O’zbekiston Respublikasi Oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligi

Namangan Muhandislik Qurilish Instituti
“Bino va inshootlar qurilishi” kafedrasi dotsenti, t.f.n. Xodjiev N.R.

«Inshootlar dinamikasi va ustvorligi» fanidan

№ 3 Ma’ruza

Erkinlik darajasi birga teng bo’gan sistemalarga zarbiy, impuls yuklar va kinematic ta’sirlar.

Namangan -2023

Reja

1. To’satdan qo’yilgan yuklama ta’siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.
2. Impuls. Kostruktsiyaga jism qulashi va zarba ta’siri.
3. Kinematik ta’sirlar.

Ударные, импульсные нагрузки и кинематические воздействия на системы с одным степенью свободы.

План

1. Колебания от внезапное влияющие на нагрузку. Краткосрочные силы.
2. Импульс. Последствия от импульса и удара объекта по конструкции. Кинематические воздействии.

Shock, impulse loads and kinematic effects on systems with one degree of freedom.

План

1. Fluctuations from suddenly affecting the load. Short-term forces. Impulse. Consequences of the impulse and impact of the object on the structure.
   Kinematic effects.

1. To’satdan qo’yilgan yuklama ta’siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

При статическом приложении силы она медленно возрастает от нуля до полной величины, не вызывая колебаний. Если же к системе, находящейся в покое, приложить силу внезапно сразу полной величиной и оставить ее на системе, то она вызовет колебания, что легко продемонстрировать даже на бытовых весах. Выясним, каковы эти колебания при отсутствии сил неупругого сопротивления. Так как сила постоянная (см. рис. Д.1, *а*), то уравнение (1.28) примет вид

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = \frac{F}{m_1}. \qquad (1.42)$$

Поскольку уравнение неоднородное, то его решение будет состоять из двух частей. Решение однородного уравнения соответствует формуле (1.23), где по-прежнему ω_α заменим на ω_1. Частное решение будем искать в виде $y_ч(t) = C + Dt$. Подставим это значение в уравнение (1.42) и приравняем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях t: $0 + \omega_1^2(C + Dt) = \dfrac{F}{m_1}$, или $\omega_1^2 C = \dfrac{F}{m_1}$, откуда $C = \dfrac{F}{m_1\omega_1^2}$. Полное решение окажется таким:

$$y_1(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t + \frac{F}{m_1\omega_1^2}.$$

1. To’satdan qo’yilgan yuklama ta’siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

Произвольные постоянные определим из начальных условий. Так как до приложения силы система находилась в покое, то при $t = 0$ $y_0 = 0$ и $\dot{y} = v = 0$. Запишем выражение для скорости колебаний: $\dot{y}_1(t) = -\omega_1 A \sin \omega_1 t + \omega_1 B \cos \omega_1 t$.

Тогда $y_0 = A + \dfrac{F}{m_1\omega_1^2} = 0$, откуда $A = -\dfrac{F}{m_1\omega_1^2}$; $\dot{y}_0 = \omega_1 B = 0$, откуда при $\omega_1 \neq 0$ $B = 0$.

В итоге получим

$$y_1(t) = -\frac{F}{m_1\omega_1^2}\cos \omega_1 t + \frac{F}{m_1\omega_1^2} = \frac{F}{m_1\omega_1^2}(1 - \cos \omega_1 t).$$

Если по-прежнему учесть, что $\dfrac{F}{m_1\omega_1^2} = y_{\text{ст}}$, то

$$y_1(t) = y_{\text{ст}}(1 - \cos \omega_1 t). \tag{1.43}$$

График колебаний массы изображен на рис. 1.18. Штриховой линией показано положение статического равновесия от заданной силы F.

