Динамика

- Лекция 1. Введение в динамику. Законы и аксиомы динамики материальной точки. Основное уравнение динамики. Дифференциальные и естественные уравнения движения. Две основные задачи динамики. Примеры решения прямой задачи динамики
- Лекция 2. Решение обратной задачи динамики. Общие указания к решению обратной задачи динамики. Примеры решения обратной задачи динамики. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха.
- Лекция 3. Прямолинейные колебания материальной точки. Условие возникновения колебаний. Классификация колебаний. Свободные колебания без учета сил сопротивления. Затухающие колебания. Декремент колебаний.
- Лекция 4. Вынужденные колебания материальной точки. Резонанс. Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.
- Лекция 5. Относительное движение материальной точки. Силы инерции. Частные случаи движения для различных видов переносного движения. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел.
- Лекция 6. Динамика механической системы. Механическая система. Внешние и внутренние силы. Центр масс системы. Теорема о движении центра масс. Законы сохранения. Пример решения задачи на использование теоремы о движении центра масс.
- Лекция 7. Импульс силы. Количество движения. Теорема об изменении количества движения. Законы сохранения. Теорема Эйлера. Пример решения задачи на использование теоремы об изменении количества движения. Момент количества движения. Теорема об изменении момента количества движения..
- Лекция 8. Законы сохранения. Элементы теории моментов инерции. Кинетический момент твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела. Пример решения задачи на использование теоремы об изменении момента количества движения системы. Элементарная теория гироскопа.

Динамика

Динамика материальной точки

Динамика механической системы

Аналитическая механика

- **Динамика** – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение с самой общей точки зрения. Движение рассматривается в связи с действующими на объект силами.

Раздел состоит из трех отделов:

- **Динамика точки** – изучает движение материальной точки с учетом сил, вызывающих это движение.

Основной объект - материальная точка – материальное тело, обладающей массой, размерами которого можно пренебречь.

- **Динамика механической системы** – изучает движение совокупности материальных точек и твердых тел, объединяемых общими законами взаимодействия, с учетом сил, вызывающих это движение.
- **Аналитическая механика** – изучает движение несвободных механических систем с использованием общих аналитических методов.

Основные допущения:

– существует **абсолютное пространство** (обладает чисто геометрическими свойствами, не зависящими от материи и ее движения .
– существует **абсолютное время** (не зависит от материи и ее движения).
Отсюда вытекает:
– **существует абсолютно неподвижная система отсчета**.
– **время не зависит от движения системы отсчета**.
– **массы движущихся точек не зависят от движения системы отсчета.**

Эти допущения используются в классической механике, созданной Галилеем и Ньютоном. Она имеет до сих пор достаточно широкую область применения, поскольку рассматриваемые в прикладных науках механические системы не обладают такими большими массами и скоростями движения, для которых необходим учет их влияния на геометрию пространства, время, движение, как это делается в релятивистской механике (теории относительности).

- **Основные законы динамики** – впервые открытые Галилеем и сформулированные Ньютоном составляют основу всех методов описания и анализа движения механических систем и их динамического взаимодействия под действием различных сил.
- **Закон инерции (закон Галилея-Ньютона)** – **Изолированная материальная точка тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, приложенные силы не заставят ее изменить это состояние**. Отсюда следует эквивалентность состояния покоя и движения по инерции (закон относительности Галилея). Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется **инерциальной**. Свойство материальной точки стремиться сохранить неизменной скорость своего движения (свое кинематическое состояние) называется **инертностью**.
- **Закон пропорциональности силы и ускорения (Основное уравнение динамики - II закон Ньютона)** – **Ускорение, сообщаемое материальной точке силой, прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе этой точки**:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{1}{m}\bar{F}}$$

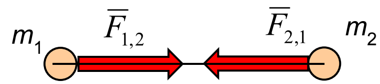
или

$$\boxed{m\bar{a} = \bar{F}.}$$

Здесь *m* – масса точки (мера инертности), измеряется в кг,
численно равна весу, деленному на ускорение свободного падения: $m = \frac{G}{g}.$

F – действующая сила, измеряется в Н (1 Н сообщает точке массой 1 кг ускорение 1 м/с^2, 1 Н = 1/9.81 кг-с).

