ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ГЛАВА 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Предмет теории вероятностей

- *Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.*
- *Теорию вероятностей можно определить как науку, изучающую математические модели случайных событий или случайных экспериментов, т.е. экспериментов с неопределенными исходами.*

Большой вклад в развитие теории вероятностей внесла российская математическая школа.

Ее представителями являются:

- Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894), поставивший и решивший ряд проблем теории вероятностей, в частности, обобщил закон больших чисел;
- Андрей Андреевич Марков (1856–1922) -основоположник теории случайных процессов, давший начало теории марковских процессов;
- Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918), сформулировавший и доказавший центральную предельную теорему в достаточно общей форме и разработавший метод характеристических функций;
- Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) заложил основы современной теории вероятностей, введя систему аксиом и основных вероятностных понятий.

1.2. КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА АБСТРАКТНЫХ СОБЫТИЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБЫТИЙ

Для изучения и описания реальных событий, характеризующих различные случайные явления окружающей действительности, применяется *математические модели* (*схемы*) *абстрактных событий и действий над ними*.

Здесь рассмотрим две модели: *классическую* и *аксиоматическую.*

Классическая модель была исторически первой, она более проста для понимания.

На языке классической модели чаще ведётся изложение теории вероятностей.

Дадим её описание, выделив, прежде всего, понятие испытания.

Под испытанием (*опытом, экспериментом*) *будем понимать выполнение определённого набора условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат*.

Испытание (или опыт) может быть осуществлено человеком, но может проводиться и независимо от человека, выступающего в этом случае в роли наблюдателя.

1.3. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА АБСТРАКТНЫХ СОБЫТИЙ

- Рассматриваемая схема базируется на аксиомах, предложенных академиком А.Н. Колмогоровым в 1933 году.
- В основе аксиоматической схемы лежат элементарные события. Они призваны моделировать исходы реального опыта. Опыт в этой теории вообще не требуется. О нём говорят лишь для связи схемы с реальностью.

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. БИНОМ НЬЮТОНА

- При решении задач с использованием классического определения вероятности наибольшую трудность представляет подсчёт числа *элементарных исходов, благоприятствующих данному событию*. Для этого нужно знать некоторые правила и формулы, которые рассматриваются в комбинаторике.
- *Комбинаторика — это раздел математики, посвященный решению задач выбора элементов заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам.*
- Полученные группы элементов называются соединениями или комбинациями. Они могут отличаться друг от друга как составом элементов и их общим числом, так и порядком следования элементов.
- В теории вероятностей, как и в самой комбинаторике, обычно интересуются не самими соединениями, а их числом.

ГЛАВА 2. ПРОСТЕЙШИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ

- Вероятность - второе фундаментальное понятие теории вероятно- стей после случайного события. С помощью этого понятия строятся все вероятностные схемы случайных явлений. Рассмотрим четыре определения вероятности на основе двух схем случайных событий - класси- ческой и аксиоматической. Из них исторически первым было сформулировано классическое определение вероятности в работе Якоба Бернулли (1713). Из всех определений оно является наиболее простым. На нем легко осмысливаются основные свойства вероятности, общие для всех определений.

2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

- Одним из условий классического определения вероятности является то, что оно предполагает *конечное число* элементарных исходов опыта. *На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов бесконечно*.
- Чтобы преодолеть недостаток классического определения, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрическую вероятность*, т.е. находят вероятность попадания точки в некоторую область.

2.3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Классическое и геометрическое определения вероятности имеют ограниченное применение.
Большинство практически важных случаев исследования случайных явлений не может быть основано на этих определениях, так как опыты, в результате которых возникают случайные события, не обладают симметрией исходов (как в случае монеты и игрального кубика).
Вследствие этого не удается выделить равновозможные события.
В связи с этим появилась необходимость введения еще одного определения вероятности, называемого *статистическим*.
Статистическое определение вероятности свободно от этого недостатка и применимо к гораздо более широкому кругу случайных событий.
Чтобы дать это определение, предварительно введем понятие относительной частоты события.

