

Угол между векторами.

Скалярное произведение векторов.

Преподаватель математики
ОГАПОУ «Белгородский
техникум промышленности
и сферы услуг»
Веревкина А.А.

Цели урока:

- *Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.*
- *Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.*
- *Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.*

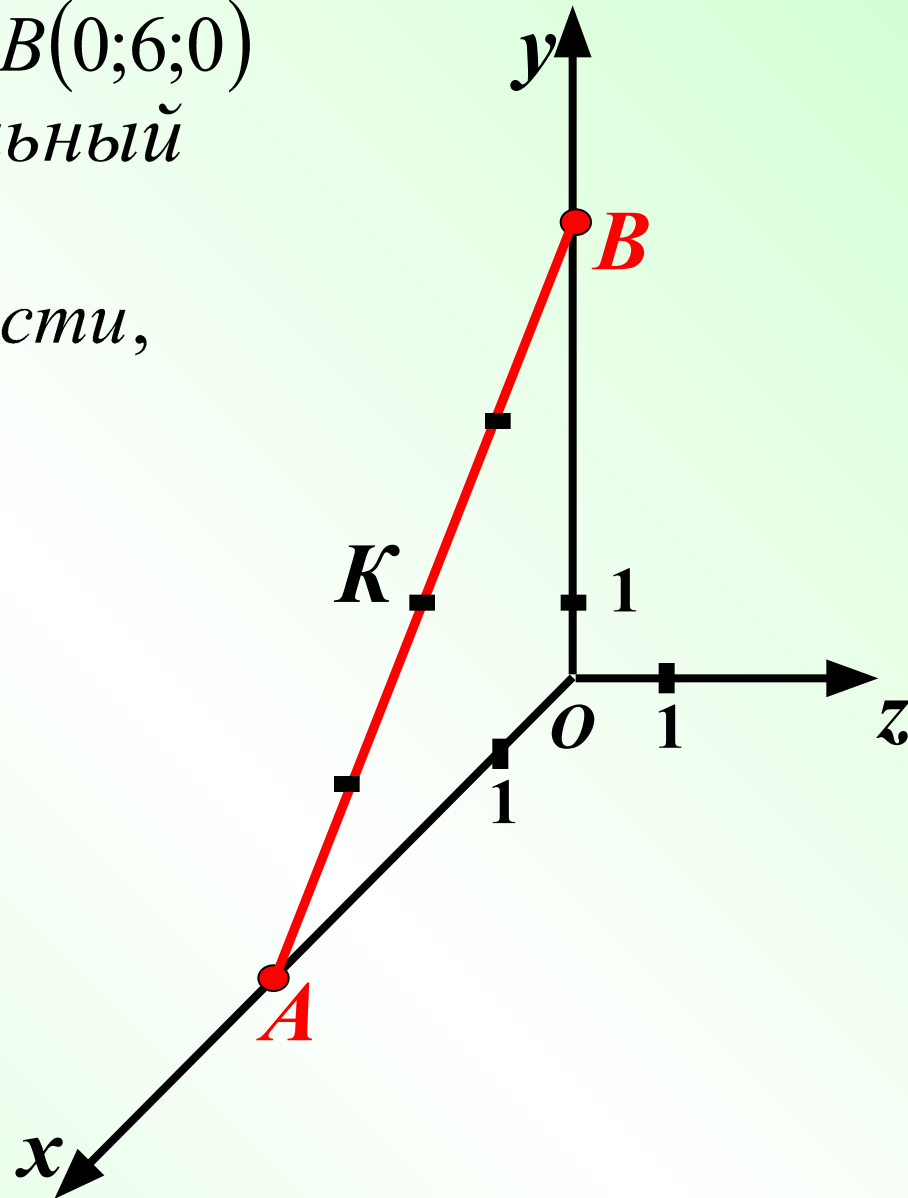
Решим задачу:

• *Дано:* $O(0;0;0)$ $A(4;0;0)$ $B(0;6;0)$
 $\triangle AOB$ - прямоугольный

• *Найти:*

1) $K(x; y; z)$ - центр окружности,
описанный около $\triangle AOB$.

