Автоматика и управление

Тема 4. Частотные характеристики ЛСС

Лекция 4. Реакция ЛСС на гармонический входной сигнал, заданный в комплексном виде. Определение амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ). Годограф АФЧХ. Вещественная, мнимая, амплитудная (АЧХ) и фазовая (ФЧХ) частотные характеристики. Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ). Частотные характеристики элементарных динамических звеньев. Частотные характеристики соединений звеньев.

4.1. Реакция ЛСС на гармонический входной сигнал, заданный в комплексном виде

Как будет реагировать система на гармонический входной сигнал различной частоты?
Как зависят динамические свойства системы от частоты гармонического входного сигнала?

Такая зависимость выражается частотными характеристиками (ЧХ)

Частотные характеристики - это динамические характеристики, являющиеся функциями частоты гармонического входного сигнала и определяющие реакцию системы на этот сигнал.

Рассмотрим одномерную ЛСС с одним входом

$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1} y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1 y^{(1)}(t)+a_0 y(t)=$ в$_m x^{(m)}(t)+$ в$_{m-1} x^{(m-1)}(t)+\ldots$ +в$_1 x^{(1)}(t)+$в$_0 x(t)$

Передаточная функция

$$\Phi(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{в_m p^m+\ldots+в_1 p+в_0}{a_n p^n+\ldots+a_1 p+a_0}=\frac{B(p)}{a_n(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}$$

где p_i - полюса передаточной функции *Ф(p)*, $i=\overline{1,n}$

Подадим на вход гармонический входной сигнал

$x(t) = A_x Sin(\omega t + \phi_x)$

где A_x - амплитуда входного сигнала,

ω - частота входного сигнала,

ϕ_x - фаза входного сигнала.

В комплексном виде:

$$\bar{x}(t)=A_x e^{j(\omega t+\varphi_x)}=A_x e^{j\omega t}e^{j\varphi_x}=\dot{A}_x e^{j\omega t}$$

$t = t_0 = 0$ $\quad \left|\dot{A}_x\right|=A_x$

$\arg \dot{A}_x=\varphi_x$

$\dot{A}_x = A_x e^{j\varphi_x}$ - комплексная амплитуда входного

Найдем изображение по Лапласу входного сигнала *X(p):*

$$X(p) = L[x(t)] = L[\dot{A}_x e^{j\omega t}] = \dot{A}_x L[e^{j\omega t}]$$

$$\boxed{L[e^{\eta t}] = \frac{1}{p-\eta}}$$

Пусть $j\omega = \eta$,
тогда

$$X(p) = L[x(t)] = \frac{\dot{A}_x}{p - j\omega}$$

$$Y(p) = X(p)\Phi(p) \longrightarrow Y(p) = \frac{\dot{A}_x}{(p - j\omega)} \cdot \frac{B(p)/a_n}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)}$$

Допустим, корни характеристического уравнения $A(p)=0$

простые, некратные и $Re[p_i] < 0$

Тогда по теореме разложения

$$Y(p) = \dot{A}_x\left[\frac{\tilde{C}_0}{p - j\omega} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{C}_i}{p - p_i}\right]$$

Определим коэффициент $\widetilde{C}_0$

$$\widetilde{C}_0 = \frac{B(p)}{[(p-j\omega)A(p)]^{(1)}}\bigg|_{p=j\omega} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)+(j\omega-j\omega)A^{(1)}(j\omega)} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \Phi(j\omega)$$

Применив операцию обратного преобразования Лапласа, получим оригинал выходного сигнала ЛСС, находящейся под воздействием гармонического входного сигнала:

$$y(t) = A_x[\Phi(j\omega)e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n}\widetilde{C}_i e^{p_i t}] = y_в(t) + y_c(t)$$

вынужденная гармоническая составляющая выходного сигнала ЛСС, имеющая частоту входного сигнала

свободная составляющая выходного сигнала ЛСС, которая существует в переходный период

если $Re\,[p_i] < 0$

$$y_c(t) = \lim_{t\to\infty} A_x \sum_{i=1}^{n}\widetilde{C}_i e^{p_i t} = 0 \quad\longrightarrow\quad y(t) \approx y_в(t)$$

4.2. Определение амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ)

Найдем отношение вынужденной составляющей выходного сигнала ЛСС к гармоническому входному сигналу

$$\frac{y_в(t)}{x(t)} = \frac{\dot{A}_x \Phi(j\omega) e^{j\omega t}}{\dot{A}_x e^{j\omega t}} = \Phi(j\omega) = \Phi(p)\Big|_{p=j\omega}$$

Амплитудно-фазовой частотной характеристикой Ф(jω) (АФЧХ) ЛСС или комплексным коэффициентом усиления называется отношение вынужденной составляющей выходного сигнала к гармоническому входному сигналу, представленным в комплексной форме.

Получают АФЧХ ЛСС *Ф(jω)* *путем замены в передаточной функции системы комплексной переменной p* на мнимую переменную *jω:*

$$\Phi(j\omega)=\frac{\text{в}_m(j\omega)^m+\text{в}_{m\text{-}1}(j\omega)^{m-1}+\cdots+\text{в}_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_0}$$

АФЧХ, являясь функцией частоты входного сигнала *ω*, зависит от параметров a_i, в_i системы.

4.3. Вещественная, мнимая, амплитудная и фазовая частотные характеристики

$$\Phi(j\omega) = \Phi_a(\omega)e^{j\phi(\omega)} = R(\omega) + jI(\omega)$$

$$\Phi_a(\omega) = \left|\Phi(j\omega)\right| = \frac{\left|y_в(t)\right|}{\left|x(t)\right|} = \frac{A_y(\omega)}{A_x}$$

$$\varphi(\omega) = \arg\Phi(j\omega)$$

$$\varphi_y = \varphi(\omega) + \varphi_x$$

Функция $\Phi_a(\omega) = |\Phi(j\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) ЛСС или коэффициентом усиления по амплитуде гармонического сигнала.

Функция $\phi(\omega) = \arg\ \Phi(j\omega)$ называется фазовой частотной характеристикой (ФЧХ) ЛСС.

Представление *Φ(jω)* в алгебраической форме дает еще две частотные характеристики:

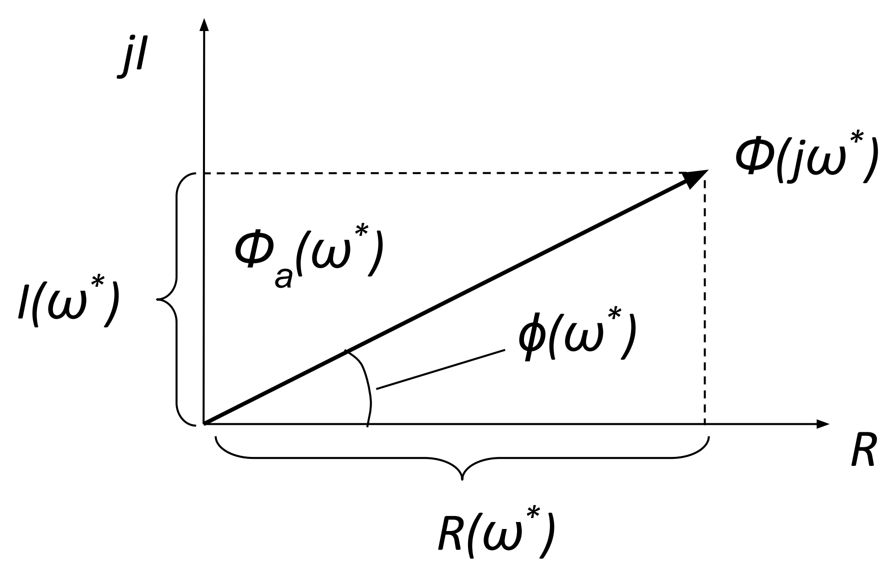
$$R(\omega) = Re\,[\Phi(j\omega)],$$

$$I(\omega) = Im\,[\Phi(j\omega)].$$

Функция $R(\omega)$ называется вещественной (ВЧХ) или активной частотной характеристикой.

