

**Методы статистической обработки  
результатов активного и  
пассивного эксперимента в  
электромеханике.**

**Оценка погрешностей измерений и  
расхождения опытных и  
теоретических величин**

## Статистическая обработка результатов эксперимента

**Случайная величина** – это любая физическая величина, которая принимает те или иные значения в зависимости от случая с определенными вероятностями.

$x$  – значение случайной величины;

$P$  – вероятность появления этого значения.

**Вероятность** – характеризует степень возможности появления определенного значения случайной величины.

$$P = \lim (N / N_{\text{ВОЗМ}}),$$

$N$  – число благоприятных случаев;

$N_{\text{ВОЗМ}}$  – общее число всех возможных случаев ( $N_{\text{ВОЗМ}} \rightarrow \infty$ )

## Статистическая обработка результатов эксперимента

*Любая* физическая величина является *случайной*. Все возможные значения этой величины повторяются бесконечное число раз.

**Генеральная совокупность** – все возможные числовые значения данной случайной величины (включая известные и неизвестные значения).

**Числовые характеристики** случайной величины:

- **численное значение** случайной величины  $x_k$ ;
- **вероятность**  $P_k$  того, что данная величина примет значение  $x_k$ ;
- **математическое ожидание**  $M$  (среднее значение случайной величины);
- **дисперсия** (рассеяние)  $D$ ;
- **среднеквадратичное отклонение**  $S$ .

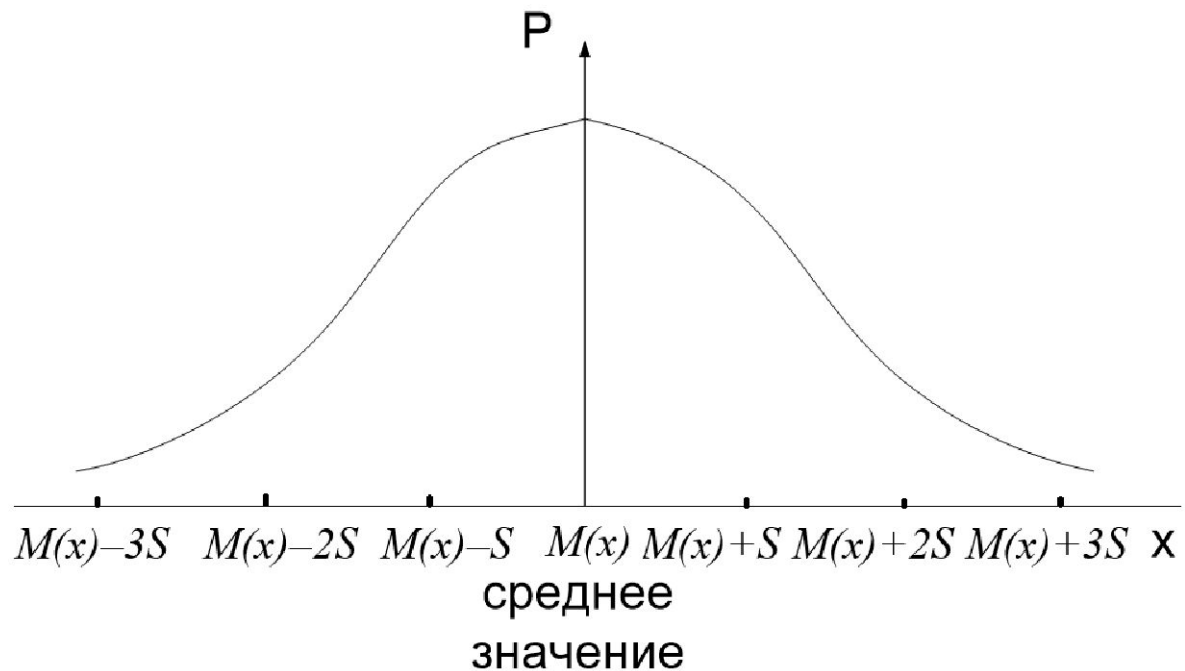
$$S = \sqrt{D}$$

# Статистическая обработка результатов эксперимента

К статистическим характеристикам относится также и **закон распределения вероятности  $P(x)$** .

## Законы распределения вероятности

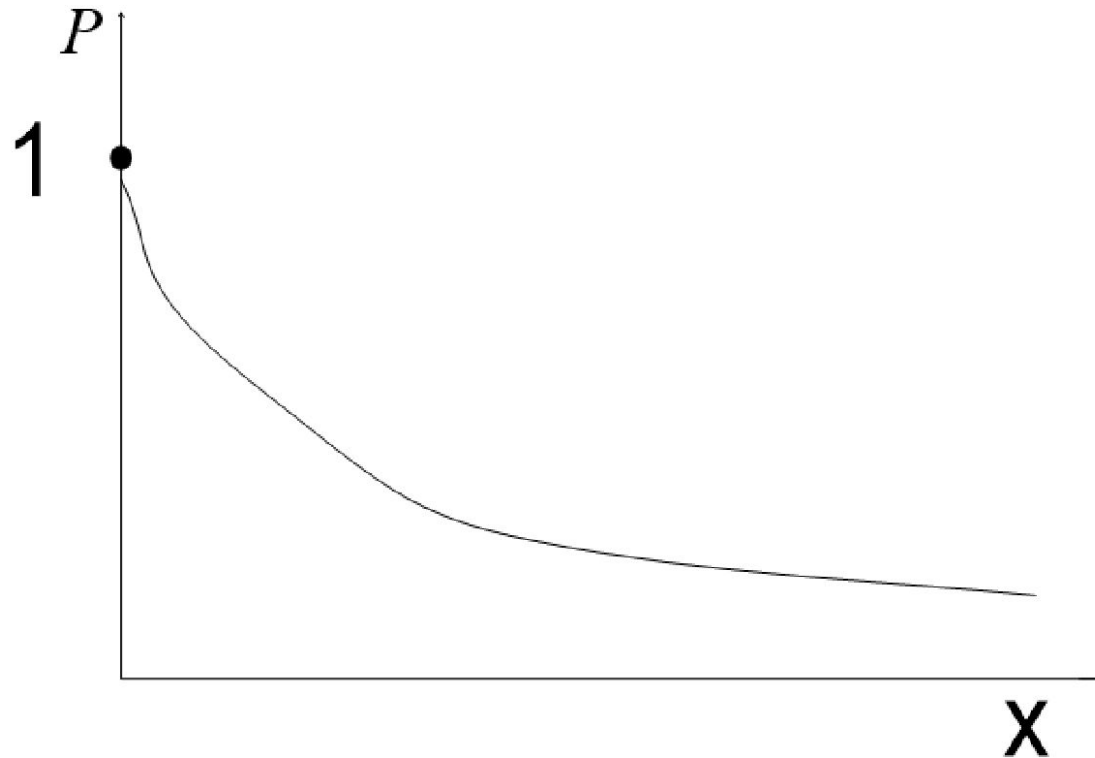
1. Нормальный закон (закон Гаусса)  $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot S}} \cdot \int e^{-\frac{x^2}{2S}} dx$



