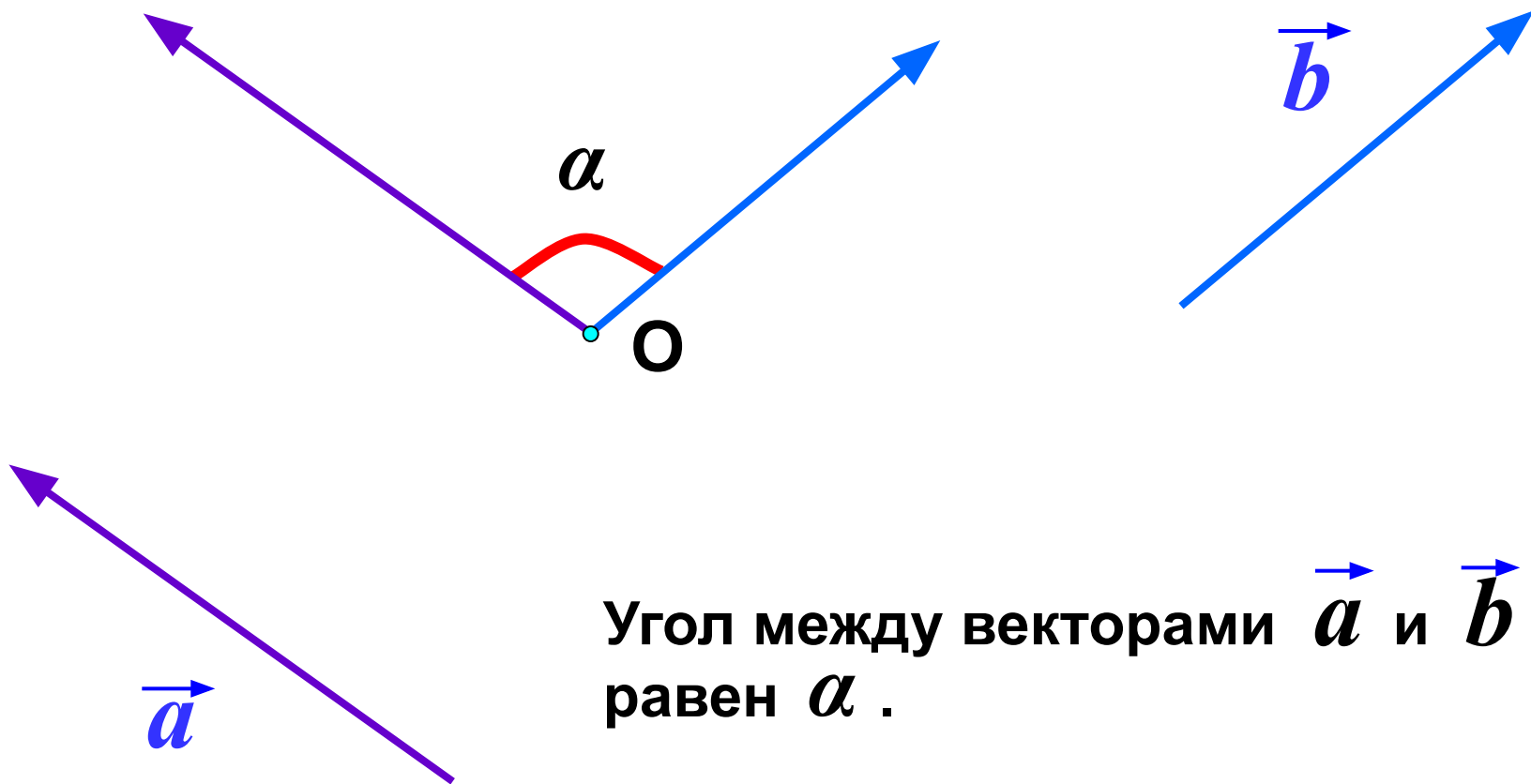


Скалярное произведение векторов

Угол между векторами



Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$
равен α .