Функция $I(\omega)$ называется мнимой (МЧХ) или реактивной частотной характеристикой.

При фиксированном значении частоты $\omega = \omega^*$, АФЧХ ЛСС $\Phi(j\omega^*)$ является вектором



$$\boxed{\Phi_a(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)},}$$

$$R(\omega) = \Phi_a(\omega)\cos\varphi(\omega)$$

$$\boxed{\varphi(\omega) = arctg\,\frac{I(\omega)}{R(\omega)},}$$

$$I(\omega) = \Phi_a(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

$$\boxed{\Phi_a(\omega) = \left|\Phi(j\omega)\right| = \frac{\left|Bj\omega)\right|}{\left|Aj\omega)\right|} = \frac{\sqrt{R_B^2(\omega) + I_B^2(\omega)}}{\sqrt{R_A^2(\omega) + I_A^2(\omega)}}.}$$

ϕ(ω) = argΦ(jω) = argB(jω)-argA(jω) = arctg $\boxed{\frac{I_{в}(\omega)}{R_{в}(\omega)} - arctg\,\frac{I_{A}(\omega)}{R_{A}(\omega)}}$

$R_B(\omega) = в_0 - в_2\omega^2 + в_4\,\omega^4 + \ldots$ - вещественная часть *B(jω)*,
$I_B(\omega) = в_1\omega - в_3\omega^3 + в_5\,\omega^5 + \ldots$ - мнимая часть *B(jω)*,
$R_A(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\,\omega^4 + \ldots$ - вещественная часть *A(jω)*,
$I_A(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\,\omega^5 + \ldots$ - мнимая часть *A(jω)*

$$y_в(t) \approx y(t) = A_x \Phi(j\omega)e^{j\omega t} = A_x e^{j(\omega t+\phi x)} \Phi(j\omega)$$

$$\Phi(j\omega) = \Phi_\alpha(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

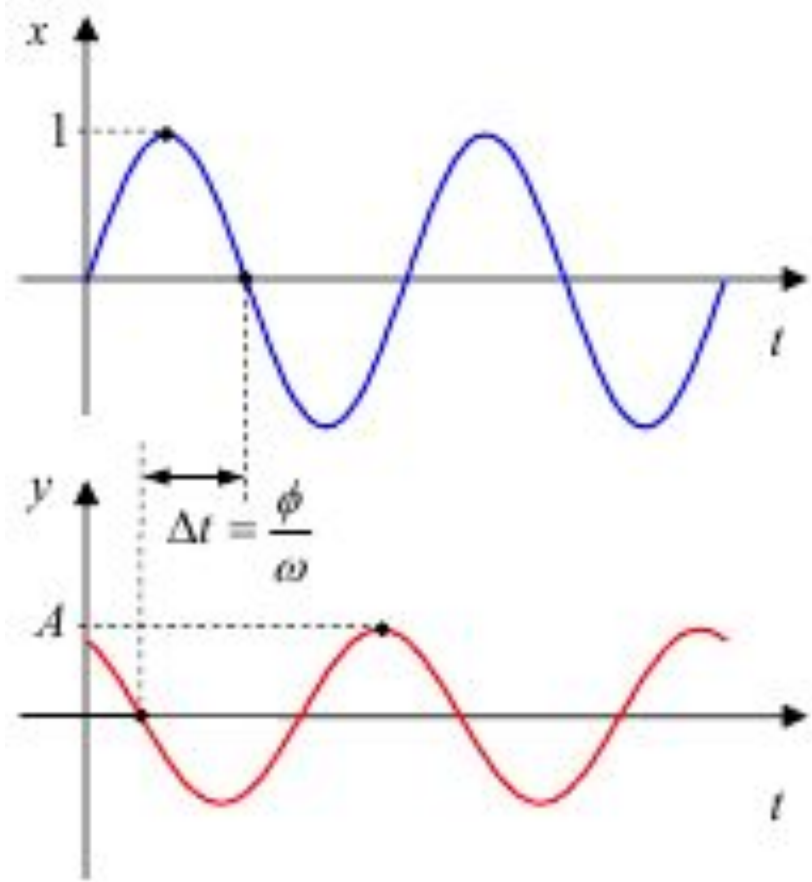
$$y(t) = A_x e^{j(\omega t+\phi x)} \Phi_a(\omega) e^{j\phi(\omega)} = A_x \Phi_a(\omega)e^{j[\omega t+\phi x+\phi(\omega)]}$$

$$A_y = A_x \Phi_a(\omega)\Big|_{\omega=\omega_x}$$

$$\phi_y = \phi(\omega)\Big|_{\omega=\omega_x} + \phi_x$$

Чтобы определить по графику фазовый сдвиг ϕ, нужно найти расстояние Δt по оси времени (например, между точками пересечения с осью t или вершинами). Если Δ t умножить на частоту ω, получаем сдвиг фазы ϕ (в радианах).

Показан случай ϕ > 0 (опережение по фазе), когда выход сдвинут «влево» по оси времени относительно входа, то есть, «идет раньше» входного.



1. *Реакция ЛСС в установившемся режиме на гармонический входной сигнал* $x(t)=A_x Sin(\omega_x t+\phi_x)$ *с частотой* ω_x, *есть также гармонический сигнал с той же частотой* ω_x:

$$y(t)=A_y Sin(\omega_x t+\phi_y).$$

2. *Амплитуда выходного сигнала* A_y *зависит от амплитуды входного сигнала* A_x, *его частоты* ω_x *и параметров* a_i, $в_i$ *(собственных свойств) системы*.

3. *Фаза выходного сигнала* ϕ_y *зависит от фазы входного сигнала* ϕ_x, *его частоты* ω_x *и параметров* a_i, $в_i$ *системы.*

Выражения также справедливы для вычисления ошибки АС в установившемся режиме. В этом случае необходимо оперировать с ЧХ АС от соответствующего входного сигнала к ошибке.

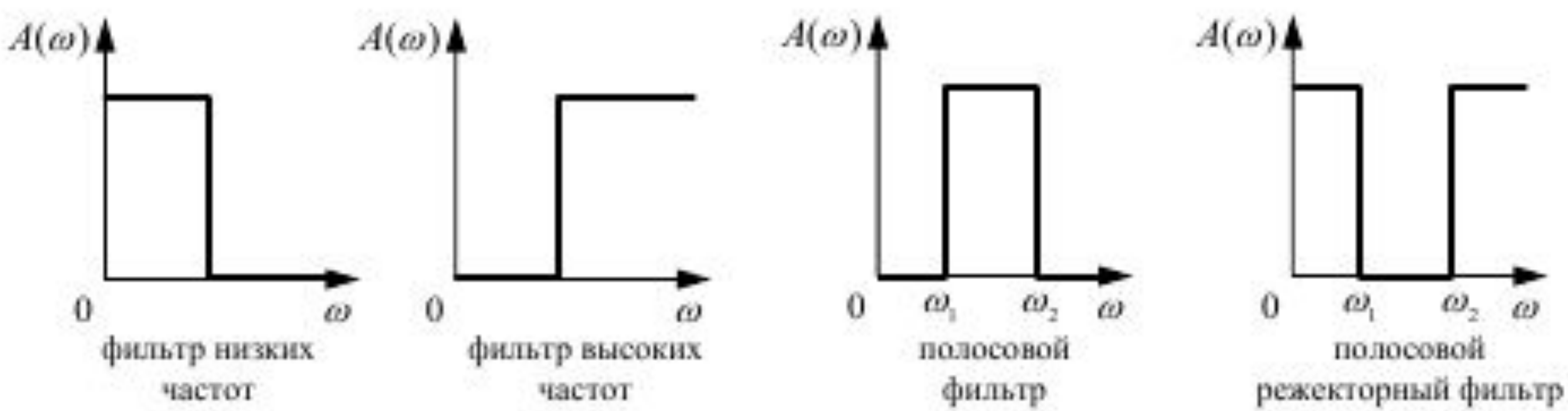
По форме АЧХ различают несколько основных типов звеньев:

1) **фильтр низких частот** – пропускает низкочастотные сигналы примерно с одинаковым коэффициентом усиления, блокирует высокочастотные шумы и помехи;

2) **фильтр высоких частот** – пропускает высокочастотные сигналы, блокирует сигналы низкой частоты;

3) **полосовой фильтр** – пропускает только сигналы с частотами в полосе от ω1 до ω2 ;

4) **полосовой режекторный фильтр** – блокирует только сигналы с частотами в полосе от ω1 до ω2 , остальные п



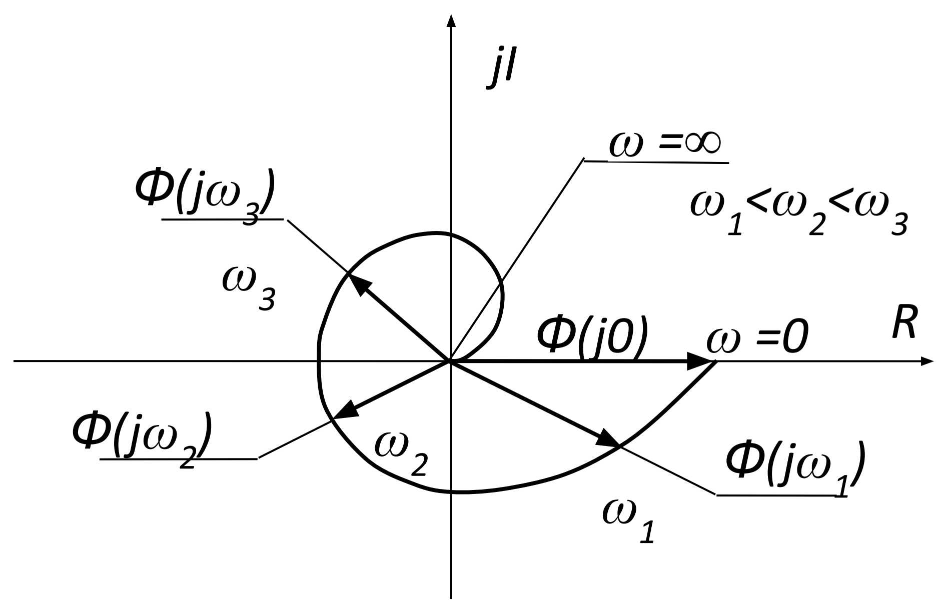
Полоса пропускания – это ширина полосы частот, в которой значение АЧХ больше, чем 1/√2 от ее максимального значения.

Годограф АФЧХ

Если изменять частоту входного сигнала *ω* от 0 до ∞, то точка, отображающая конец радиус-вектора АФЧХ *Ф(jω)*, опишет некоторую траекторию на комплексной плоскости

Траектория точки, отображающей АФЧХ Ф(jω) на комплексной плоскости при изменении частоты ω от 0 до ∞, называется годографом АФЧХ системы.

Один из точных методов построения годографа АФЧХ ЛСС - по параметрам скалярных частотных характеристик: *R(ω), I(ω)*, или $Ф_a(ω)$ и *φ(ω)* в декартовых или полярных координатах, соответственно.



Логарифмические частотные характеристики ЛСС

Для наглядного графического изображения частотных характеристик в широком диапазоне частот, используют логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ).

Логарифмические частотные характеристики – это совокупность двух графиков:

1. ***Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика* (ЛАХ)**

$L(\omega)$ - это характеристика, вычисленная по формуле

$$L(\omega) = 20 lg W_a(\omega)$$

и построенная в функции логарифма частоты ω

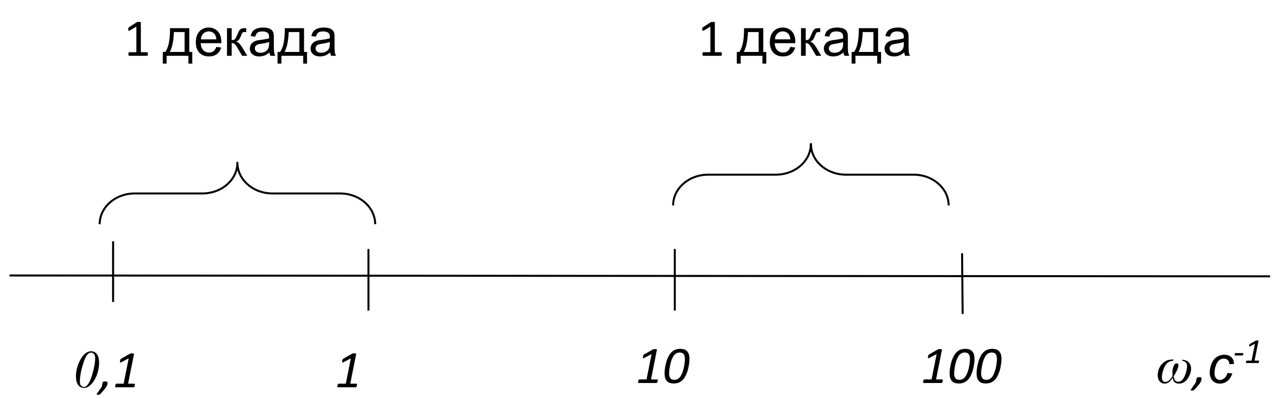
2. ***Логарифмическая фазо - частотная характеристика* (ЛФХ)** - это график фазо - частотной характеристики $\phi(\omega)$, построенной в функции логарифма частоты ω.

При построении графиков ЛЧХ, за единицу логарифмического масштаба по оси частот (абсцисс) принята *декада*.

Декада - это отрезок оси частот, на котором частота изменяется в 10 раз.

$$1 \text{ декада} = lg10\omega - lg\omega = lg\frac{10\omega}{\omega} = lg10 = 1$$

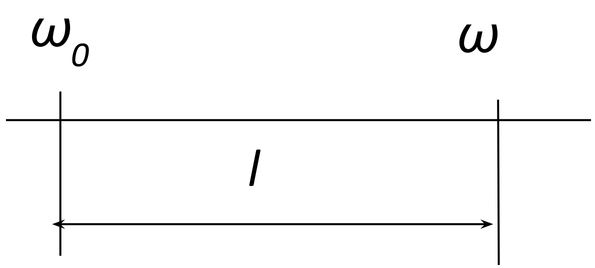
Декада не зависит от выбора частоты отсчета ω и графически изображается отрезком постоянной длины:



Так как, при $\omega=0$ $lg\omega=lg0=-\infty$, то за начало отсчета может быть принята любая частота $\omega_0 \neq 0$.

Как правило, ω_0 выбирается с учетом рабочего диапазона частот данной АС.

Тогда расстояние l от выбранного начала координат ω_0 до точки с частотой ω будет



$$l=lg\omega-lg\omega_0=lg\frac{\omega}{\omega_0}$$

При построении ЛАХ по оси ординат вместо коэффициента усиления по амплитуде $W_a(\omega)$ откладывается величина $L(\omega)=20lgW_a(\omega)$. Единицей масштаба по этой оси является *децибел*.

Один децибел соответствует такому коэффициенту усиления АС по амплитуде $K_0=A_y/A_x$, *что* $20lgK_0=1$, *т.е.*
$K_0=10^{0,05}=1,21$

При построении ЛФХ по оси ординат, точно так же как и при построении ФЧХ АС *ϕ(ω)*, фазовый сдвиг откладывается в обычных единицах, т.е. в градусах или радианах.

Зависимость коэффициента усиления АС по амплитуде, выраженного в децибелах [L(ω)], от логарифма частоты $\lg\omega/\omega_0$, называется логарифмической амплитудной характеристикой (ЛАХ);

Зависимость фазового сдвига АС ϕ(ω), выраженного в градусах или радианах, от логарифма частоты $\lg\omega/\omega_0$, называется логарифмической фазовой характеристикой (ЛФХ).

Вместе ЛАЧХ и ЛФЧХ называются логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой (ЛАФЧХ) или **диаграммой Боде**.