# Статистическая обработка результатов эксперимента

## Законы распределения вероятности

2. Экспоненциальный закон  $P(x) = e^{-\lambda x}$

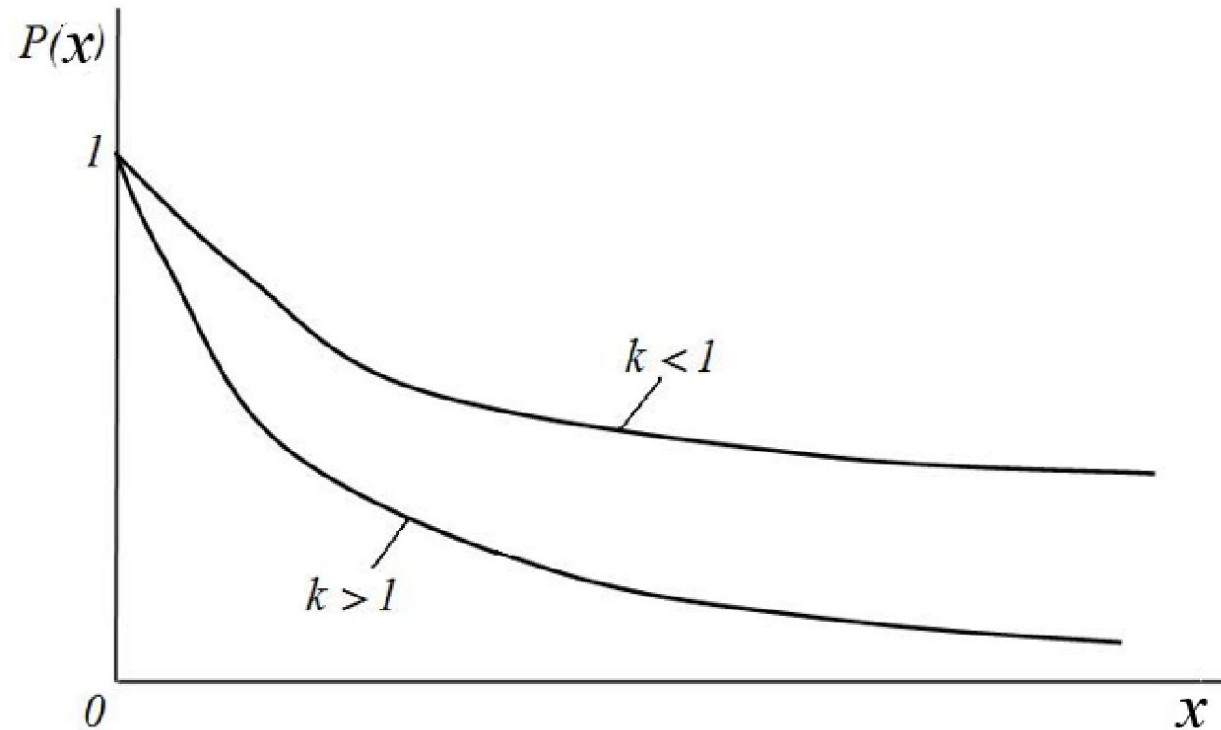


# Статистическая обработка результатов эксперимента

## Законы распределения вероятности

### 3. Закон Вейбулла

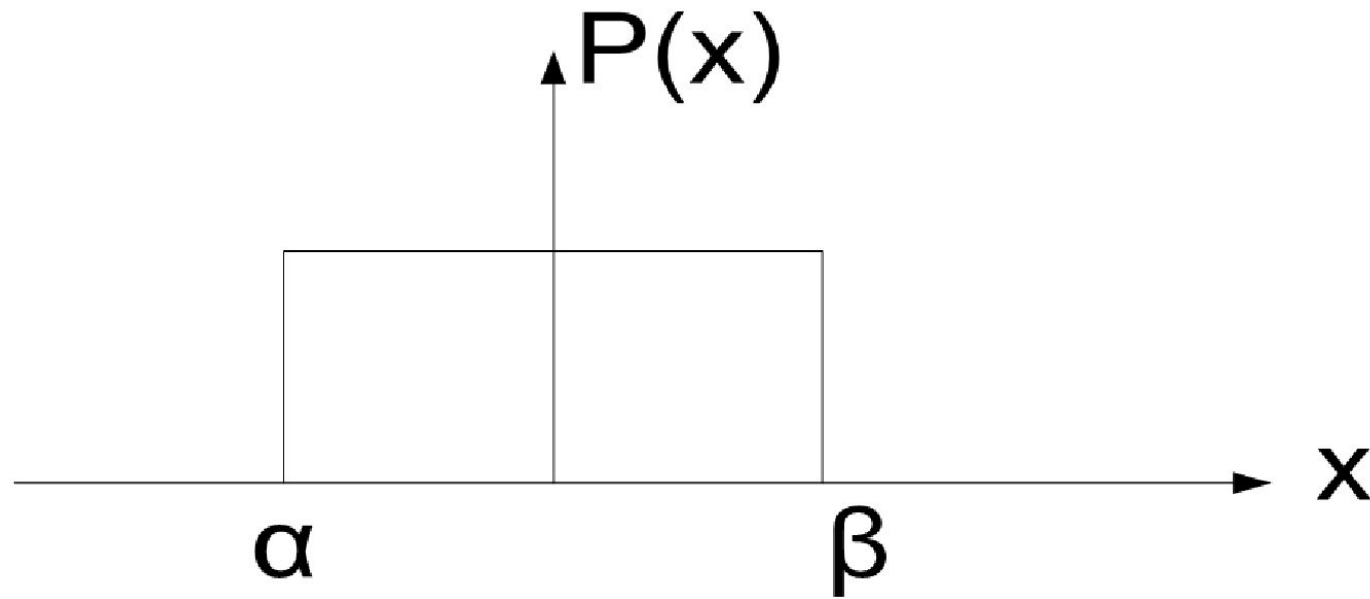
$$P(x) = e^{-\lambda x^k}$$



# Статистическая обработка результатов эксперимента

## Законы распределения вероятности

### 4. Равномерное распределение



## Статистическая обработка результатов эксперимента

На практике обычно имеют дело с *выборочными данными* и с *оценками* числовых характеристик (обозначаются со звездочками вверху).

