Лекция 15

Законы распределения случайных величин. Система случайных величин. Функции случайных величин

План лекции:

1. Дискретные и непрерывные случайные величины
2. Числовые характеристики дискретных случайных величин
3. Биномиальный закон распределения
4. Закон распределения Пуассона
5. Функция распределения дискретной случайной величины
6. Законы распределения непрерывных случайных величин.

1. Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайной величиной называется переменная, которая в результате испытания принимает то или иное числовое значение.

Случайная величина называется ***дискретной***, если число ее возможных значений конечно или счетно.

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая в результате испытания принимает все значения из некоторого числового промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Законом распределения дискретной случайной величины называется такая таблица, в которой перечислены все возможные значения этой случайной величины (без повторений) с соответствующими им вероятностями.

В общем виде закон распределения для случайной величины, например, X :

X :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_i	p_2	p_2	$\cdots$	p_k

где $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,2,\ldots,k$.

$\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.}$ *основное свойство закона распределения*

2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Дисперсия дискретной случайной величины

Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Пусть закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид

X :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_i	p_2	p_2	$\cdots$	p_k

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число M(X), вычисляемое по формуле

$$\boxed{M(X)=\sum_{i=1}^{k}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_kp_k.}$$

Пусть закон распределения случайной величины X тот же, что и выше

Дисперсией дискретной случайной величины X называется число Д(X) определяемое равенством

$$D(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-M(X))^2 p_i=(x_1-M(X))^2 p_1+(x_2-M(X))^2 p_2+\ldots$$

$$+(x_k-M(X))^2 p_k .$$

Число Д(X) является мерой разброса значений случайной величины X около ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

$\sqrt{D(X)}$ называется ***средним квадратическим отклонением*** случайной величины X и обычно обозначается через σ.

x_i	-2	-1	1	3	5	6
p_i	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=-2\cdot 0,2-1\cdot 0,1+1\cdot 0,3+3\cdot 0,1+5\cdot 0,2+6\cdot 0,1=$$

$$=-0,4-0,1+0,3+0,3+1+0,6=1,7;$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{6}x_i{}^2 p_i=(-2)^2\cdot 0,2+(-1)^2\cdot 0,1+1\cdot 0,3+3^2\cdot 0,1+5^2\cdot 0,2+6^2\cdot 0,1=$$

$$=0,8+0,1+0,3+0,9+5+3,6=10,7;$$

$$D(X)=10,7-(1,7)^2=10,7-2,89=7,81;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7,81}\approx 2,79.$$

x_i	1	2	3	4
p_i	0,8	0,16	0,032	0,008

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=1\cdot 0,8+2\cdot 0,16+3\cdot 0,032+4\cdot 0,008=$$

$$=0,8+0,32+0,096+0,032=1,248;$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2p_i=1\cdot 0,8+4\cdot 0,16+9\cdot 0,032+16\cdot 0,008=$$

$$=0,8+0,64+0,288+0,128=1,856;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=1,856-(1,248)^2=0,298296.$$

Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, определяемой как количество студентов в наугад выбранной группе, используя следующие данные:

X	8	9	10	11	12
P	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

$$M(X) = 8 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}9 + 3 + 2{,}2 + 2{,}4 = 10{,}1;$$

$$D(X) = 8^2 \cdot 0{,}2 + 9^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}3 +$$

$$+ 11^2 \cdot 0{,}2 + 12^2 \cdot 0{,}2 - (10{,}1)^2 =$$

$$= 103{,}9 - 102{,}01 = 1{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1{,}89} = 1{,}37.$$

- Наряду со средними величинами в качестве статистических характеристик вариационных рядов распределения рассчитываются структурные средние – **мода** и **медиана**.
- **Мода** (Мо) представляет собой значение изучаемого признака, повторяющееся с наибольшей частотой, т.е. мода – значение признака, встречающееся чаще всего.
- **Медианой** (Ме) называется значение признака, приходящееся на середину ранжированной (упорядоченной) совокупности, т.е. медиана – центральное значение вариационного ряда.

Пример 1: найти медиану ряда $5, 17, 3, 9, 14, 2$.

Решение: записываем все числа ряда в порядке возрастания: $2, 3, \boxed{5, 9,} 14, 17$. Количество чисел в ряду чётно, поэтому медиана этого ряда будет равна полусумме двух средних чисел: $\frac{5+9}{2} = 7$.

Пример 2: найти медиану ряда $5, 2, 18, 8, 3$.

Решение: записываем все числа ряда в порядке возрастания: $2, 3, \boxed{5,} 8, 18$. Количество чисел в ряду нечётно, поэтому медиана этого ряда будет равна стоящему посередине числу, то есть равна 5.

3. Биномиальный закон распределения

Случайная величина X имеет **биномиальный закон распределения** с параметрами n и p, если ее закон распределения имеет вид:

X:

x_i	0	1	2	...	n
p_i	$P_{0,n}$	$P_{1,n}$	$P_{2,n}$	...	$P_{n,n}$

,

где вероятности $P_{m,n}$ *вычисляются по формуле Бернулли:*

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

n *– положительное целое число,* $m = 0,1,2,\ldots,n$, $0 < p < 1$.

4. Закон распределения Пуассона

В пределе при $n \to \infty$ и $\lambda = np = const$ биномиальное распределение переходит в так называемое распределение Пуассона.

Определение. Говорят, что случайная величина X имеет **распределение Пуассона** с параметром λ, если ее закон распределения имеет вид:

X:

x_i	0	1	2	…
p_i	P_0	P_1	P_2	…

,

где $P_m = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$,

$m = 0, 1, 2, \ldots$, λ *– положительное число.*

5. Функция распределения дискретной случайной величины

Определение. ***Функцией распределения*** *случайной величины X называется такая функция $F(x)$, значение которой в точке x численно равно вероятности того, что в произвольном испытании значение случайной величины X окажется меньше чем x, т.е.*

$$\boxed{F(x) = P(X < x).}$$

Данное определение задает функцию распределения не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин.

Функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < x_1, \\ p_1, & при\ x_1 \le x < x_2, \\ p_1 + p_2, & при\ x_2 \le x < x_3, \\ \dots, & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}, & при\ x_{n-1} \le x < x_n, \\ 1, & при\ x \ge x_n. \end{cases}$$

У дискретной случайной величины функция распределения ступенчатая.

Например, для случайного числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости, распределение, функция распределения и график функции распределения имеют вид:

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} -\infty < x < 1, \\ \frac{1}{6}, & \text{при } 1 \le x < 2, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & \text{при } 2 \le x < 3, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & \text{при } 3 \le x < 4, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & \text{при } 4 \le x < 5, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & \text{при } 5 \le x < 6, \\ 1, & \text{при } x \ge 6 \end{cases}$$