■ **Закон равенства действия и противодействия (III закон Ньютона)** – **Всякому действию соответствует равное по величине и противоположно направленное противодействие:** $\boxed{\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}}$



Закон справедлив для любого кинематического состояния тел. Силы взаимодействия, будучи приложенные к разным точкам (телам) не уравновешиваются.

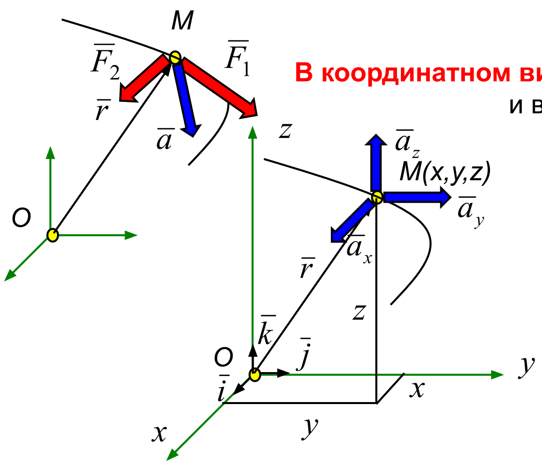
■ **Закон независимости действия сил** – **Ускорение материальной точки под действием нескольких сил равно геометрической сумме ускорений точки от действия каждой из сил в отдельности:** $\boxed{\bar{a}(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ...) = \bar{a}_1(\bar{F}_1) + \bar{a}_2(\bar{F}_2) + ...}$ или $\boxed{\bar{a}(\bar{R}) = \bar{a}_1(\bar{F}_1) + \bar{a}_2(\bar{F}_2) + ...}$

■ **Основное уравнение динамики** : $\boxed{m\bar{a} = \sum \bar{F}_i .}$ - соответствует **векторному** способу задания движения точки.

■ **Дифференциальные уравнения движения материальной точки:**

Подставим ускорение точки при векторном задании движения $\boxed{\bar{a} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}.}$ в основное уравнение динамики: $\boxed{m\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_i \quad (1).}$

- дифференциальное уравнение движения точки в векторном виде.



В координатном виде: Используем связь радиуса-вектора с координатами и вектора силы с проекциями:

$\boxed{\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}}$ $\boxed{F_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}}$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \sum(X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}).$$

После группировки векторное соотношение распадается на три скалярных уравнения:

$$(x): m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_i;$$

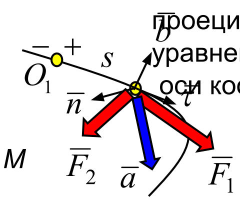
$$(y): m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y_i;$$

$$(z): m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z_i.$$

или: $\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i; \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i; \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned}}$ **- дифференциальные уравнения движения точки в координатном виде.**

Этот результат может быть получен формальным проецированием векторного дифференциального уравнения (1).

■ **Естественные уравнения движения материальной точки** – получаются проецированием векторного дифференциального уравнения движения на естественные (подвижные) оси координат:



$$(\tau): ma_{\tau\tau} = \sum F_{i\tau};$$

$$(n): ma_n = \sum F_{in};$$

$$(b): m \cdot 0 = \sum F_{ib}.$$

или: $\boxed{\begin{aligned} m\ddot{s} &= \sum F_{i\tau}; \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum F_{in}. \end{aligned}}$ **- естественные уравнения движения точки.**

- **Две основные задачи динамики:**

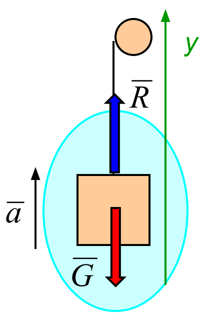
1. Прямая задача: Задано движение (уравнения движения, траектория). Требуется определить силы, под действием которых происходит заданное движение.