Эти характеристики с ростом числа наблюдений (или измерений) данной случайной величины стремятся к числовым характеристикам генеральной совокупности.

Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины:

$$M(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$



# Статистическая обработка результатов эксперимента

Дисперсия (рассеяние) случайной величины:

$$D(x) = \frac{1}{N - 1} \sum_{k=1}^N (x_k - M(x))^2$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$S(x) = \sqrt{D(x)}$$

$x_k$  – текущее значение случайной величины;

$N$  – количество известных значений случайной величины

## Статистическая обработка результатов эксперимента

При большом объеме выборки (но ограниченном числе опытов) нахождение числовых характеристик вызывает заметные математические трудности, но их можно преодолеть, составляя **интервальный вариационный ряд**

В данной методике отдельные значения  $x_k$  объединяются в группы, попавшие в отдельные интервалы значений.

Количество групп (и интервалов)  $K$  выбирается от 5 до 15–20 и может быть предварительно определено из полуэмпирического соотношения.

$$K = 1 + 3,2 \cdot \lg N$$

$N$  – объем выборки (количество известных значений данной случайной величины)

# Статистическая обработка результатов эксперимента

## Пример интервального ряда

Номер интервала	Границы интервала $\alpha_k \dots \beta_k$	Абсолютная частота попадания в интервал $m_k$	Относительная частота попадания в интервал $P_k^*$	Срединное значение $\bar{x}_k$	$\bar{x}_k \cdot P_k^*$	$(\bar{x}_k - \bar{x})^2 \cdot P_k^*$	Теоретическая частота $P_k$	$N \cdot P_k$	$\frac{(m_k - N \cdot P_k)^2}{N \cdot P_k}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,13...0,19	1	0,05	0,16	0,08	0,00196	0,03	0,6	0,2666
2	0,19...0,25	2	0,1	0,22	0,022	0,0019	0,09	1,8	0,0222
3	0,25...0,31	3	0,15	0,28	0,042	0,000915	0,18	3,6	0,1
4	0,31...0,37	4	0,2	0,34	0,068	0,000065	0,25	5	0,2
5	0,37...0,43	5	0,25	0,4	0,1	0,00044	0,23	4,6	0,0348
6	0,43...0,49	4	0,2	0,46	0,092	0,00208	0,16	3,2	0,2
7	0,49...0,55	1	0,05	0,52	0,026	0,00128	0,06	1,2	0,0333
		$\sum_{k=1}^K m_k = 20$	$\sum_{k=1}^K P_k^* = 1$	$\bar{x} = \sum_{k=1}^K \bar{x}_k \cdot P_k^* = 0,358$	$D(x) = \sum_{k=1}^K (\bar{x}_k - \bar{x})^2 \cdot P_k^* = 0,00863;$ $S_x^* = \sqrt{D(x)} = 0,093$	$\sum_{k=1}^K P_k = 1$	$\sum_{k=1}^K NP_k = 20$	$\chi^2 = 0,857$	

# Статистическая обработка результатов эксперимента

Количество интервалов  $K$  округляется до ближайшего большего числа.

Ширина интервала  $h$  выбирается из соотношения:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{K},$$

где  $x_{max}$  и  $x_{min}$  – максимальное и минимальное значения случайной величины.

Для каждого интервала вычисляется нижняя  $\alpha_k$  и верхняя  $\beta_k$  границы интервала и его среднее значение  $\bar{x}_k$ :

$$\bar{x}_k = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}.$$

# Статистическая обработка результатов эксперимента

Относительная частота попадания случайной величины в каждый из интервалов определяется по формуле:

$$P_k^* = \frac{m_k}{N}, \quad N = \sum_{k=1}^K m_k$$

где  $m_k$  – абсолютная величина попадания в интервал,  $k$  – номер интервала.

При  $N \rightarrow \infty$  имеем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m_k}{N} \right) = P_k,$$

где  $P_k$  – вероятность попадания случайной величины в  $k$ -й интервал.

Величина  $P_k^*$  является оценкой этой вероятности.

Обязательное условие при решении задачи  $\sum_{k=1}^K P_k^* = 1$ .

# Статистическая обработка результатов эксперимента

- оценка математического ожидания опытной величины

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^K \bar{x}_k \cdot P_k^* ;$$

- оценка дисперсии опытных данных

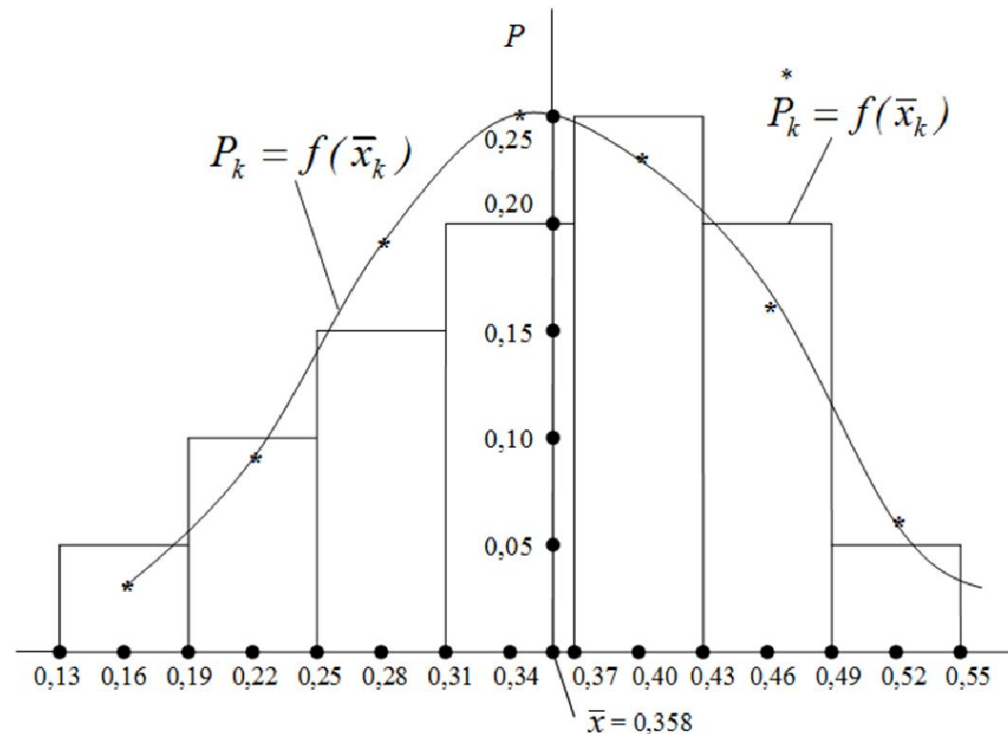
$$D(x) = \sum_{k=1}^K (\bar{x}_k - \bar{x})^2 \cdot P_k^* .$$