Частота , при которой ЛАХ пересекает ось абсцисс, то есть $L(\omega_c)=0$, а $W_a(\omega_c)=1$, называется ***частотой среза***.

Логарифмические характеристики обладают двумя ценными свойствами:

1) ЛАЧХ и ЛФЧХ для произведения W1(p) W2(p) вычисляются как суммы ЛАЧХ и ЛФЧХ отдельных звеньев:

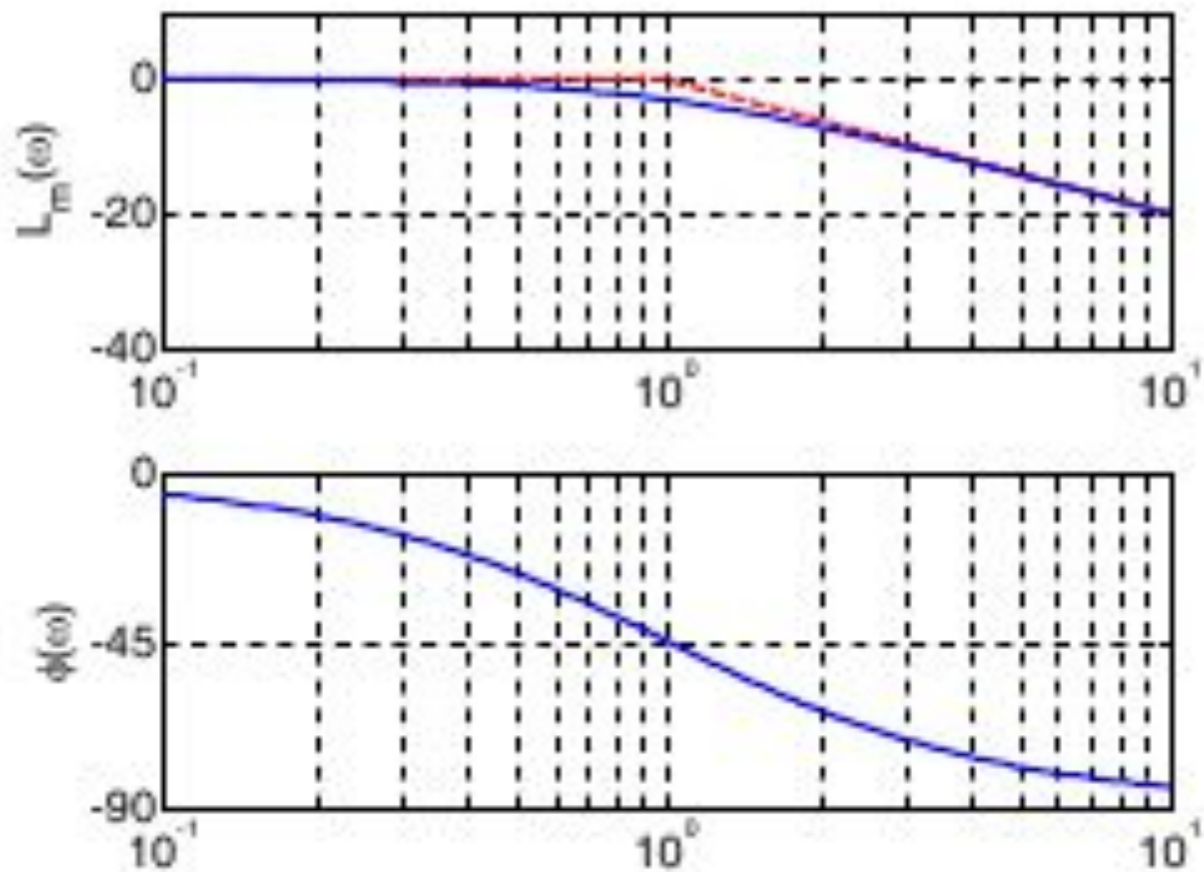
$$20\lg W_a(\omega) = 20\lg W_{a1}(\omega) + 20\lg W_{a2}(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

2) в области высоких и низких частот ЛАЧХ асимптотически приближаются к прямым, наклон которых составляет ±20 дБ/дек (децибел на декаду), ±40 дБ/дек и т.д.

В классической теории управления хорошо разработаны методы анализа и синтеза систем на основе асимптотических ЛАЧХ, которые представляют собой ломаные линии и легко строятся вручную.

точная (сплошная синяя линия) и **асимптотическая** (штриховая красная линия)



Частотные характеристики элементарных динамических звеньев

Усилительное звено

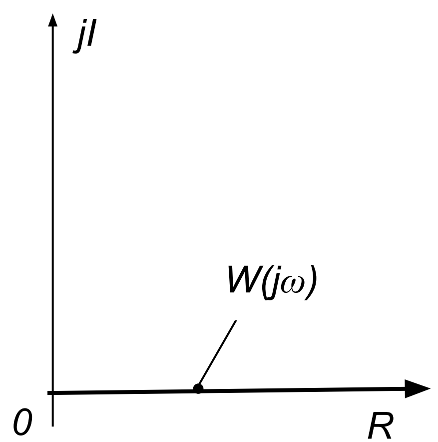
$a_0 y(t)=в_0 x(t)$ или $y(t)=K x(t)$

$$\boxed{W(p)=K}$$

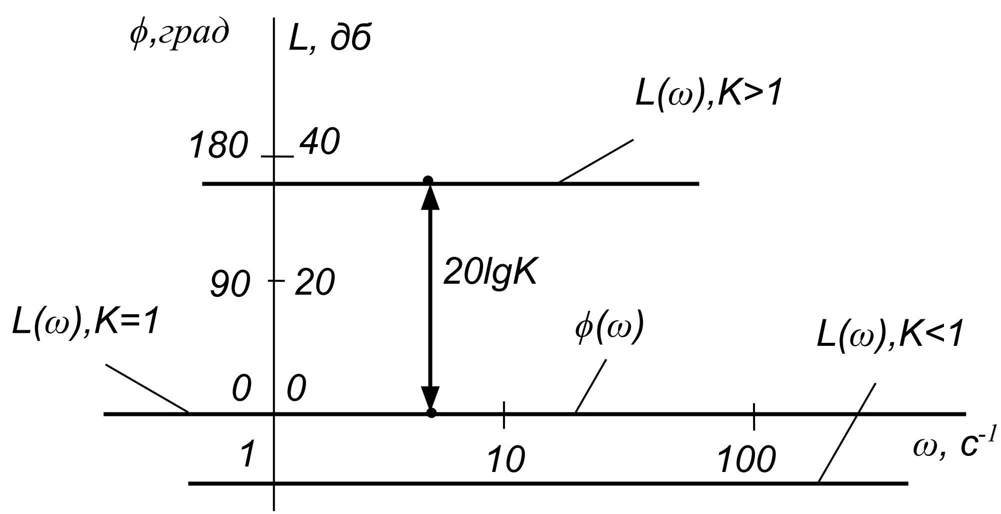
$$\boxed{K=\frac{в_0}{a_0}}$$

Если на вход усилителя действует синусоидальный сигнал, на выходе он усиливается в k раз без изменения фазы, поэтому амплитудная и фазовая частотная характеристики не зависят от частоты входного сигнала:

$$\boxed{W_a(\omega)=k\ ,\ \phi(\omega)=0}$$



АФЧХ

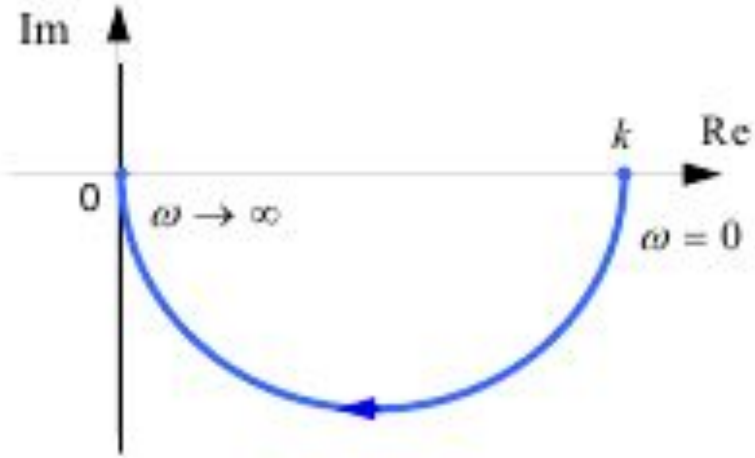


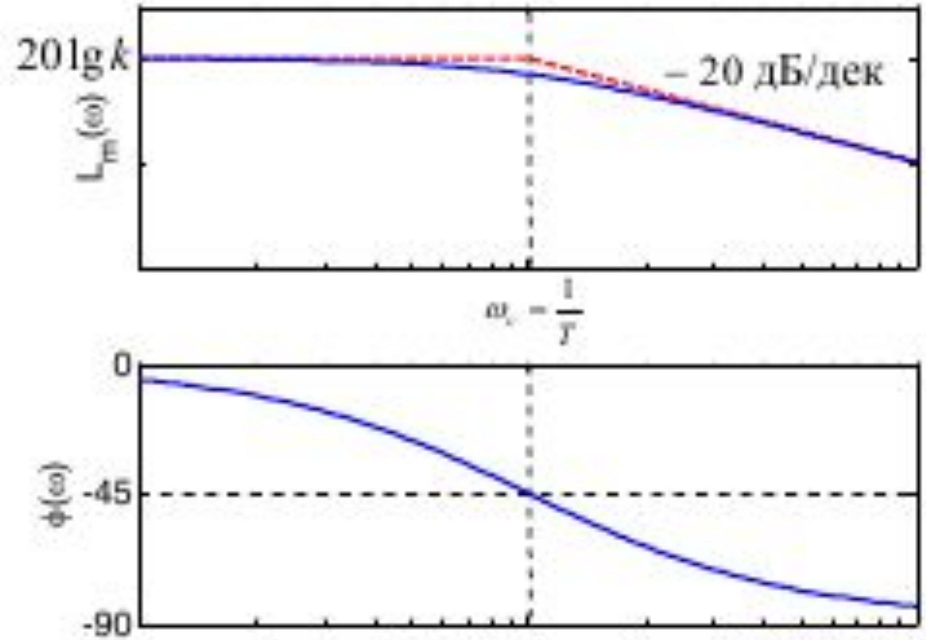
ЛАЧХ и ЛФЧХ

Апериодическое звено $a_1 y^{(1)}(t)+a_0 y(t)=в_0 x(t)$ или $Ty^{(1)}(t)+y(t)=K x(t)$

$$\boxed{W(p)=\frac{K}{Tp+1}}$$

$K=в_0/a_0$ – коэффициент усиления,
$T=a_1/a_0$ – постоянная времени





$$L_m \approx 20\lg k \qquad \omega_c = \frac{1}{T}$$

Полуокружность с центром в точке (0,5k ; 0) радиуса 0,5k . Годограф начинается (на нулевой частоте) в точке (0 ; k) и заканчивается в начале координат (при ω→∞).

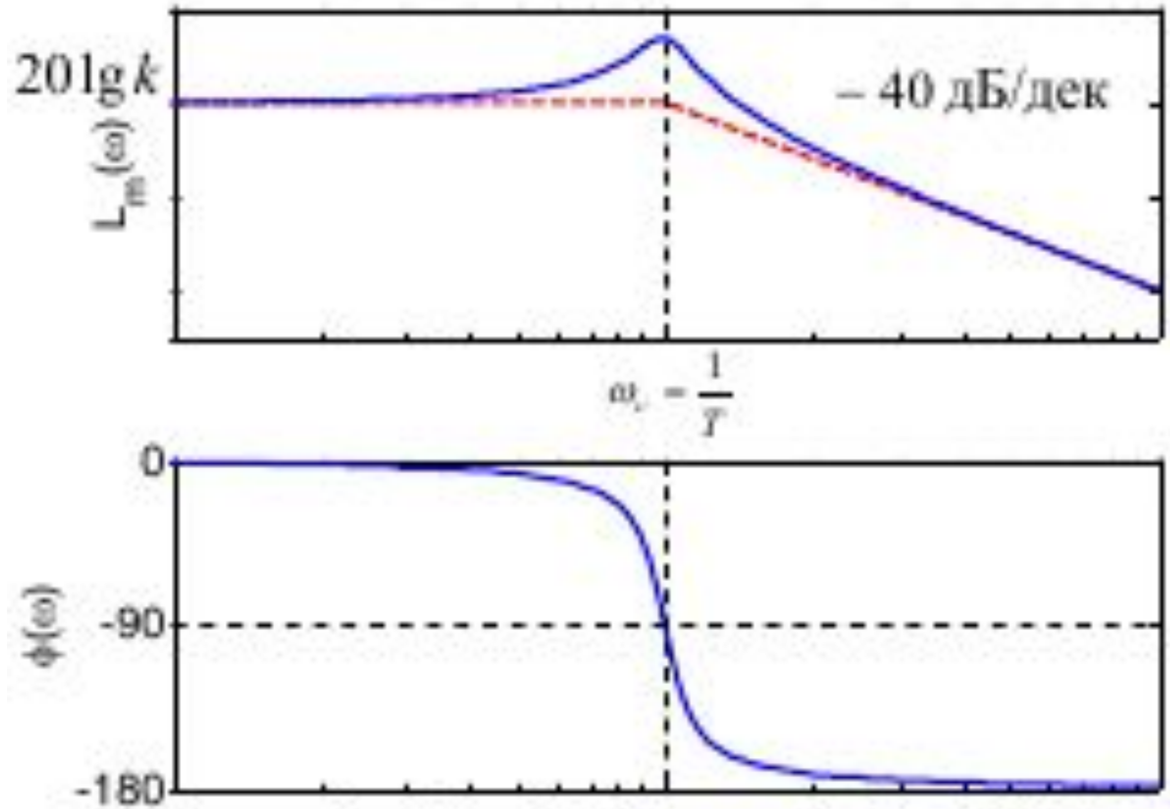
Поскольку ЛАЧХ уменьшается на высоких частотах, апериодическое звено подавляет высокочастотные шумы, то есть обладает свойством фильтра низких частот.

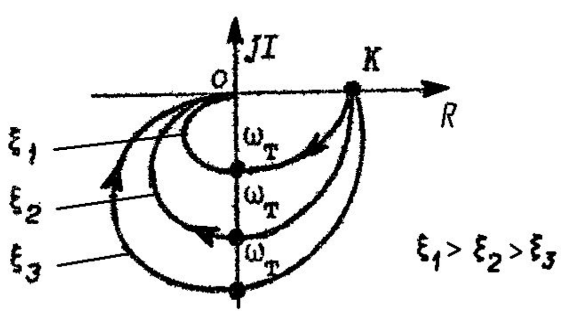
Инерционное звено 2-го порядка

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi\, p + 1}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0};\ T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}};\ \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$$

При значениях ξ<0,5 ЛАЧХ имеет так называемый « горб» в районе сопрягающей частоты, причем его высота увеличивается с уменьшением ξ . При частоте входного сигнала, равной ω_c, наблюдается резонанс.





$\omega_T = 1/T$

При ξ = 0 (консервативное звено) ЛАЧХ терпит разрыв (обращается в бесконечность) на частоте ω_c, при таком входе амплитуда колебаний неограниченно растет и на практике объект разрушается.