Хотя статистические исследования велись с глубокой древности, понятие вероятности на основе статистики сформулировано в последней работе Якоба Бернулли (1713). Большой вклад в развитие статистического подхода к определению вероятности внес немецкий математик Р. Мизес (1883–1958).

С практической точки зрения статистическое определение вероятности является наиболее разумным. Однако оно применимо не к любым случайным событиям, а только к тем, которые обладают определенными свойствами:

- *Рассматриваемые события должны быть исходами только тех испытаний, которые могут быть воспроизведены (хотя бы теоретически) неограниченное число раз при одном и том же наборе условий.*
- *События должны обладать так называемой статистической устойчивостью или устойчивостью относительных частот.* Это означает, что в различных сериях испытаний относительная частота события изменяется незначительно, колеблясь около постоянного числа.
- *Число испытаний, в результате которых появляется событие* ***A****, должно быть достаточно велико, так как только в этом случае можно считать вероятность события P(****A****) приближенно равной относительной частоте.*

2.4. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Аксиоматическое определение вероятности является наиболее общим и строится на основе свойств вероятности, которые формулируются как аксиомы.

В период 1933 г. академик А.Н. Колмогоров разработал новый подход, связывающий теорию вероятностей с современной метрической теорией функций и теорией множеств, который в настоящее время является общепринятым.

Аксиоматическое определение вероятности включает, как частные случаи, классическое и геометрическое определения, а также отражает свойства относительной частоты.

ГЛАВА 3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Одной из основных задач теории вероятностей является нахождение вероятностей сложных событий, выраженных по формулам алгебры событий через другие события.

Теоремы сложения и умножения вероятностей и свойства вероятности позволяют решить эту задачу.

ГЛАВА 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

Часто приходится иметь дело с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при заданном наборе условий.
Такие испытания будем называть *повторными*.
Иначе говоря, *повторные испытания-это последовательное проведение n раз одного и того же опыта или одновременное проведение n одинаковых опытов*.
Наиболее простой из таких последовательностей испытаний является схема повторных независимых испытаний с альтернативными исходами каждого испытания, получившая название *схемы или модели Бернулли.*

ГЛАВА 5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В предыдущих главах рассматривались *случайные события*. Это позволило исследовать закономерности случайных экспериментов (опытов) на качественном уровне - «да» или «нет».
Например, попадание в цель или промах, отказ устройства за фиксированное время или устойчивая работа, прибытие самолета в аэропорт в назначенное время или опоздание и т.д.
Таким образом, случайное событие представляет собой абстрактную модель качественного признака.
Дальнейшее развитие теории вероятностей потребовало введения новых понятий - числовых величин, представляющих абстрактную модель качественного признака, т.е. количественно характеризующих результат случайного эксперимента.
Такие числовые величины в теории вероятностей называют *случайными величинами*.
Далее рассматриваются именно случайные величины.

5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

- Для того чтобы лучше осознать связь, существующую между *случайными величинами* и *случайными событиями*, начнем с пояснения понятия случайной величины.
- *Под случайной величиной понимают величину, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение.*

5.2 ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Наиболее полным и исчерпывающим описанием случайной величины является ее закон распределения.

- ***Определение* 5.2.** *Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.*
  Общим законом распределения, присущим всем случайным величинам, является функция распределения.
- ***Определение* 5.3.** *Функцией распределения (вероятностей) случайной величины называют функции, определенную на всей числовой оси, значение которой в точке x равно вероятности события.*

5.3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

С точки зрения природы множества значений, которые принимают случайные величины, из них можно естественным образом выделить два класса: *дискретные и непрерывные случайные величины*.

- ***Определение 5.4.*** *Случайная величина х называется дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно, т. е. может быть перенумеровано.*
  Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически в виде формулы и графически. *Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины является табличный (матричный) в виде ряда распределения.*
- ***Определение 5.5.*** *Рядом распределения (вероятностей) дискрет- ной случайной величины х называют таблицу, состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены, как правило, в порядке возрастания, все возможные значения случайной величины, а в нижней строке - соответствующие вероятности с которыми эти значения принимаются.*

ГЛАВА 6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часто закон распределения дискретной случайной величины удобно задавать в виде *ряда распределения*, а непрерывной - в виде *плотности распределения*.