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$$

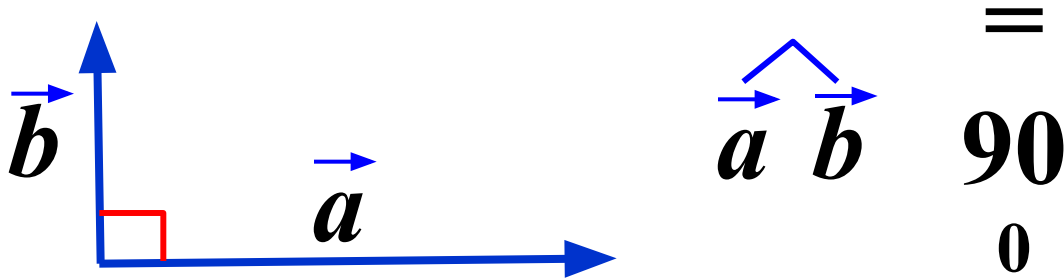
Определение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Частный случай №1

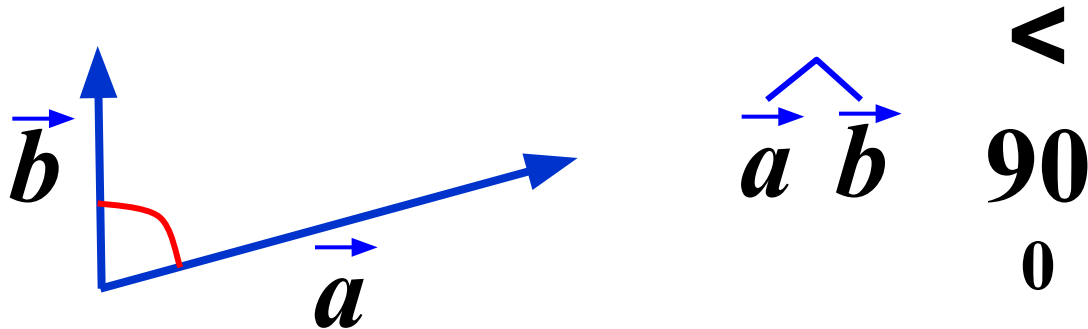


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Частный случай №2

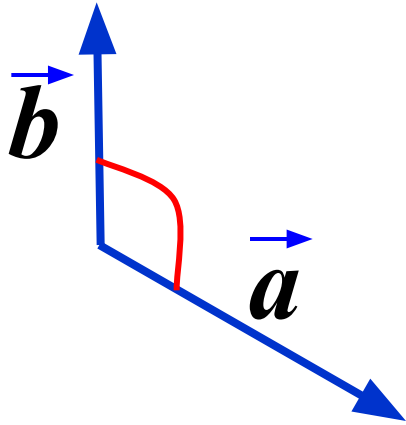


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad \begin{matrix} > \\ 0 \end{matrix}$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} < \\ \text{angle between } \vec{a} \text{ and } \vec{b} & 90^\circ \\ & 0 \end{matrix}$$

Частный случай №3



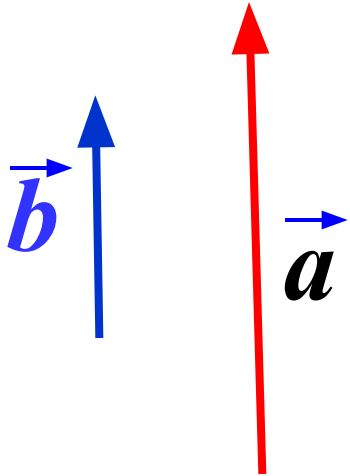
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad \begin{matrix} < \\ 0 \end{matrix}$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

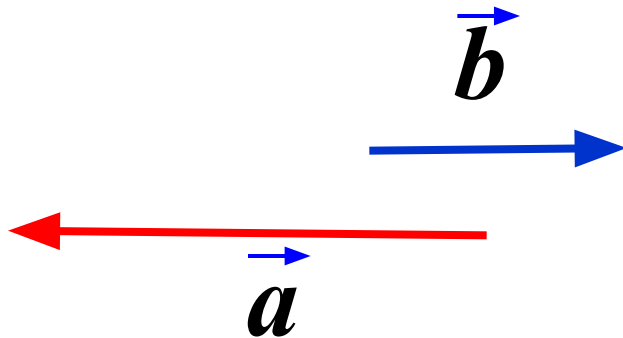
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$$

Частный случай №4



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$

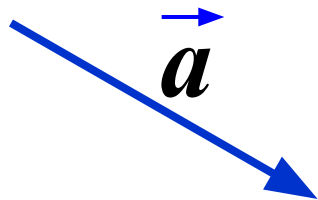
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Частный случай №5



A blue vector labeled $\vec{a}$ pointing downwards and to the right.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

The diagram shows two vectors $\vec{a}$ originating from the same point, with a blue bracket above them indicating their dot product. The angle between them is 0° . The result of the dot product is shown as $|\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется
скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Формула для нахождения
скалярного произведения
через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

**Формула для нахождения
скалярного произведения
через координаты векторов**

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-6; 9; 5\} \qquad \vec{b} \{-1; 0; 7\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 41$$