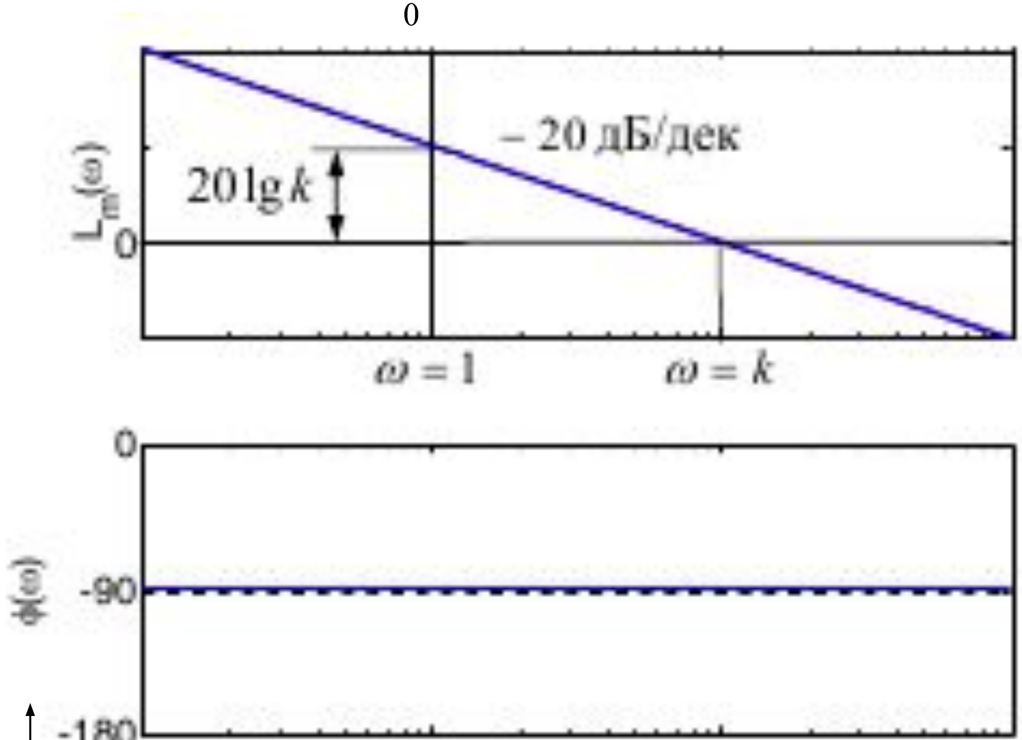
Интегрирующее звено

Оператор: $a_1 y^{(1)}(t) = в_0 x(t)$ или

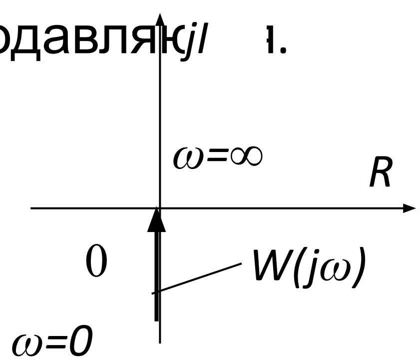
$$K = \frac{в_0}{a_1}$$

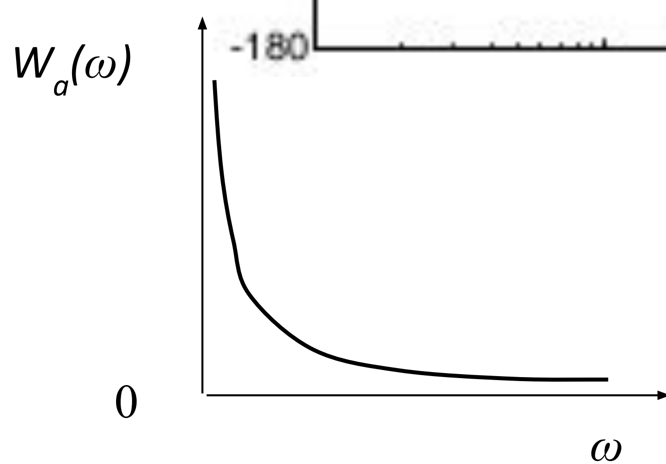
$$y(t) = K\int_0^t x(\tau)d\tau$$

$$\boxed{W(p) = \frac{K}{p}}$$



На низких частотах усиление максимально, теоретически на частоте ω=0 оно равно бесконечности. Высокие частоты, наоборот, подавляются.



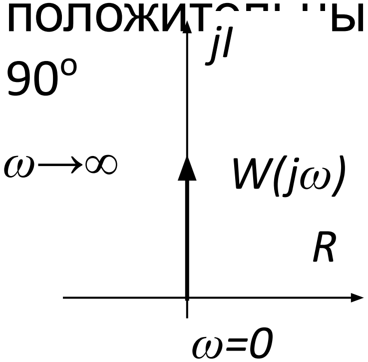


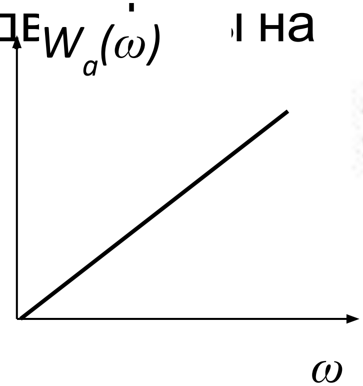
Дифференцирующее звено

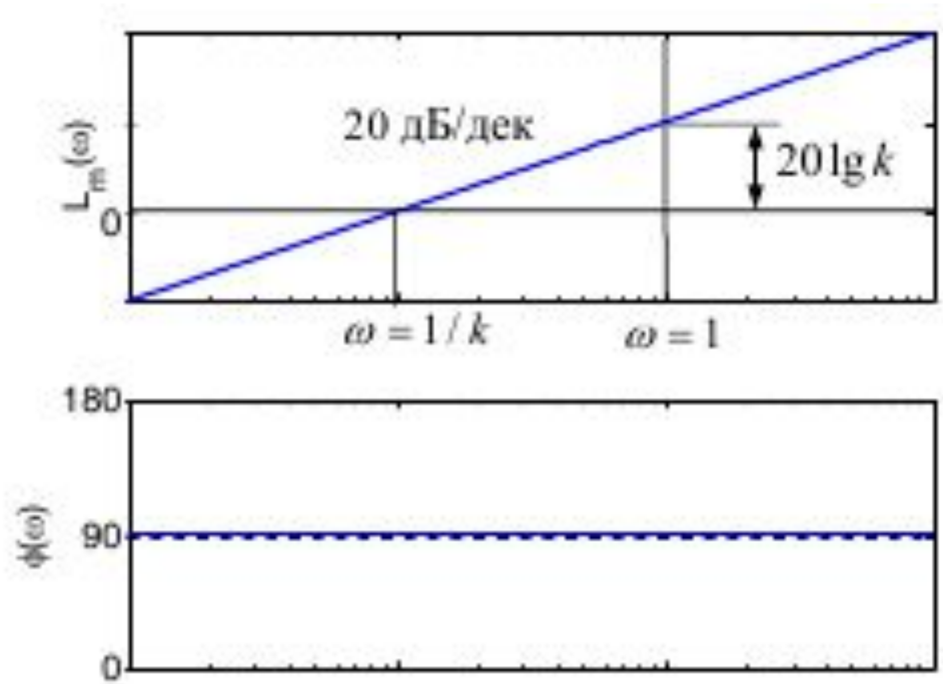
$a_0 y(t) = в_1 x^{(1)}(t)$ или $y(t) = K x^{(1)}(t)$

$\boxed{W(p) = K\,p}$ $\qquad K = \dfrac{в_1}{a_0}$

Подавляет низкие частоты и бесконечно усиливает высокочастотные сигналы, что требует бесконечной энергии и невозможно в физически реализуемых системах. Фазовая характеристика не зависит от частоты, звено дает положительный сдвиг фазы на 90°