При решении многих задач нет необходимости указывать закон распределения случайной величины, а достаточно задать лишь некоторые детерминированные или неслучайные числа, которые характеризуют случайную величину.

В теории вероятностей такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. Именно такие характеристики рассмотрим в настоящей главе.

Важнейшими среди названных характеристик являются *математическое ожидание*, задающее «центральное» значение случайной величине, и *дисперсия*, характеризующая «разброс» значений случайной величины вокруг её математического ожидания.

6.4 . ПОНЯТИЯ О МОМЕНТАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются частными случаями более общих числовых характеристик случайных величин.

Такими числовыми характеристиками являются моменты случайных величин.

Различают моменты двух типов - начальные и центральные.

Определение 6.4. *Начальным моментом k-го порядка или порядка k случайной величины ξ называется математическое ожидание k-ой степени этой величины. Обозначается начальный момент k-го порядка через ν_k.*

Определение 6.5. *Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание k-й степени отклонения этой величины от её математического ожидания.*

ГЛАВА 7. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной главе представлены законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин.

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся на практике *распределения дискретных случайных величин*.

7.1. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть производится n независимых испытаний, и при каждом испытании может быть два исхода - успех с вероятностью $p (0 < p < 1)$ Или неудача с вероятностью □ − 1 = □.

Случайной величиной x объявим число успехов в этих n испытаниях.

***Определение* 7.1.** *Дискретная случайная величина x имеет Биномиальный закон распределения* (*или распределение Бернулли*), *если она принимает значения* 0, 1, 2.

Параметрами биномиального распределения являются n и p.

Если случайная величина x распределена по биномиальному закону.

Биномиальное распределение появляется в таких задачах, как стрельба по цели (при каждом выстреле два исхода - попадание или промах), подбрасывание монеты, рождение k мальчиков при регистрации n рождений 0 ≤ ˊ ≤ ⁑ или проверка наугад выбранного изделия, которое может оказаться качественным или бракованным и т.д.

7.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

***Определение* 7.2.** *Дискретная случайная величина x имеет закон распределения Пуассона, если она принимает целые неотрицательные значения*
{0, 1,2,…}
с вероятностями {*x* = } = , = 0, 1, 2,… ,!
где 0 < □ — *параметр распределения Пуассона,* = □
□□.

В отличие от биномиального распределения, здесь случайная величина уже может принимать бесконечное число значений.

Распределение Пуассона используется для определения вероятности того, что при очень большом количестве испытаний, в каждом из которых вероятность события *A* очень мала, событие *A* наступит ровно *k* раз.

7.3. РАВНОМЕРНОЕ НЕПРЕРЫВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

***Определение* 7.3.** *Непрерывная случайная величина x называется равномерно распределенной на отрезке* $[a, b]$*, если она принимает любые значения этого отрезка с равной вероятностью.*

7.5. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нормальное распределение является самым распространенным распределением в природе, экономике и т.д.

Фундаментальная роль, которую играет нормальное распределение, объясняется тем, что при достаточно широких предположениях суммы случайных величин ведут себя асимптотически нормально, если число слагаемых неограниченно растет.

Весьма значительная часть встречающихся в практике случайных величин приблизительно распределена по нормальному закону.

Нормальное распределение является наиболее известным и часто применяемым при решении задач математической статистики и статистического контроля качества и многих других областей.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
ГЛАВА 8. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД
8.1. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика - это наука, в которой изучаются методы регистрации, описания и анализа данных наблюдений и экспериментов с целью построения вероятностных моделей массовых случайных явлений.

Предметом математической статистики является изучение случайных событий, случайных величин и процессов по результатам наблюдений, измерений, опытов.

Результаты наблюдений, измерений, опытов будем называть статистическими.