- оценка среднеквадратичного отклонения

$$S_x = \sqrt{D(x)} .$$

# Статистическая обработка результатов эксперимента

По величинам границ интервалов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  и оценки вероятности  $P_k^*$  может быть построена ступенчатая диаграмма  $P_k^* = f(\bar{x}_k)$ , которая называется гистограммой. Гистограмма является оценкой закона распределения вероятности случайной величины.



# Статистическая обработка результатов эксперимента

Теоретическая вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в интервал  $(\alpha_k$  и  $\beta_k)$  выражается формулой:

$$P(\alpha_k < x < \beta_k) = \Phi^* \left( \frac{(\beta_k - \bar{x})}{\sqrt{D(x)^*}} \right) - \Phi^* \left( \frac{(\alpha_k - \bar{x})}{\sqrt{D(x)^*}} \right),$$

где  $\Phi^*(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  – интеграл вероятности Лапласа



# Статистическая обработка результатов эксперимента

Центрированная и нормированная функция  $\Phi^*(Z)$

$Z$	$\Phi^*(Z)$	$Z$	$\Phi^*(Z)$	$Z$	$\Phi^*(Z)$	$Z$	$\Phi^*(Z)$
0,00	0,00	0,46	0,1772	0,92	0,3212	1,38	0,4162
0,02	0,008	0,48	0,1844	0,94	0,3264	1,40	0,4192
0,04	0,0160	0,50	0,1915	0,96	0,3316	1,42	0,4222
0,06	0,0239	0,52	0,1965	0,98	0,3365	1,44	0,4251
0,08	0,0319	0,54	0,2054	1,00	0,3413	1,48	0,4279
0,10	0,0398	0,56	0,2123	1,02	0,3461	1,50	0,4306
0,12	0,0478	0,58	0,2190	1,04	0,3508	1,60	0,4332
0,14	0,0557	0,60	0,2257	1,06	0,3554	1,70	0,4452
0,16	0,0636	0,62	0,2324	1,08	0,3599	1,80	0,4554
0,18	0,0714	0,64	0,2389	1,10	0,3643	1,90	0,4641
0,20	0,0793	0,66	0,2457	1,12	0,3686	2,00	0,4713
0,22	0,0871	0,68	0,2517	1,14	0,3729	2,10	0,4772
0,24	0,0948	0,70	0,2580	1,16	0,3770	2,20	0,4821
0,26	0,1026	0,72	0,2642	1,18	0,3810	2,50	0,4861
0,28	0,1103	0,74	0,2703	1,20	0,3849	3,00	0,4939
0,30	0,1179	0,76	0,2774	1,22	0,3888	3,50	0,4989
0,32	0,1255	0,78	0,2829	1,24	0,3925	4,00	0,4999
0,34	0,1331	0,80	0,2881	1,26	0,3962	4,50	0,4999997
0,36	0,1407	0,82	0,2939	1,28	0,3997	5,00	0,49999997
0,38	0,1480	0,84	0,2995	1,30	0,4034		
0,40	0,1554	0,86	0,3051	1,32	0,4066		
0,42	0,1628	0,88	0,3106	1,34	0,4096		
0,44	0,1700	0,90	0,3154	1,36	0,4131		

# Статистическая обработка результатов эксперимента

## Определение доверительных границ числовых характеристик

При ограниченном количестве опытных данных *точные значения числовых характеристик не могут быть определены*. Поэтому на практике рассчитывают **доверительные границы**, то есть интервалы, в которых могут находиться данные числовые характеристики при заданной погрешности расчета.

**Вероятность** того, что числовая характеристика случайной величины **попадет** в доверительный интервал называется **доверительной вероятностью**.

# Статистическая обработка результатов эксперимента

При нормальном законе распределения случайной величины границы доверительных интервалов определяются по формулам:

- для

$$P \left\{ \bar{x} - \frac{t_{v,\alpha} \cdot S_x^*}{\sqrt{N}} \leq M(x) \leq \bar{x} + \frac{t_{v,\alpha} \cdot S_x^*}{\sqrt{N}} \right\} = P,$$

где  $N$  – количество опытных данных,  $t_{v,\alpha}$  – значения квантиля распределения Стьюдента.

- для дисперсии генеральной совокупности

$$\frac{v \cdot S_x^2}{\chi_{v,\alpha_1}^2} \leq S_x^2 \leq \frac{v \cdot S_x^2}{\chi_{v,\alpha_2}^2}$$

# Статистическая обработка результатов эксперимента

Квантили распределения Стьюдента  $t_{v,\alpha}$

$\nu \backslash \alpha$	0,1	0,05	0,01
1	6,31	12,71	63,7
2	2,92	4,30	9,92
3	2,35	3,18	5,84
4	2,13	2,77	4,60
5	2,02	2,57	4,03
6	1,943	2,45	3,71
7	1,895	2,36	3,50
8	1,860	2,31	3,36
9	1,833	2,226	2,25
10	1,812	2,23	3,17
11	1,796	2,2	3,11
12	1,782	2,18	3,06
13	1,771	2,16	3,01
14	1,761	2,14	2,98
15	1,753	2,13	2,95
16	1,746	2,12	2,92
17	1,740	2,11	2,90
18	1,734	2,10	2,88
19	1,729	2,09	2,86
20	1,725	2,08	2,84
22	1,717	2,074	2,819
24	1,711	2,064	2,797
26	1,706	2,056	2,779
28	1,701	2,048	2,763
30	1,697	2,042	2,75