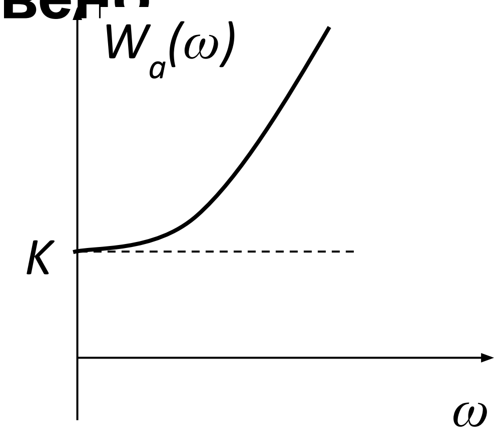


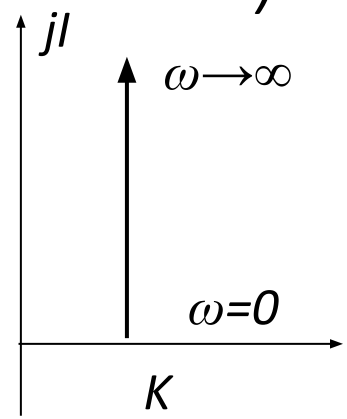


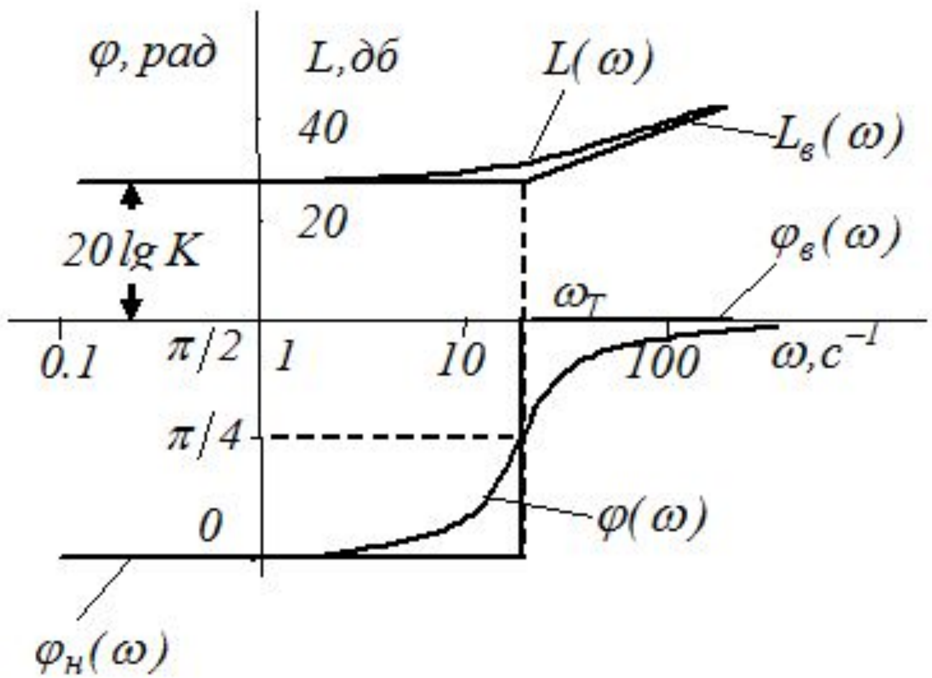
Дифференцирующее звено реагирует не на изменение входной величины, а на изменение ее производной, то есть на тенденцию развития событий. Поэтому говорят, что дифференцирующее звено обладает упреждающим, прогнозирующим действием. С его помощью можно ускорить реакцию системы

Форсирующее звено

$W(p)=K(Tp+1)$





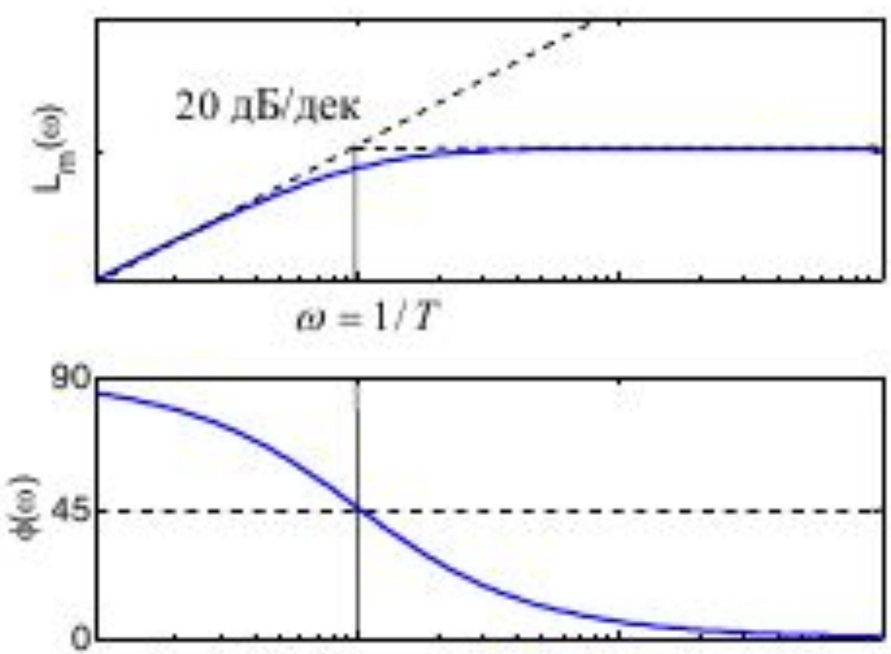


Инерционное дифференцирующее звено

$$W(p) = \frac{Kp}{Tp+1}$$

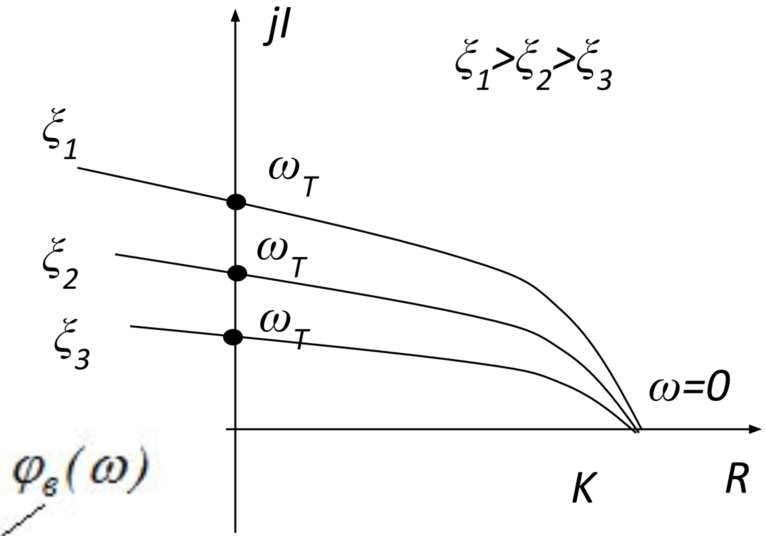
Фактически это последовательное соединение идеального дифференцирующего и апериодического звеньев

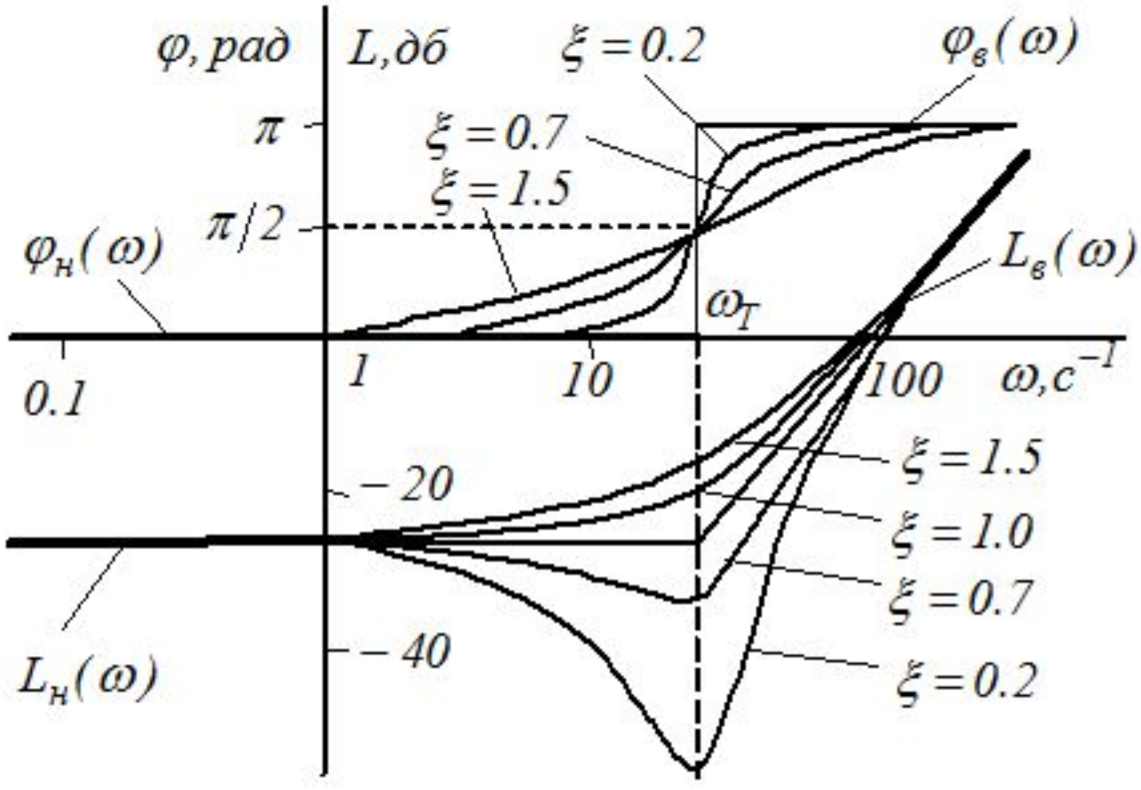
Апериодическое звено добавляет инерционность: обладая свойствами фильтра низких частот, оно ограничивает усиление на высоких частотах.