- Методы математической статистики носят абстрактный характер, используются для обработки экспериментальных данных любой природы, и поэтому они применимы в любых областях науки, техники, экономики, медицины, сельского хозяйства и т.д.
- *Можно выделить две основные задачи математической статистики.*
- *Первая задача - разработка методов сбора, регистрации и группировки статистических данных, полученных в результате наблюдений за случайными процессами.*
- *Вторая задача математической статистики состоит в формировании методов обработки и анализа полученных выборочных данных.*

8.2. ГЕНЕРАЛЬНАЯ И ВЫБОРОЧНАЯ СОВОКУПНОСТИ. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРКИ

Основу исследований в математической статистике, как уже отмечалось выше, составляют данные наблюдений.

В математической статистике принято оперировать понятиями генеральной и выборочной совокупностей.

***Определение* 8.1.**

Совокупность всех подлежащих изучению однородных объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, проводимых в неизменных условиях над одним объектом, называется генеральной совокупностью.

Понятие генеральной совокупности в определенном смысле аналогично понятию случайной величины (вероятностному пространству, закону распределения вероятностей).
Так как понятия генеральной совокупности и совокупности всех значений случайной величины связаны с испытаниями (наблюдениями) в неизменных условиях, то в дальнейшем эти понятия не будут различаться. Поэтому иногда в математической статистике генеральной совокупностью называют множество возможных значений изучаемой случайной величины *X*.

Под законом распределения (*распределением*) *генеральной совокупности X будем понимать закон распределения вероятностей случайной вели- чины X, а его числовые характеристики будем называть числовыми характеристиками генеральной совокупности.*
Генеральная совокупность может быть конечной или бесконечной, в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих ее элементов или значений случайной величины.

***Определение* 8.2.**

Выборочной совокупностью или выборкой называется совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

8.3. ВАРИАЦИОННЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ И ИХ ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Прежде чем перейти к анализу полученных в результате эксперимента статистических данных, обычно проводят их предварительную обработку, которая включает упорядочение, группировку и графическое представление статистических данных.

Операция расположения статистических данных по неубыванию называется их ранжированием.

***Определение* 8.3.**

Вариационным рядом называется последовательность элементов выборки, расположенных в неубывающем порядке. Одинаковые элементы повторяются.

***Определение* 8.4.**

Статистическим рядом выборки или просто статистическим рядом называется последовательность различных элементов выборки, расположенных в возрастающем порядке с указанием частот, с которыми эти элементы содержатся в выборке.

Статистический ряд обычно записывают в виде таблицы.

8.4. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- Одним из важнейших способов обработки статистического ряда является построение эмпирической функции распределения, которая дает функциональный способ описания выборки.
- ***Определение* 8.5.** *Эмпирической (статистической) функцией распределения называется функция, определяющая для каждого значения x относительную частоту события* $X < x$.

8.5. ВЫБОРОЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для выборки можно определить ряд числовых характеристик, аналогичным тем, что ранее определялись для дискретной случайной величины X, принимающей выборочные значения.

Тогда числовые характеристики этой случайной величины X называются *выборочными числовыми характеристиками*.

Наиболее употребительные выборочными числовыми характеристиками являются характеристики положения и рассеяния выборки, а также выборочные моменты.
Все они характеризуют выборку, а через нее и генеральную совокупность, являясь аналогами соответствующих числовых характеристик генеральной совокупности.

Характеристики положения

- ***Определение 8.6.*** *Выборочным средним называется отношение суммы произведений выборочных значений на соответствующие частоты к объему выборки n,* т.е. под выборочным средним понимают среднее арифметическое всех значений выборки.

Характеристики рассеяния или вариации

Простейшим показателем вариации является вариационный размах R, который определяется как разность между наибольшим и наименьшим значениями.

***Определение* 8.7.** *Средним линейным отклонением вариационного ряда называется величина.*

***Определение* 8.8.** *Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от их выборочного среднего.*

8.6. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО РЯДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для построения интервального статистического ряда необходимо весь промежуток, содержащий выборочные значения, разбить на k частичных промежутков, как правило, одинаковой длины h. При этом считают, что каждый частичный промежуток содержит свою левую границу, но лишь последний частичный промежуток содержит и свою правую границу.

При такой договоренности каждое выборочное (наблюдаемое) значение содержится в одном и только в одном частичном промежутке.