2) $AK = R$



Решение:

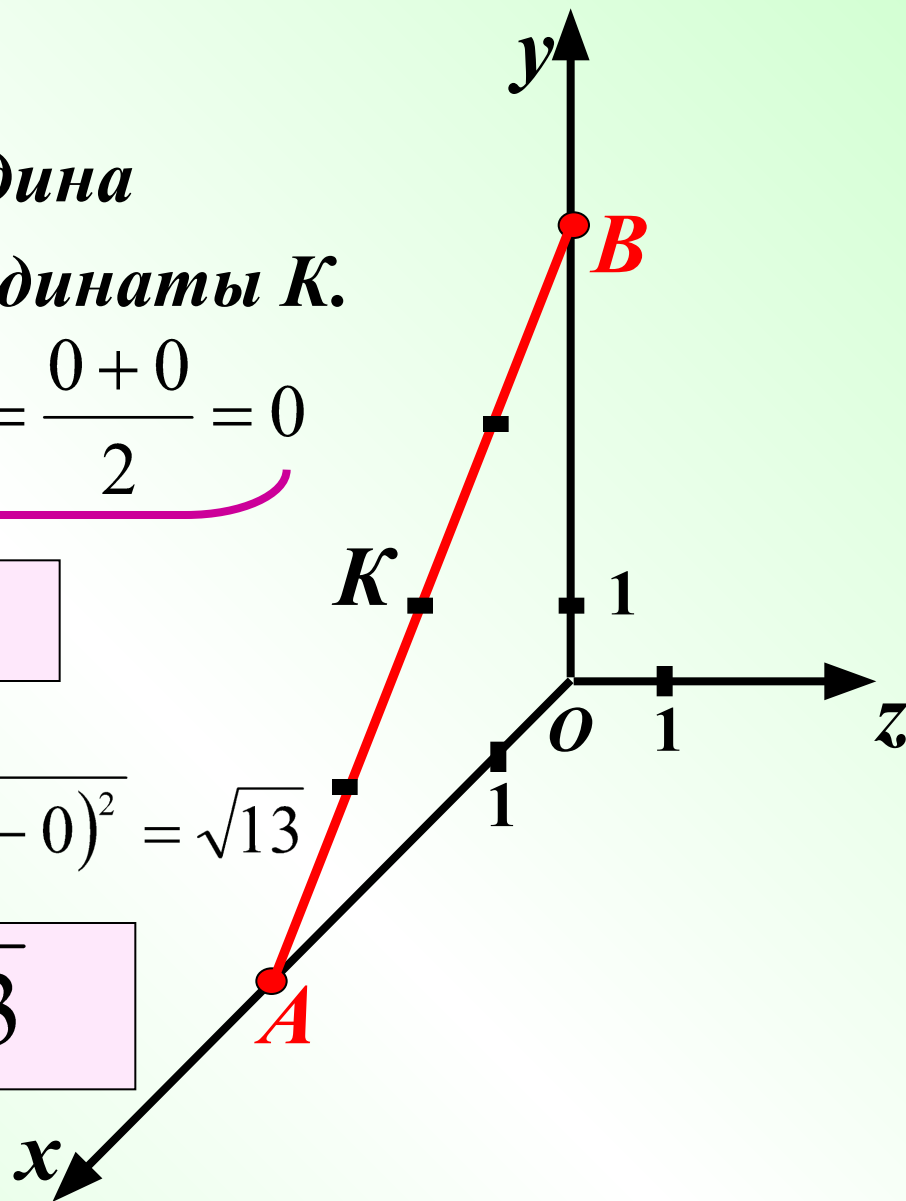
Центр окружности K – середина гипотенузы AB . Найдем координаты K .

$$x = \frac{4 + 0}{2} = 2 \quad y = \frac{0 + 6}{2} = 3 \quad z = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

$$K(2; 3; 0)$$

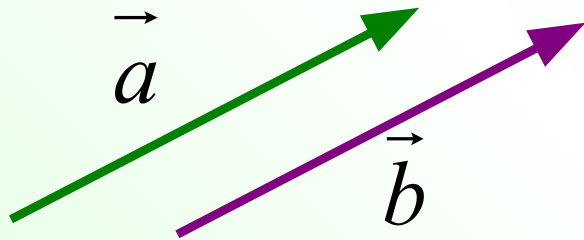
$$R = AK = \sqrt{(4 - 2)^2 + (0 - 3)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Ответ: } (2; 3; 0); \sqrt{13}$$



Вспомним:

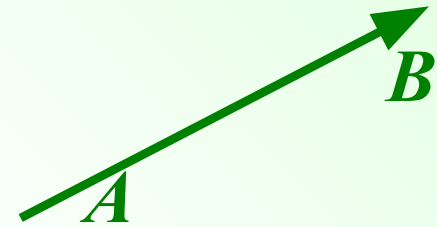
- *Какие векторы называются равными?*



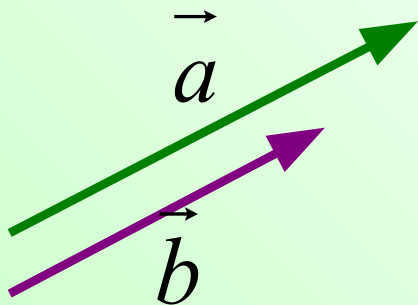
$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } |\vec{a}| = |\vec{b}|; \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

- *Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?*

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- *Какие векторы называются коллинеарными?*



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ или } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

Устно:

1) Дано: $A(-3; -2; 4)$ $B(-4; 3; 2)$

Найти: $|\overrightarrow{AB}|$

Ответ: $\sqrt{30}$

2) Дано: $A(2; -3; 1)$ $B(4; -5; 0)$ $C(5; 0; -4)$ $D(7; -2; -3)$

Равны ли векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} ?

$\overrightarrow{AB}\{2; -2; -1\}$ $\overrightarrow{CD}\{2; -2; 1\}$

Ответ: Нет, т.к. равные векторы имеют равные координаты.

3) Дано: Коллинеарны ли векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} ?

$A(1; -3; 4)$

$B(5; 1; -2)$

$C(2; 0; 1)$

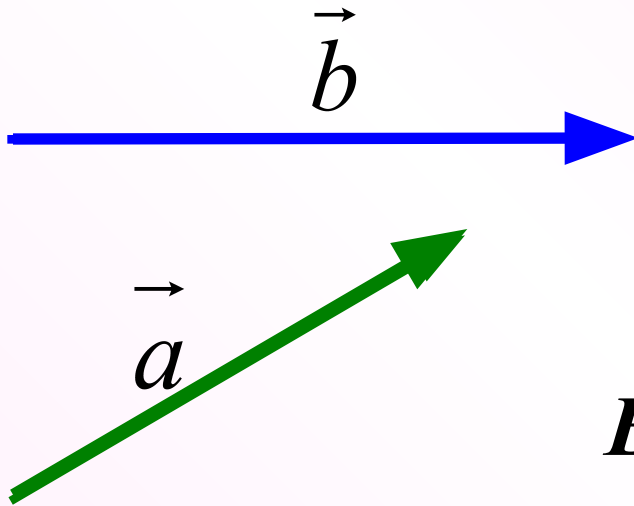
$D(4; -2; 2)$

$\overrightarrow{AB}\{8; 4; -6\}$

$\overrightarrow{CD}\{2; -2; 1\}$

Ответ: Нет

Угол между векторами.

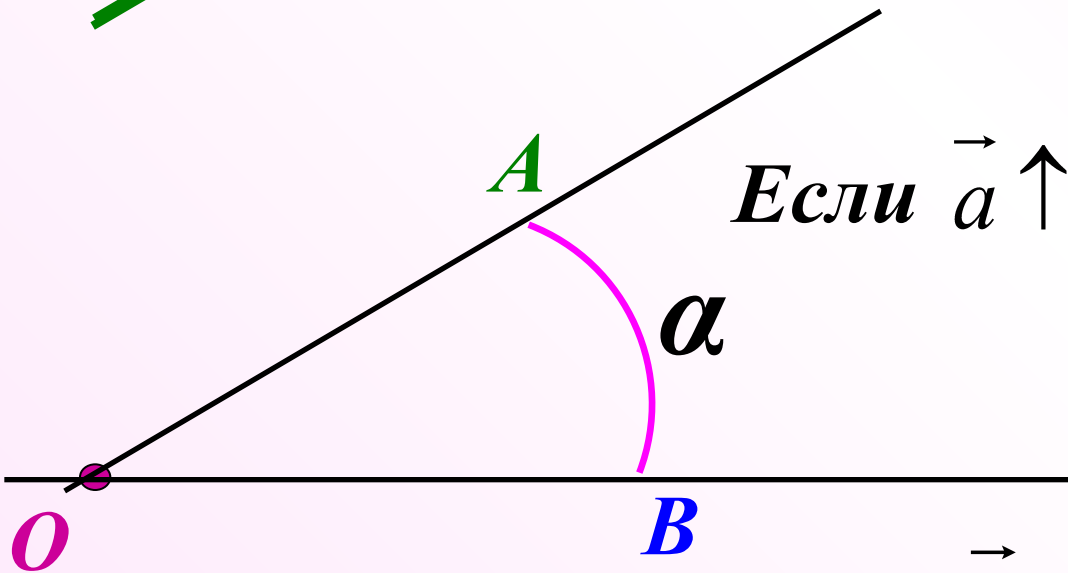


$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = \alpha$$

Если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, то $\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 0^\circ$