2. Обратная задача: Заданы силы, под действием которых происходит движение. Требуется найти параметры движения (уравнения движения, траекторию движения).

Обе задачи решаются с помощью **основного уравнения динамики** и проекции его на координатные оси. Если рассматривается движение несвободной точки, то как и в статике, используется **принцип освобождаемости от связей**. В результате реакции связей включаются в состав сил, действующих на материальную точку. Решение первой задачи связано с операциями дифференцирования. Решение обратной задачи требует интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений и это значительно сложнее, чем дифференцирование. Обратная задача сложнее прямой задачи.

- **Решение прямой задачи динамики** - рассмотрим на примерах:

Пример 1. Кабина весом ***G*** лифта поднимается тросом с ускорением ***a*** . Определить натяжение троса.



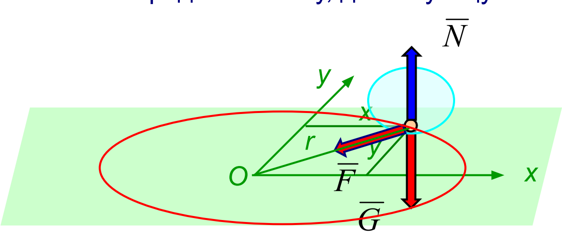
1. Выбираем объект (кабина лифта движется поступательно и ее можно рассматривать как материальную точку).
2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***.
3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *y*: $(y):\ ma_y = R - G.$

Определяем реакцию троса: $R = G + ma_y = G + \dfrac{G}{g}a_y = G(1 + \dfrac{a_y}{g}).$

Определяем натяжение троса: $\bar{T} = -\bar{R};\ \ T = R = G(1 + \dfrac{a_y}{g}).$

При равномерном движении кабины $a_y = 0$ и натяжение троса равно весу: *T* = *G*.
При обрыве троса *T* = 0 и ускорение кабины равно ускорению свободного падения: $a_y = -g$.

Пример 2. Точка массой *m* движется по горизонтальной поверхности (плоскости Oxy) согласно уравнениям: $x = a\cdot\cos kt$, $y = b\cdot\cos kt$. Определить силу, действующую на точку.



Таким образом, величина силы пропорциональна расстоянию точки до центра координат и направлена к центру по линии, соединяющей точку с центром.
Траектория движения точки представляет собой эллипс с центром в начале координат:

$$x^2 = a^2\cos^2 kt;\qquad y^2 = b^2\sin^2 kt. \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$(y):\ m\ddot{y} = F_y.$

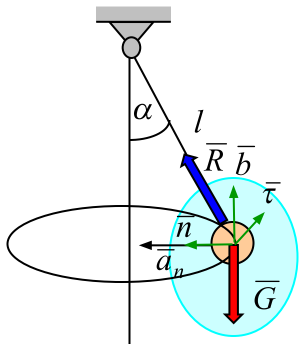
Определяем проекции силы:

$F_x = m\ddot{x} = -mak^2\cos kt = -mk^2 x;$

$F_y = m\ddot{y} = -mak^2\sin kt = -mk^2 y.$

Модуль силы: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r.$

Направляющие косинусы: $\cos(\bar{F}, x.) = \dfrac{F_x}{F} = -\dfrac{x}{r};\ \cos(\bar{F}, y.) = \dfrac{F_y}{F} = -\dfrac{y}{r}.$



Пример 3: Груз весом ***G*** подвешен на тросе длиной *l* и движется по круговой траектории в горизонтальной плоскости с некоторой скоростью. Угол отклонения троса от вертикали равен α. Определить натяжение троса и скорость груза.

1. Выбираем объект (груз).

2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***.