# Статистическая обработка результатов эксперимента

Для расчета доверительных границ среднего значения необходимо:

- задаться доверительной вероятностью  $P$  (как правило,  $P = 0,9 \div 0,98$ );
- рассчитать уровень значимости  $\alpha = \frac{1-P}{2}$ ;
- определить число степеней свободы  $\nu = K - 1$ ,  $K$  – количество интервалов;
- по таблице распределения Стьюдента по значениям  $\alpha$  и  $\nu$  найти величину  $t_{\nu, \alpha}$  и подставить ее значение в формулу для доверительных границ

## Статистическая обработка результатов эксперимента

Для расчета доверительных границ дисперсии:

- задаются доверительной вероятностью  $P$  (как правило,  $P = 0,9 \div 0,98$ );
- рассчитывают число степеней свободы и уровни значимости

$$\nu = K - 1; \alpha_1 = \frac{1 - P}{2}; \alpha_2 = \frac{1 + P}{2}$$

- определяют значения критерия Пирсо  $\chi_{\nu, \alpha_i}^2$
- по таблице  $\chi^2$  -распределения Пирсона.

# Статистическая обработка результатов эксперимента

$\chi^2$  - распределение.

$\nu \backslash \alpha$	0,99	0,95	0,9	0,8	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
1	0,00023	0,0039	0,0158	0,064	0,455	1,07	1,64	2,706	3,841	6,635
2	0,0201	0,103	0,211	0,0446	1,386	2,41	3,22	4,605	5,991	9,216
3	0,115	0,352	0,584	1,005	2,336	3,67	4,64	6,251	7,815	11,343
4	0,297	0,711	1,064	1,650	3,360	4,9	6,0	7,779	9,488	13,277
5	0,554	1,145	1,610	2,340	4,350	6,1	7,3	9,236	11,07	15,086
6	0,872	1,635	2,204	3,070	5,350	7,2	8,6	10,645	12,592	16,812
7	1,239	2,167	2,830	3,820	6,350	8,4	9,8	12,017	14,067	18,475
8	1,646	2,773	3,490	4,590	7,340	9,5	11,0	13,362	15,507	20,09
9	2,088	3,325	4,168	5,380	8,340	10,7	12,2	14,684	16,89	21,666
10	2,558	3,940	4,865	6,180	9,340	11,8	13,4	15,987	18,307	23,209
11	3,053	4,575	5,578	7,000	10,300	12,9	14,6	17,275	19,675	24,725
12	3,571	5,226	6,304	7,800	11,300	14,0	15,8	18,549	21,026	26,217
13	4,107	5,892	7,042	8,600	12,300	15,1	17,0	19,812	22,362	27,688
14	4,660	6,571	7,790	9,500	13,300	16,2	18,2	21,064	23,685	29,141
15	5,229	7,261	8,547	10,300	14,300	17,3	19,3	22,307	24,996	30,578
16	5,812	7,962	9,312	11,200	15,300	18,4	20,5	23,542	26,296	32,00
17	6,408	8,672	10,085	12,000	16,300	19,5	21,6	24,769	27,587	33,409
18	7,015	9,390	10,865	12,900	17,300	20,6	22,8	25,989	28,869	34,805
19	7,633	10,117	11,651	13,700	18,300	21,7	23,9	27,204	30,144	36,191
20	8,260	10,851	12,444	14,600	19,300	22,8	25,0	28,412	31,41	37,566

# Статистическая обработка результатов эксперимента

## **Проверка гипотезы о законе распределения случайной величины**

**Проверка статистических гипотез** – это проверка предположения о свойствах генеральной совокупности (то есть, какому закону распределения подчиняются числовые характеристики генеральной совокупности).

Проверка гипотезы – это выявление попадания статистики в критическую область. Принятая гипотеза отвергается, если статистика попадает в критическую область. В качестве критериев принятия или отклонения гипотезы используются критерии Пирсона, Колмогорова, Смирнова и другие.



## Статистическая обработка результатов эксперимента

Если числовые характеристики определяются *интервальным методом*, то для проверки гипотезы о *нормальном* законе распределения случайной величины действуют в следующем порядке:

Для каждого интервала рассчитывается значение критерия Пирсона  $\chi_k^2$ :

$$\chi_k^2 = \frac{(m_k - N \cdot P_k)^2}{N \cdot P_k},$$

где  $N$  – общее количество опытных данных.

Расчетное значение  $\chi^2$  можно получить, просуммировав все значения  $\chi_k^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(m_k - N \cdot P_k)^2}{N \cdot P_k}.$$

где  $K$  – количество интервалов.

# Статистическая обработка результатов эксперимента

- определяют число степеней свободы  $\nu = K - 3$ ,  
где  $K$  – количество интервалов; (здесь число степеней свободы определяется числом интервалов за вычетом наложенных связей; количество связей равно трем, так как были приняты три допущения:  $M(x) = \bar{x}$ ,  $S_x = S_x^*$ ,  $\sum_{k=1}^K P_k^* = 1$ );
- по величине  $\chi^2$  и числу степеней свободы  $\nu$  по таблице критерия Пирсона определяется вероятность  $\alpha$ . Полученное значение  $\alpha$  – это вероятность того, что исходная гипотеза справедлива, то есть закон распределения данной случайной величины близок к нормальному.

