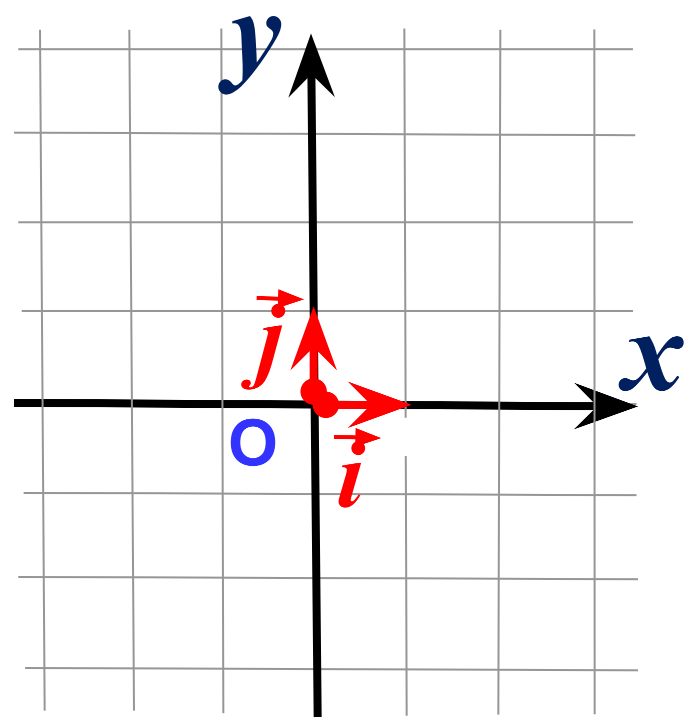
2 Скалярное произведение координатных векторов

$\vec{i}$ и $\vec{j}$ **равно нулю, т.к. угол между векторами прямой**

1 1 ПОДУМАЙ!

2 – 1 ПОДУМАЙ!

3 0 ВЕРНО!



Проверка

3

Скалярный квадрат вектора $\vec{i}$ равен:

ВЕРНО!

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1 1

$$\vec{i}^{\,2} = |\vec{i}\,|^2 = 1^2 = 1$$

2 – 1

ПОДУМАЙ!

3 0

ПОДУМАЙ!

Проверка

4 Если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12,\quad |\vec{a}| = 3,\quad |\vec{b}| = 4,$

то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$12 = 3\cdot 4\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 1$$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$

ВЕРНО!

1 сонаправлены;

2 перпендикулярны; ПОДУМАЙ!

3 противоположно направлены. ПОДУМАЙ!

Проверка

5 Если $\vec{x}\cdot\vec{y} = -20,\quad |\vec{x}| = 4,\quad |\vec{y}| = 5,$

то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\widehat{\vec{x}\,\vec{y}}$$

$$-20 = 4\cdot 5\cos\widehat{\vec{x}\,\vec{y}}$$

$$\cos\widehat{\vec{x}\,\vec{y}} = -1$$

$$\widehat{\vec{x}\,\vec{y}} = 180^0$$

$$\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$$

ПОДУМАЙ!

1 сонаправлены;

ПОДУМАЙ!

2 перпендикулярны;

ВЕРНО!

3 противоположно направлены.

Проверка

6 Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

ПОДУМАЙ!

1 50^0

ПОДУМАЙ!

2 60

ВЕРНО!

3 120^0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами тупой

Проверка

Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-6;\ 9\}$ $\vec{b}\ \{-1;\ 0\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6\cdot(-1) + 9\cdot 0 = 6$$

Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{0;\ 0\}$

$\vec{b}\ \{22;\ 1\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 1 = 0$$

Вычислите скалярное произведение векторов:

1. a(1,1); b(1,2) $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$
2. a(-2,5); b(-9,-2) $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot (-9) + 5 \cdot (-2) = 8$
3. a(-3,4); b(4,5) $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 8$
4. a(5,2); b(-9,4) $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-9) + 2 \cdot 4 = -37$
5. a(-1,1); b(1,1) $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Дано: $\vec{a}(1,3)$ $\vec{b}(5,2)$

1. Вычислите скалярное произведение векторов: $$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 5 + 3\cdot 2 = 11$$
2. Вычислите длину вектора *a:* $$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
3. Вычислите длину вектора *b:* $$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$
4. Вычислите косинус угла между векторами: $$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{11}{\left(\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}\right)} = \frac{11}{\sqrt{290}}$$
5. Сделайте вывод: тупой, прямой или острый угол мы получили $$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) > 0 \Rightarrow$$ угол острый