Форсирующее звено 2-го порядка

$$W(p) = K(T^2 p^2 + 2T\xi\ p + 1)$$





Звено запаздывания

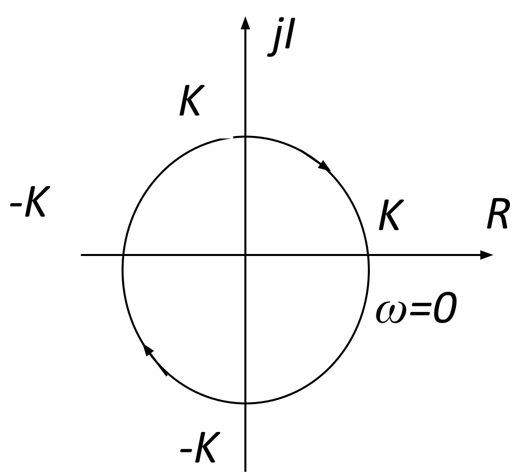
$W(p)=K\,e^{-p\tau}$

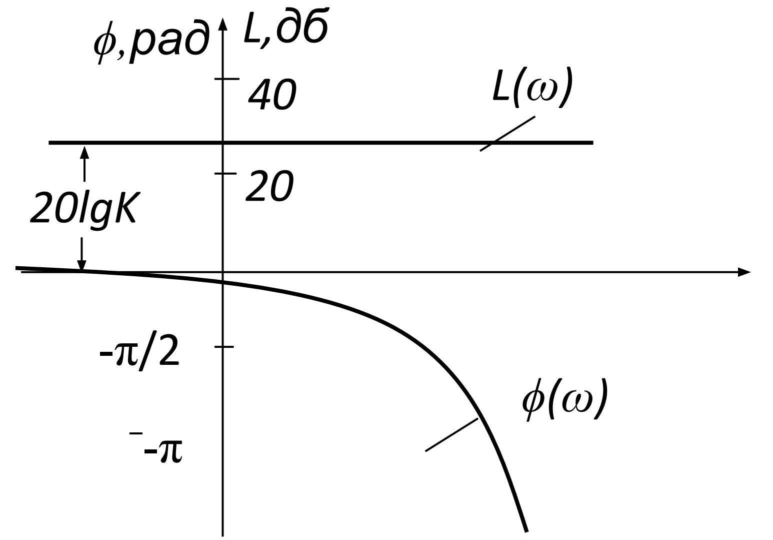
При гармоническом входном сигнале запаздывание не изменяет амплитуду, но вносит дополнительный отрицательный сдвиг фазы.

$$W(j\omega)=Ke^{-j\omega\tau}$$

$$W_a(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=K \qquad \varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=-\omega\tau$$

Фазовая частотная характеристика звена запаздывания – линейная функция частоты ω , чем больше частота, тем больше фазовый сдвиг.





Частотные характеристики соединений звеньев

1. **АФЧХ** последовательного соединения равна произведению АФЧХ всех звеньев соединения:

$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^{k} W_i(j\omega).$$

2. **АЧХ** последовательного соединения равна произведению АЧХ всех звеньев соединения, т.к. модуль произведения равен произведению модулей сомножителей

$$W_a(\omega) = \prod_{i=1}^{k} W_{a_i}(\omega).$$

3. **ФЧХ** последовательного соединения равна сумме ФЧХ всех звеньев соединения, т.к. аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(\omega)$$

4. **ЛАХ** последовательного соединения *L(ω)* равна сумме ЛАХ всех звеньев соединения, т.к. логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей:

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^{k} L_i(\omega)$$

$L_i(\omega) = 20 lg W_{ai}(\omega)$

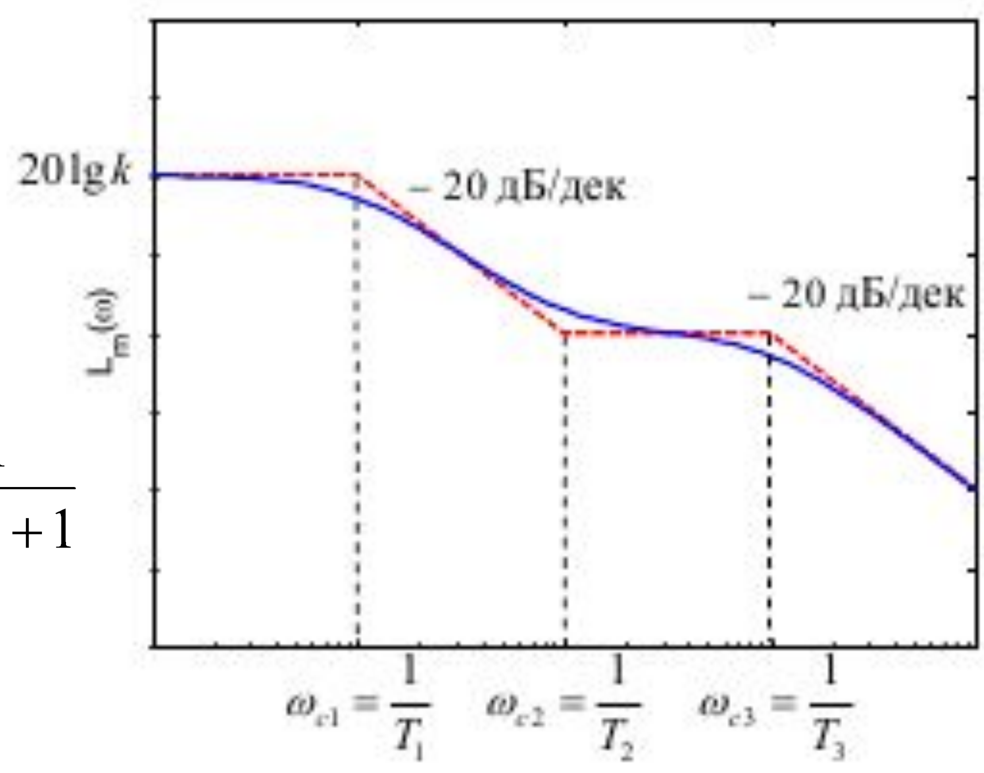
5. **ЛФХ** последовательного соединения звеньев - это та же ФЧХ соединения, построенная в логарифмическом масштабе.

Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики.

Рассмотрим звено второго порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}$$

$$T_1 > T_2 > T_3$$



$$W(p) = k \cdot \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot (T_2 p + 1) \cdot \frac{1}{T_3 p + 1}$$

Самостоятельно

Частотные характеристики встречно-параллельного соединения звеньев

Частотные характеристики параллельного соединения звеньев