# Статистическая обработка результатов эксперимента

## Пример статистической обработки результатов определения погрешности тахогенератора интервальным методом

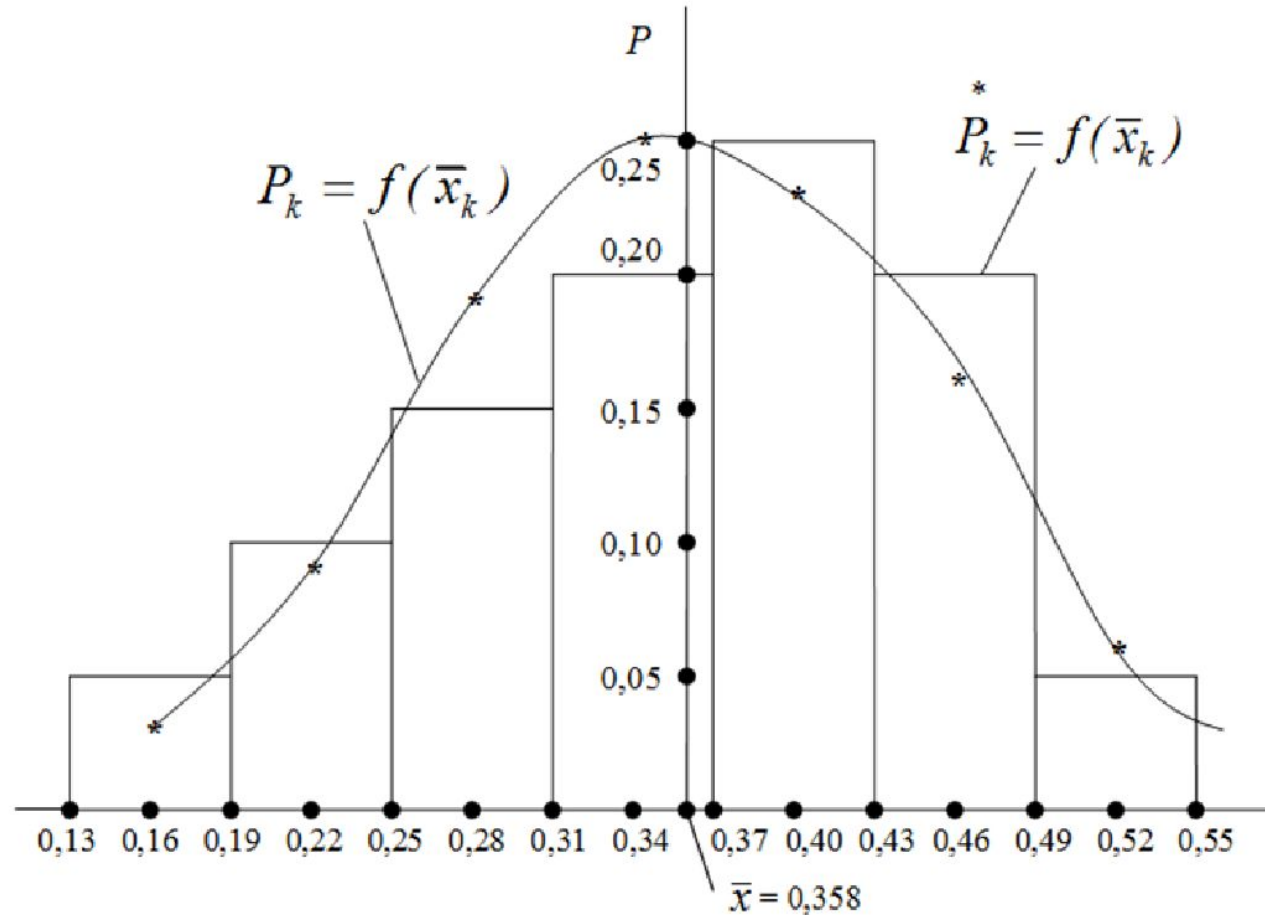
Номер интервала	Границы интервала $\alpha_k \dots \beta_k$	Абсолютная частота попадания в интервал $m_k$	Относительная частота попадания в интервал $P_k^*$	Срединное значение $\bar{x}_k$	$\bar{x}_k \cdot P_k^*$	$(\bar{x}_k - \bar{x})^2 \cdot P_k^*$	Теоретическая частота $P_k$	$N \cdot P_k$	$\frac{(m_k - N \cdot P_k)^2}{N \cdot P_k}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,13...0,19	1	0,05	0,16	0,08	0,00196	0,03	0,6	0,2666
2	0,19...0,25	2	0,1	0,22	0,022	0,0019	0,09	1,8	0,0222
3	0,25...0,31	3	0,15	0,28	0,042	0,000915	0,18	3,6	0,1
4	0,31...0,37	4	0,2	0,34	0,068	0,000065	0,25	5	0,2
5	0,37...0,43	5	0,25	0,4	0,1	0,00044	0,23	4,6	0,0348
6	0,43...0,49	4	0,2	0,46	0,092	0,00208	0,16	3,2	0,2
7	0,49...0,55	1	0,05	0,52	0,026	0,00128	0,06	1,2	0,0333
		$\sum_{k=1}^K m_k = 20$	$\sum_{k=1}^K P_k^* = 1$	$\bar{x} = \sum_{k=1}^K \bar{x}_k \cdot P_k^* = 0,358$	$D(x) = \sum_{k=1}^K (\bar{x}_k - \bar{x})^2 \cdot P_k^* = 0,00863;$ $S_x = \sqrt{D(x)} = 0,093$	$\sum_{k=1}^K P_k = 1$	$\sum_{k=1}^K NP_k = 20$	$\chi^2 = 0,857$	

# Статистическая обработка результатов эксперимента

## Расчет теоретической вероятности попадания в интервалы

Номер интервала	$Z_\beta = \frac{(\beta_k - \bar{x})}{\sqrt{D(x)}}$	$Z_\alpha = \frac{(\alpha_k - \bar{x})}{\sqrt{D(x)}}$	$\Phi^*(Z_\beta)$	$\Phi^*(Z_\alpha)$	$P_k = \Phi^*(Z_\beta) - \Phi^*(Z_\alpha)$
1	-1,806	-2,452	-0,47	-0,50	0,03
2	-1,161	-1,806	-0,38	-0,47	0,09
3	-0,516	-1,161	-0,20	-0,38	0,18
4	0,129	-0,516	0,06	-0,19	0,25
5	0,774	0,129	0,28	0,05	0,23
6	1,429	0,774	0,43	0,27	0,16
7	2,265	1,429	0,49	0,43	0,06

# Статистическая обработка результатов эксперимента



Гистограмма с нанесенным на нее графиком  $P_k = f(\bar{x}_k)$

# Статистическая обработка результатов эксперимента

Доверительные границы:

- для математического ожидания генеральной совокупности

$$P = 0,98; v = K - 1 = 7 - 1 = 6; \alpha = \frac{1 - P}{2} = \frac{1 - 0,98}{2} = 0,01;$$

по таблице распределения Стьюдента  $t_{v,\alpha} = 3,71$ ,

следовательно,  $a = \bar{x} - \frac{t_{v,\alpha} \cdot S_x^*}{\sqrt{N}} = 0,358 - \frac{3,71 \cdot 0,093}{\sqrt{20}} = 0,281;$

$$b = \bar{x} + \frac{t_{v,\alpha} \cdot S_x^*}{\sqrt{N}} = 0,358 + \frac{3,71 \cdot 0,093}{\sqrt{20}} = 0,435;$$

таким образом,  $0,281 \leq M(x) \leq 0,435$ .