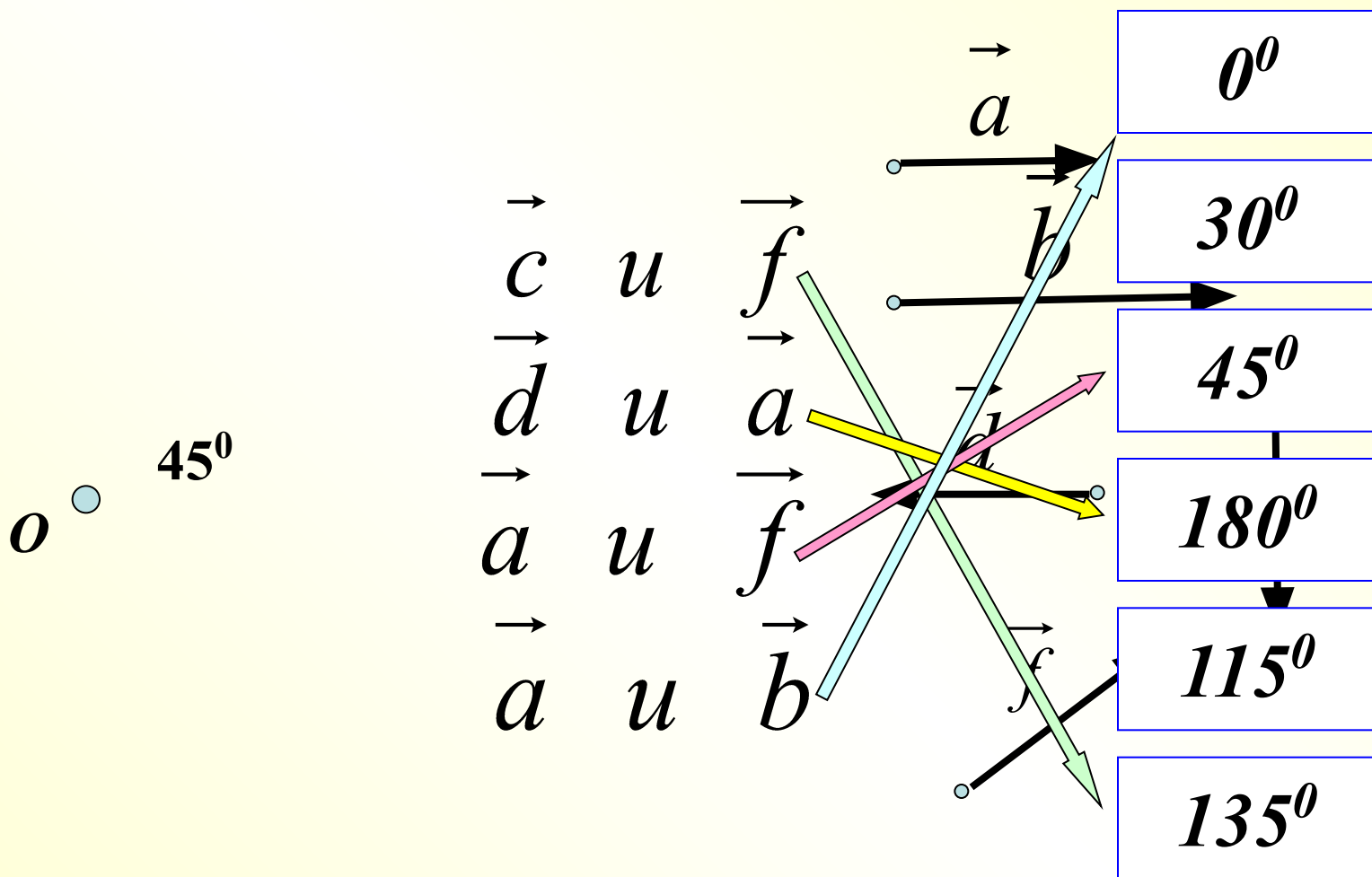
Если $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ то $\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 180^\circ$