3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$

4. Проецируем основное уравнение динамики на оси τ,*n*, *b*:

$$(\tau): \quad ma_\tau = 0;$$

$$(n): \quad ma_n = R\sin\alpha;$$

$$(b): \quad 0 = R\cos\alpha - G.$$

Из третьего уравнения определяем реакцию троса: $R = \dfrac{G}{\cos\alpha}.$

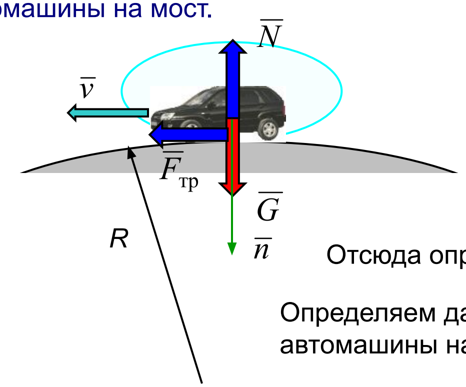
Определяем натяжение троса: $\bar{T} = -\bar{R}; \quad T = R = \dfrac{G}{\cos\alpha}.$

Подставляем значение реакции троса, нормального ускорения во второе уравнение и определяем скорость груза:

$$\frac{G}{g}\frac{v^2}{l\sin\alpha} = \frac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha.$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.}$$

Пример 4: *Автомашина весом G движется по выпуклому мосту (радиус кривизны равен R) со скоростью V*. Определить давление автомашины на мост.



1. Выбираем объект (автомашина, размерами пренебрегаем и рассматриваем как точку).

2. Отбрасываем связь (шероховатую поверхность) и заменяем реакциями ***N*** и силой трения ***F***$_{тр}$.

3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}.$

4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *n*: $(n): \quad ma_n = G - N.$

Отсюда определяем нормальную реакцию: $N = G - ma_n = G - m\dfrac{v^2}{R} = G(1 - \dfrac{v^2}{gR}).$

Определяем давление автомашины на мост: $\bar{Q} = -\bar{N}; \quad Q = G(1 - \dfrac{v^2}{gR}).$

Отсюда можно определить скорость, соответствующую нулевому давлению на мост (Q = 0): $v = \sqrt{gR}.$

- **Решение обратной задачи динамики** – В общем случае движения точки силы, действующие на точку, являются переменными, зависящими от времени, координат и скорости. Движение точки описывается системой трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\ddot{x} = \sum X_i; \quad m\ddot{y} = \sum Y_i; \quad m\ddot{z} = \sum Z_i.$$

После интегрирования каждого из них будет **шесть постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_6$:

$$\dot{x} = f_1(t, C_1, C_2, C_3); \quad \dot{y} = f_2(t, C_1, C_2, C_3); \quad \dot{z} = f_3(t, C_1, C_2, C_3).$$

$$x = f_4(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \quad y = f_5(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \quad z = f_6(t, C_1, C_2, \ldots, C_6).$$

Значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$ находятся из шести начальных условий при $t = 0$:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

После подстановки найденных значений постоянных получаем:

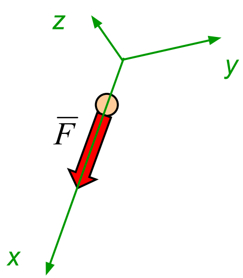
$$\dot{x} = f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad \dot{y} = f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad \dot{z} = f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

$$x = f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \quad y = f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \quad z = f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, **под действием одной и той же системы сил материальная точка может совершать целый класс движений, определяемых начальными условиями**.

Начальные координаты учитывают исходное положение точки. Начальная скорость, задаваемая проекциями, учитывает влияние на ее движение по рассматриваемому участку траектории сил, действовавших на точку до прихода на этот участок, т.е. начальное кинематическое состояние.

Пример 1 решения обратной задачи: Свободная материальная точка массы m движется по действием силы $\boldsymbol{F}$, **постоянной по модулю и величине.** . В начальный момент скорость точки составляла v_0 и совпадала по направлению с силой. Определить уравнение движение точки.



1. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const}.$

2. Выберем декартову систему отсчета, направляя ось x вдоль направления силы и спроецируем основное уравнение динамики на эту ось: $(x):\ ma_x = F_x = F.$ или $m\ddot{x} = F.$

3. Понижаем порядок производной: $m\dfrac{dv_x}{dt} = F.$

4. Разделяем переменные: $dv_x = \dfrac{F}{m}dt.$

5. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int dv_x = \int \dfrac{F}{m}dt.$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_x = \dfrac{F}{m}t + C_1.}$

6. Представим проекцию скорости как производную координаты по времени: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F}{m}t + C_1.$

7. Разделяем переменные: $dx = (\dfrac{F}{m}t + C_1)dt.$

8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int dx = \int (\dfrac{F}{m}t + C_1)dt.$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = \dfrac{F}{m}\dfrac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.}$

9. Для определения значений постоянных C1 и C2 используем начальные условия $t = 0$, $v_x = v_0$, $x = x_0$:

$$v_x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\cdot 0 + C_1 = v_0. \qquad x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\frac{0^2}{2} + C_1\cdot 0 + C_2 = x_0. \Rightarrow \boxed{C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0.}$$

В итоге получаем уравнение равнопеременного движения (по оси x): $\boxed{x = \dfrac{F}{m}\dfrac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.}$

Общие указания к решению прямой и обратной задачи. Порядок решения:

1. Составление дифференциального уравнения движения:

1.1. **Выбрать систему координат** – прямоугольную (неподвижную) при неизвестной траектории движения, естественную (подвижную) при известной траектории, например, окружность или прямая линия. В последнем случае можно использовать одну прямолинейную координату. Начало отсчета совместить с начальным положением точки (при *t* = 0) или с равновесным положением точки, если оно существует, например, при колебаниях точки.

1.2. **Изобразить точку** в положении, соответствующем произвольному моменту времени (при *t* > *0*) так, чтобы координаты были положительными (s > 0, x > 0). При этом считаем также, что проекция скорости в этом положении также положительна. В случае колебаний проекция скорости меняет знак, например, при возвращении к положению равновесия. Здесь следует принять, что в рассматриваемый момент времени точка удаляется от положения равновесия. Выполнение этой рекомендации важно в дальнейшем при работе с силами сопротивления, зависящими от скорости.

1.3. **Освободить материальную точку от связей**, **заменить** их действие реакциями, **добавить** активные силы.

1.4. **Записать основной закон динамики** в векторном виде, **спроецировать** на выбранные оси, **выразить** задаваемые или реактивные силы

через переменные время, координаты или скорости, если они от них зависят.

2. Решение дифференциальных уравнений:

2.1. **Понизить производную**, если уравнение не приводится к каноническому (стандартному) виду. например: $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$, или $\ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}$.

2.2. **Разделить переменные**, например: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}kv_x$, $\Rightarrow$ $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{m}kdt$ $\quad$ $\frac{dv_\tau}{dt} = g - \frac{k}{m}v_\tau^2$, $\Rightarrow$ $\frac{dv_\tau}{g - \frac{k}{m}v_\tau^2} = dt.$

2.3. Если в уравнении три переменных, то **сделать замену переменных**, например: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}cx$, $\Rightarrow$ $\frac{dv_x dx}{dt dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{1}{m}cx$ и затем разделить переменные.

2.4. **Вычислить неопределенные интегралы** в левой и правой частях уравнения, например: $\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{1}{m}kdt$ $\Rightarrow$ $\ln v_x = -\frac{1}{m}kt + C_1$

Используя начальные условия, например, *t* = 0, $v_x = v_{x0}$, **определить постоянную интегрирования**: $\ln v_x\big|_{v_{x0}} = -\frac{1}{m}kt\big|_0 + C_1; \quad C_1 = \ln v_{x0}.$

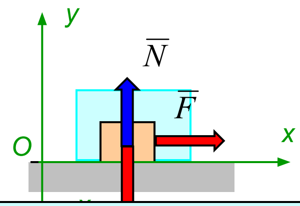
Замечание. Вместо вычисления неопределенных интегралов можно **вычислить определенные интегралы с переменным верхним пределом**. Нижние пределы представляют начальные значения переменных (начальные условия) .Тогда не требуется отдельного нахождения постоянной, которая автоматически включается в решение, например:

$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} \frac{dv_\tau}{v_\tau} = -\int_0^t \frac{1}{m}kdt. \Rightarrow \ln v_\tau\Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = -\frac{1}{m}kt\Big|_0^t; \Rightarrow \ln v_\tau - \ln v_{\tau 0} = -\frac{1}{m}kt - 0; \quad \ln v_\tau = -\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}.$$

2.5. **Выразить скорость** через производную координаты по времени, например, $v_\tau = \frac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}}$ и **повторить пункты 2.2 -2.4**

Замечание. Если уравнение приводится к каноническому виду, имеющему стандартное решение, то это готовое решение и используется. Постоянные интегрирования по прежнему находятся из начальных условий. См., например, колебания (лекция 4, стр.8).

Пример 2 решения обратной задачи: **Сила зависит от времени.** Груз весом ***P*** начинает двигаться по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы ***F***, величина которой пропорциональна времени (*F* = *kt*). Определить пройденное расстояние грузом за время *t*.



1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:

2. Принимаем объект движения за материальную точку (тело движется поступательно), освобождаем от связи (опорной плоскости) и заменяем реакцией (нормальной реакцией гладкой поверхности):

3. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}.$

4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *x* : $(x): \; ma_x = F$ или kt $\qquad \boxed{\ddot{x} = \frac{k}{m}t.}$

6. Разделяем переменные: $\frac{v_y dv_y}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}. \Rightarrow v_y dv_y = -\frac{gR^2}{y^2}dy.$

7. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int\limits_{v_{y0}}^{v_y} v_y dv_y = -\int\limits_R^y \frac{gR^2}{y^2}dy. \Rightarrow \left.\frac{v_y^2}{2}\right|_{v_{y0}}^{v_y} = -gR^2\left.\left(-\frac{1}{y}\right)\right|_R^y.$

8. Подставляем пределы: $\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_{y0}^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right).$

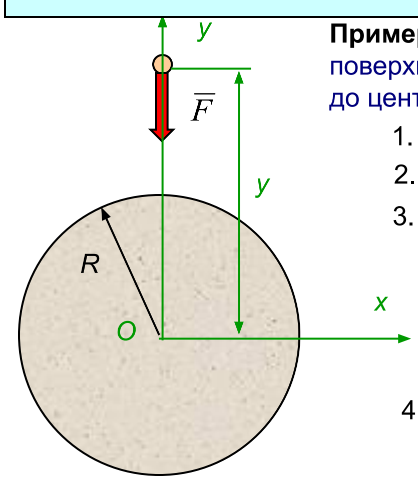
В итоге получаем выражение для скорости в функции от координаты *y* : $\boxed{v_y = \sqrt{v_{y0}^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)}.}$

Максимальную высоту полета можно найти приравнивая скорость нулю: $\frac{v_{y0}^2}{2gR^2} = -\left(\frac{1}{H_{max}} - \frac{1}{R}\right) \Rightarrow \frac{1}{H_{max}} = \frac{1}{R} - \frac{v_{y0}^2}{2gR^2} \Rightarrow \boxed{H_{max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_{y0}^2}.}$

Максимальная высота полета →∞ при обращении знаменателя в нуль: $\boxed{2gR = v_{y0}^2}$

Отсюда при постановке радиуса Земли и ускорения свободного падения получается II космическая скорость: $\boxed{v_{y0} = \sqrt{2gR} = 11.2 км/с}$

Пример 3 решения обратной задачи: **Сила зависит от координаты.** Материальная точка массой *m* брошена вверх с поверхности Земли со скоростью v_0. Сила притяжения Земли обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до центра тяготения (центра Земли). Определить зависимость скорости от расстояния *y* до центра Земли.