# Статистическая обработка результатов эксперимента

Доверительные границы:

- для дисперсии генеральной совокупности

$$P = 0,98; \nu = K - 1 = 7 - 1 = 6; \alpha_1 = \frac{1-P}{2} = \frac{1-0,98}{2} = 0,01;$$

$$\alpha_2 = \frac{1+P}{2} = \frac{1+0,98}{2} = 0,99; \text{ по таблице 2.3 } \chi_{\nu, \alpha_1}^2 = 16,812; \chi_{\nu, \alpha_2}^2 = 0,872,$$

следовательно,  $c = \frac{\nu \cdot S_x^2}{\chi_{\nu, \alpha_1}^2} = \frac{6 \cdot 0,00867}{16,812} = 0,00309;$

$$d = \frac{\nu \cdot S_x^2}{\chi_{\nu, \alpha_2}^2} = \frac{6 \cdot 0,00867}{0,872} = 0,05966; \text{ таким образом, } 0,00309 \leq S_x^2 \leq 0,05966.$$

# Статистическая обработка результатов эксперимента

Номер интервала	Границы интервала $\alpha_k \dots \beta_k$	Абсолютная частота попадания в интервал $m_k$	Относительная частота попадания в интервал $P_k$	Среднее значение $\bar{x}_k$	$\bar{x}_k \cdot P_k$	$(\bar{x}_k - \bar{x})^2 \cdot P_k$	Теоретическая частота $P_k$	$N \cdot P_k$	$\frac{(m_k - N \cdot P_k)^2}{N \cdot P_k}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,13...0,19	1	0,05	0,16	0,08	0,00196	0,03	0,6	0,2666
2	0,19...0,25	2	0,1	0,22	0,022	0,0019	0,09	1,8	0,0222
3	0,25...0,31	3	0,15	0,28	0,042	0,000915	0,18	3,6	0,1
4	0,31...0,37	4	0,2	0,34	0,068	0,000065	0,25	5	0,2
5	0,37...0,43	5	0,25	0,4	0,1	0,00044	0,23	4,6	0,0348
6	0,43...0,49	4	0,2	0,46	0,092	0,00208	0,16	3,2	0,2
7	0,49...0,55	1	0,05	0,52	0,026	0,00128	0,06	1,2	0,0333
		$\sum_{k=1}^K m_k = 20$	$\sum_{k=1}^K P_k = 1$	$\bar{x} = \sum_{k=1}^K \bar{x}_k \cdot P_k = 0,358$	$\overset{*}{D}(x) = \sum_{k=1}^K (\bar{x}_k - \bar{x})^2 \cdot P_k = 0,00863;$ $\overset{*}{S}_x = \sqrt{\overset{*}{D}(x)} = 0,093$	$\sum_{k=1}^K P_k = 1$	$\sum_{k=1}^K NP_k = 20$	$\chi^2 = 0,857$	

По результатам расчета критерия Пирсона получено, что  $\chi^2 = 0,857$  и  $\nu = K - 3 = 7 - 3 = 4$ . По таблице критерия Пирсона  $\alpha = 0,925$ , то есть с вероятностью 92,5% закон распределения скоростной погрешности асинхронного тахогенератора является нормальным.



# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

**Ошибки измерений** – это разность между измеренным и истинным значением измеренной величины, при этом измеряемое значение точно **не** известно. Поэтому речь ведут об оценке ошибок.

**По происхождению** ошибки измерений делятся на 3 группы :

- систематические
- случайные
- грубые (промахи)

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

**Систематическая ошибка** измерения – это ошибка, величина и знак которой остаются неизменными от опыта к опыту.

По характеру и методам определения систематические ошибки делятся на 3 группы:

- 1) Обусловленные методикой эксперимента. Их можно вычислить теоретически в виде поправки. Например, при определении ЭДС источника с помощью вольтметра, последнее слагаемое я

$$E = U_v + \frac{r}{r_v} U_v$$

правкой

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Систематические ошибки измерений:

2) Незамеченные ошибки (ошибки экспериментатора) – обусловлены неточными значениями физических постоянных или новыми неизвестными ранее свойствами физического процесса.

3) Систематическая ошибка, для которой известно среднеквадратичное отклонение или предельное значение этих ошибок . Связаны с погрешностями измерительных приборов (принцип действия , чувствительность).

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

## Оценка погрешностей при косвенных измерениях физических величин

С помощью двух измеренных (или более) определяется третья .

$x, y$  – измеряются

$$z = ax + by + c$$

$z$  – определяется через  $x, y$ , например

Известны СКО для  $x$  и  $y$ ,  $S(x)$  и  $S(y)$ . Они определяются с помощью опыта или по классу прибора.  $S(c)=0$ .

Определим СКО для  $S(z) = aS(x) + bS(y)$

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Дисперсия величины  $z$ :

$$D(z) = S^2(z) = a^2 S^2(x) + b^2 S^2(y) + 2abK_{xy}$$

$K_{xy}$  - коэффициент корреляции двух величин (т.е. взаимное влияние)

$$K_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i,j} \left[ (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \right];$$

$n$  – количество одновременно измеренных  $x$  и  $y$

$i$  – номер измерения  $x$ ;

$j$  – номер измерения  $y$ ;

$\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  - среднее значение величин  $x$  и  $y$  за все измерения;

$K_{xy} = 0$  - взаимного влияния между  $x$  и  $y$  нет.

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Иногда под коэффициентом корреляции понимают величину

$$\rho = \frac{K_{xy}}{S(x)S(y)};$$

$\rho = 0$  - взаимного влияния нет;

$\rho > 0$  - при увеличении среднеквадратичного отклонения  $S(x)$ , возрастает СКО величины  $y$   $S(y)$ ;

$\rho < 0$  - при увеличении СКО величины  $x$ , СКО величины  $y$  уменьшается.

Этот способ оценки погрешности косвенного измерения величины  $z$ , возможен только тогда, когда известен коэффициент корреляции. Как правило  $K_{xy}$  - неизвестен.