α

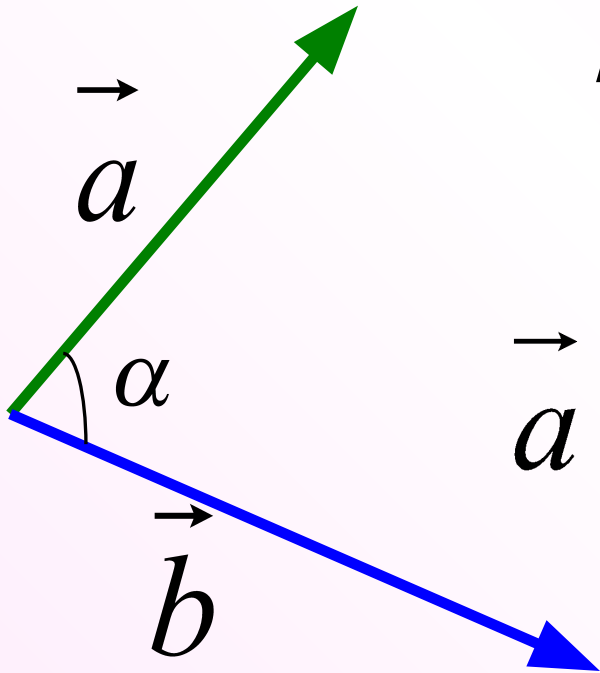
Если $\vec{a} \perp \vec{b}$ то $\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 90^\circ$

Сопоставьте углы между векторами и их градусной мерой.



Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Вспомним планиметрию...

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

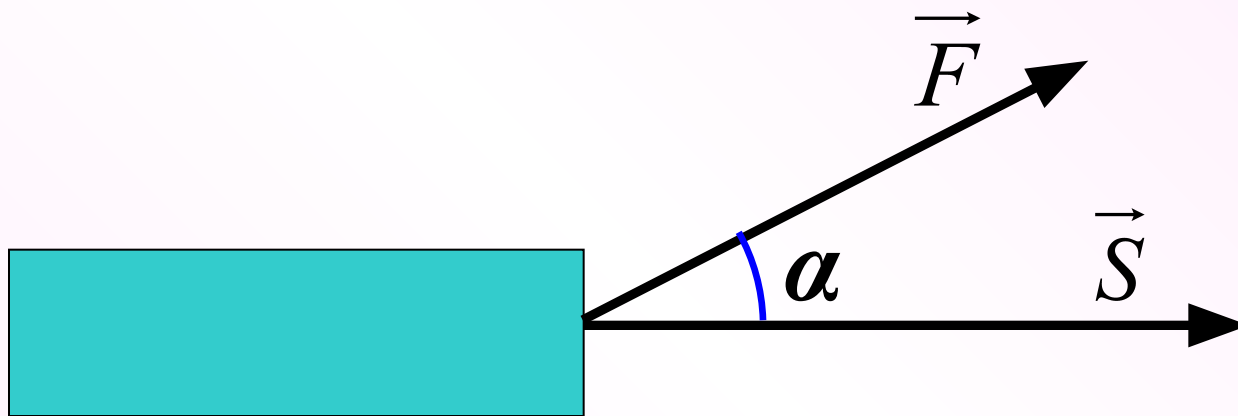
Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

Если $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, то $\cos 180^\circ = -1 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, то $\cos 0^\circ = 1 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 = a^2}$

Пример применения скалярного произведения векторов в физике.



Если $(\vec{F} \vec{S}) = \alpha$, то

$$A = \underbrace{|\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \alpha}$$

Скалярное произведение векторов.

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

*Скалярное произведение двух векторов равно
сумме произведений соответствующих
координат этих векторов.*

Решение задач.