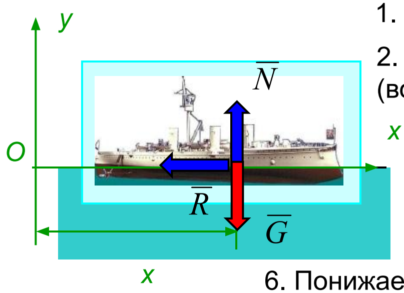
1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:
2. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}.$
3. Проецируем основное уравнение динамики на ось *y* : $(y): \; ma_y = -F$ или $\frac{k}{y^2} \qquad m\ddot{y} = -\frac{k}{y^2}.$

Коэффициент пропорциональности можно найти, используя вес точки на поверхности Земли: $F = P$ при $y = R.$

$\frac{k}{R^2} = mg. \Rightarrow k = mgR^2.$ Отсюда дифференциальное уравнение имеет вид: $m\ddot{y} = -\frac{mgR^2}{y^2}$ или $\boxed{\ddot{y} = -\frac{gR^2}{y^2}.}$

4. Понижаем порядок производной: $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{gR^2}{y^2}.$ 5. Делаем замену переменной: $\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y dy}{dy dt} = \frac{v_y dv_y}{dy}.$

Пример 2 решения обратной задачи: **Сила зависит от скорости**. Судно массы *m* имело скорость *v*0. Сопротивление воды движению судна пропорционально скорости. Определить время, за которое скорость судна упадет вдвое после выключения двигателя, а также пройденное расстояние судном до полной остановки.



1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:

2. Принимаем объект движения за материальную точку (судно движется поступательно), освобождаем от связей (воды) и заменяем реакцией (выталкивающей силой – силой Архимеда), а также силой сопротивления движению.

3. Добавляем активную силу (силу тяжести).

4. Составляем основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N}.$

5. Проецируем основное уравнение динамики на ось *x* : $(x): \; ma_x = -R$ или $-\mu v_x$ $\qquad \boxed{\ddot{x} = -\frac{\mu}{m} v_x.}$

6. Понижаем порядок производной: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{m} v_x.$

7. Разделяем переменные: $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\mu}{m} dt.$

8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения: $\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{\mu}{m} dt.$ $\Rightarrow$ $\ln v_x \Big|_{v_{x0}}^{v_x} = -\frac{\mu}{m} t \Big|_0^t.$

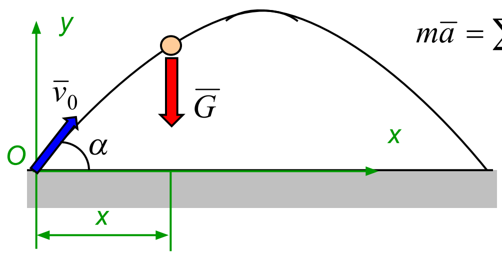
9. Подставляем пределы: $\ln v_x - \ln v_{x0} = -\frac{\mu}{m} t.$

Исключив время из уравнений движения получаем уравнение траектории: $\boxed{y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.}$

Время полета определяем приравниванием координаты *y* нулю: $y = v_0 \sin\alpha \cdot T - \frac{gT^2}{2} = 0;$ $\boxed{T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$

Дальность полета определяем подстановкой времени полета: $\boxed{x = v_0 \cos\alpha \cdot T = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L;}$

■ **Движение точки, брошенной под углом к горизонту, в однородном поле силы тяжести без учета сопротивления воздуха**



$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G}.$ $\Rightarrow$ $(x): \; m\ddot{x} = 0;$ $(y): \; m\ddot{y} = -G = -mg;$ $\Rightarrow$ $\frac{dv_x}{dt} = 0;$ $\frac{dv_y}{dt} = -g;$ $\Rightarrow$ $dv_x = 0;$ $dv_y = -gdt;$

$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = 0;$ $\int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = -\int_0^t gdt;$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_x = v_{x0} = v_0 \cos\alpha;}$ $\boxed{v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin\alpha - gt;}$

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha;$ $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt;$ $\Rightarrow \Rightarrow$ $\boxed{x = v_0 \cos\alpha \cdot t;}$ $\boxed{y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2};}$