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Другой способ оценки погрешностей косвенных измерений – **через поле допуска на каждую величину**

Допустим, что  $y$  – косвенно измеренная величина;

$x_1, x_2, x_3$  - измерены напрямую;

Известна зависимость  $y=f(x_1, x_2, x_3)$ .

Предположим, что вероятность появившихся значений  $x$  подчиняется нормальному закону.

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Измеренную величину  $y$  разложим в ряд Тейлора:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3} \Delta x_3 + \dots$$

$\Delta x, \Delta y$  - приращение измеренных величин и функций.

Этот закон можно записать:

$$S^2(y) = \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 S^2(x_1) + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 S^2(x_2) + \left( \frac{\partial y}{\partial x_3} \right)^2 S^2(x_3) + \dots$$

Дисперсия величины  $S^2(x)$  определяется через класс точности измеряемого прибора.



# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

$\delta$  - поля допуска

Класс точности прибора  $\frac{\delta(x)}{\bar{x}} \cdot 100\%$ .

Иногда под классом точности подразумевают поле допуска на предельную измеренную величину (наибольшая погрешность);

0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0;

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Погрешность для измерения величины  $y$ :

$$\delta^2(y) = k_{x_1}^2 \delta^2(x_1) + k_{x_2}^2 \delta^2(x_2) + k_{x_3}^2 \delta^2(x_3) + \dots$$

$k_{x_2}$  - коэффициент влияния;

$$k_{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}}$$

Вместо  $\bar{x}_2, \bar{y}$  - подставляются обозначения данных величин;

$$\delta^2(y) = \sum_i k_{x_i}^2 \delta^2(x_i)$$

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

## Пример косвенного измерения:

измерение  $\cos \varphi$  с помощью амперметра, вольтметра и ваттметра и определения погрешности данного измерения.

$$\cos(\varphi) = f(P, U, I) = \frac{P}{UI}$$

На каждый прибор известно  $\delta_I = 0,5\%$ ,  $\delta_U = 0,5\%$ ,  $\delta_P = 0,5\%$  от предела.

$$K_I = \frac{\partial f}{\partial I} \cdot \frac{I}{\cos(\varphi)} = -\frac{P}{UI^2} \cdot \frac{I}{\cos(\varphi)} = -1$$

$$K_U = \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{U}{\cos(\varphi)} = -\frac{P}{IU^2} \cdot \frac{U}{\cos(\varphi)} = -1$$

$$K_P = \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{1}{UI} \cdot \frac{P}{\cos(\varphi)} = 1$$

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

## Погрешность измерения коэффициента мощности

$$\delta^2(y) = \sum_i k_{xi}^2 \delta^2(x_i)$$

$$\delta^2(C \cos \varphi) = (-1)^2 \cdot \delta_I^2 + (-1)^2 \delta_U^2 + (1)^2 \delta_P^2 = 3 \cdot 0,5^2$$

$$\delta(C \cos \varphi) = \sqrt{3 \cdot 0,5^2} = 0,87$$

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

## Случайные ошибки

Природа случайных ошибок:

- измеряемая нами величина является случайной
- неточности в измерительных системах не связанные с классом точности прибора.

Для оценки случайной ошибки используют методы теории вероятности и математической статистики.

Мера точности для оценки случайной ошибки  $h = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot S}$

$S$  - среднеквадратичное отклонение измеренной величины, вызванное случайными ошибками (без учета класса точности прибора)

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

## **Грубые ошибки и способы их исключения.**

**Грубая ошибка (промах)** – появление такого значения случайной величины вероятность которого крайне мала.

Причины – неправильный отсчет показаний;

– сбои, помехи, наводки в электронике

Грубые ошибки следует исключать из статистики измерений.

Оценка измеренного значения на грубую ошибку производится с помощью кв.  $\xi$  тили Стьюдента

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

**Первый способ** исключения грубой ошибки измерения – измерить ряд величин  $x_i$ ; среди них есть  $x_{\min}$  или  $x_{\max}$ , которые сильно отличаются от остальных (подозреваемые на промах).

$\bar{x}$  - среднее значение измеренной величины определяется с учетом **подозреваемых** на промах;

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ; N - \text{количество измеренных значений.}$$

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Среднеквадратичное отклонение определяется также с учетом подозреваемых на промах:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}$$

Рассчитывается величина

$$v = \frac{|x_{\max} - \bar{x}|}{S} \quad \text{или} \quad \frac{|x_{\min} - \bar{x}|}{S}$$



# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Квантиль Стьюдента  $\xi$  определяется по таблице.

$\alpha$	0,01	0,02	...
N			
1	$\xi$	...	...
....	....	....	...

N – число измерений;

$\alpha$  - уровень значимости,  $\alpha = 1 - p$  ;

$p=0,9 \dots 0,99$  – доверительная вероятность.

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Если  $U < \xi$ ,  $x_{\max}$  или  $x_{\min}$  - оставляют как достоверное;

если  $U > \xi$ ,  $x_{\max}$  или  $x_{\min}$  - отбрасывают.

После отбрасывания  $x_{\max}$  или  $x_{\min}$  - подозреваемых на промах,

необходимо пересчитать  $\bar{x}$  среднее значение и  $S$  (СКО);

Если величин, подозреваемых на промах несколько, проверяется каждое из них.

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

**Второй способ** исключения грубых ошибок измерений (правило):

Если  $N \leq 6$ , нельзя отбрасывать ни одного из измеренных значений.

Если измерений  $N > 6$ , рассчитываются  $\bar{x}$  и  $S$  без учета подозреваемых на промах.

Рассчитывается величина

$$v = \frac{|x_{\max} - \bar{x}|}{S} \quad \text{или} \quad \frac{|x_{\min} - \bar{x}|}{S}$$

---

# Оценка погрешностей измерений и расхождения опытных и теоретических величин

Определяют  $\nu$  для каждого подозреваемого и

- если  $\nu > 4$  при числе измерений  $6 \leq N \leq 100$ ,
- если  $\nu > 4,5$  при  $100 < N < 1000$ ,
- если  $\nu > 5$  при  $N > 1000$ ,

то отбрасывают подозреваемое на промах.

Тогда стоит пересчитать  $S$  и  $\bar{x}$ , если значения (подозреваемые) не были отброшены.

Если исследуется малоизвестное физическое явление, то необходимо выяснить причины больших отклонений измеряемых величин.