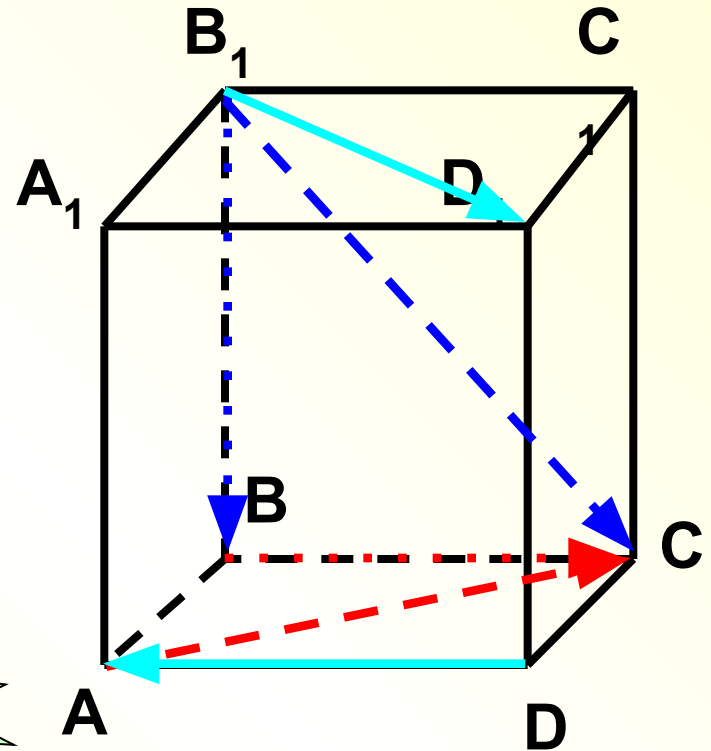
Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите угол между векторами:

а) $\vec{B_1 B}$ и $\vec{B_1 C}$ 45°

б) \vec{BC} и \vec{AC} 45°

в) \vec{DA} и $\vec{B_1 D_1}$ 135°



Решение задач.

Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$;

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

1 способ:

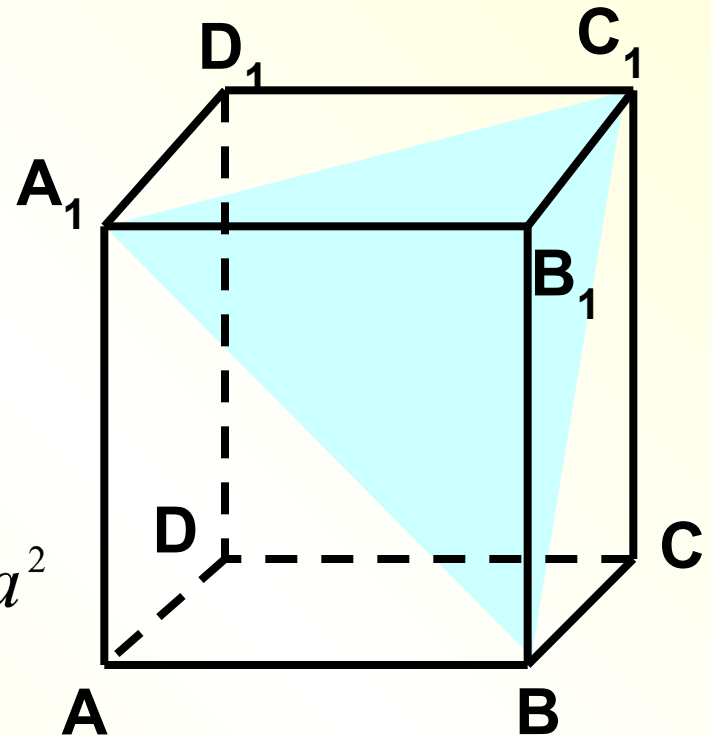
$\triangle BA_1 C_1$ – правильный

$$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$$

$$\angle(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BC_1}) = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

Ответ: a^2



Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$;

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

2 способ:

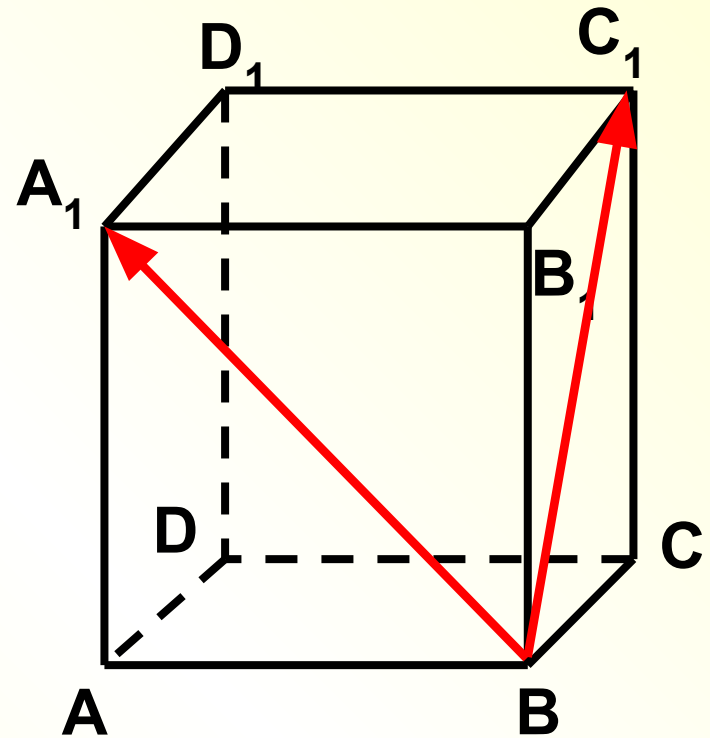
$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} \quad \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}) =$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} +$$

$$+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$$



Ответ:

a^2

Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$;

$AB = a$; O_1 – центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$

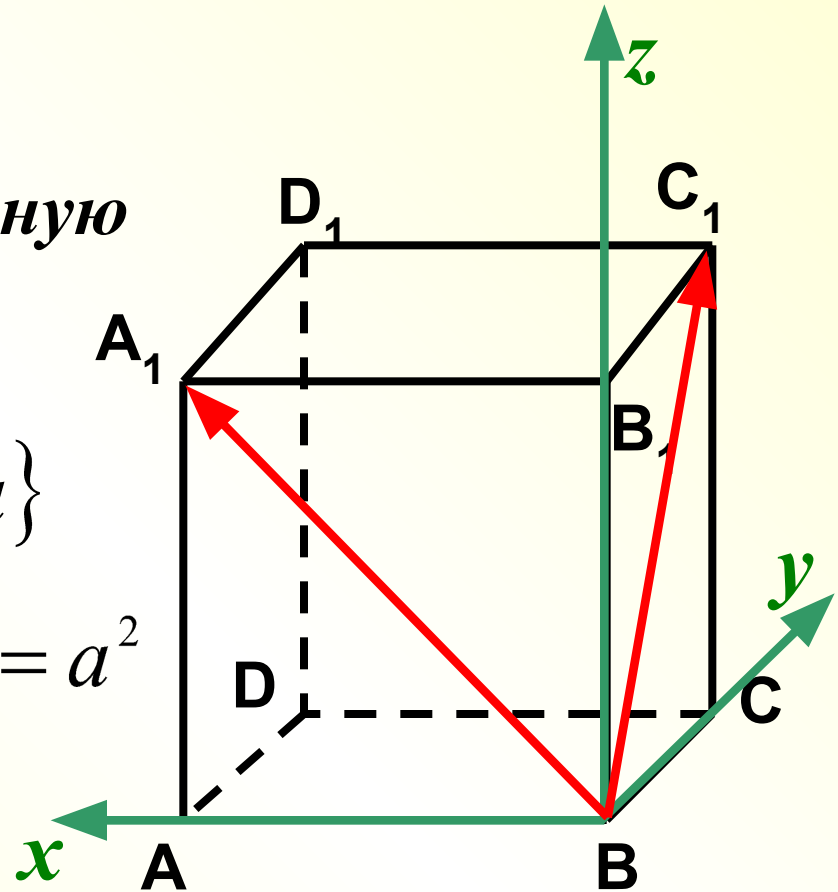
Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

3 способ: Введем прямоугольную систему координат.

$$\overrightarrow{BA_1} \{a; 0; a\} \quad \overrightarrow{BC_1} \{0; a; a\}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$$

Ответ: a^2



Решаем по группам:

Вычислите угол
между вектором a
и координатным

вектором i . $\vec{i} \{1;0;0\}$

$\vec{a} \{2;1;2\}$

Ответ:

$\arccos(2/3)$

$\vec{k} \{0;0;1\}$

+

Вычислите угол
между вектором a
и координатным

вектором k .

$\vec{a} \{2;2;1\}$

Ответ:

$\arccos(1/3)$

Дополнительная задача:

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ –
квадрат, если вершины имеют координаты
 $A (-3;5;6)$, $B (1;-5;7)$, $C (8;-3;-1)$, $D (4;7;-2)$.

Дома: вывести формулу

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

+

***М.И. Башмаков «Математика. Задачник»,
стр. 115, № 5.51.***

Спасибо за урок!