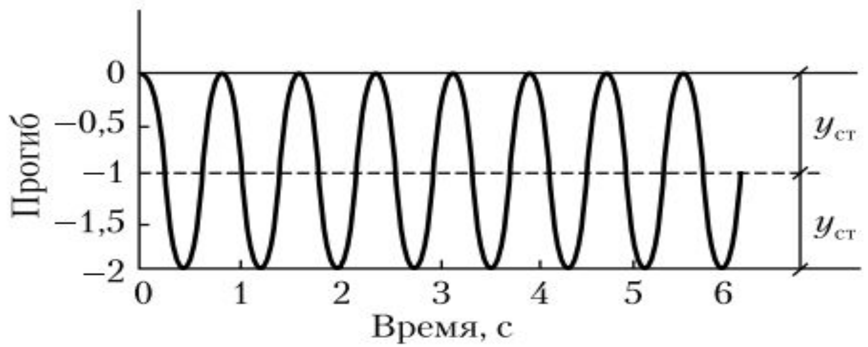

Рис. 1.18. **График колебаний массы при внезапно приложенной нагрузке**

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

По графику очевидно, что колебания массы происходят около линии статического прогиба системы и наибольшее отклонение от положения недеформированного состояния равно двойному статическому прогибу, т.е. $\max y_{\text{дин}} = 2y_{\text{ст}}$, а максимальный динамический коэффициент $\mu_{\max} = 2$. Таким образом, при внезапно приложенной нагрузке прогибы и все усилия будут в два раза больше, чем при статическом ее приложении. Правда, если учесть наличие сил неупругого сопротивления, то динамический коэффициент будет меньше двух.

Решение о внезапно приложенной нагрузке ассоциируется с задачей о внезапном удалении связи. При таком удалении можно представить, что на систему действует прямоугольный импульс при $\tau \to 0$. В этом случае можно взять решение из параграфа 5.4 для времени $t \geqslant \tau$, в котором принять $F_1 = F_2$ и пренебречь неупругим сопротивлением. В итоге получится выражение (1.43) с $\mu_{\max} = 2$. Следует отметить, что динамические коэффициенты примерно такой же величины получаются и в сложных системах при внезапном воздействии. Этот факт продемонстрирован в работе [16] при исследовании поведения большепролетного вантового моста в чрезвычайной ситуации, возникшей в результате внезапного обрыва вант.

Предложенное решение (1.43) было получено для безмассовой силы. На практике же, как правило, в качестве силы будет какой-то груз G с массой M. Поскольку груз остается на системе, то изменятся ее полная масса и собственная частота колебаний:

$$m_G = M + m_1; \quad \omega_G = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}(M + m_1)}}.$$

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

Эту величину и следует подставлять в (1.43). Но $y_{ст}$ определяется только от приложенной силы. Примером внезапно приложенной нагрузки, когда масса не увеличивается, может служить пуск виброизолированных электрических машин, создающих внезапно приложенный момент.

Расчет при внезапно приложенной силе не представляет затруднений. Поэтому примеров здесь не приводится. Решение (1.43) ниже будет использовано при получении решения от других воздействий.

1.7. Воздействие кратковременной силы. Импульс

График кратковременной нагрузки приведен на рис. Д.1, *в*. В промежутке времени $t \leqslant \tau$ для описания колебаний можно использовать решение (1.43). При времени $t = \tau$ нагрузка внезапно удаляется и система будет совершать только свободные колебания. Решение для этого периода времени получим, если от (1.43) вычтем такое же решение, но представленное для времени $t_1 = t - \tau$:

$$y_1(t) = y_{ст}(1 - \cos\omega_1 t) - y_{ст}[1 - \cos\omega_1(t - \tau)] = y_{ст}[\cos\omega_1(t - \tau) - \cos\omega_1 t].$$

Далее рассмотрим эффект воздействия импульса. ***Импульсом*** называется произведение силы на время ее действия. При импульсе время действия силы мало, поэтому рассмотрим случай, когда $\tau \to 0$ (см. рис. Д.1, *в*). С этой целью воспользуемся формулой разности косинусов:

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin[0{,}5(\alpha + \beta)]\sin[0{,}5(\alpha - \beta)].$$

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

Пусть $\alpha = t - \tau$; $\beta = t$. Тогда

$$y_1(t) = y_{ст}\{2\sin\omega_1[0{,}5(t - \tau + t)]\sin\omega_1[0{,}5(t - t + \tau)]\} =$$

$$= 2y_{ст}\sin\omega_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\sin\omega_1\frac{\tau}{2}.$$

При $t \to 0$ синус можно заменить его аргументом, т.е. принять, что

$$\sin\frac{\omega_1\tau}{2} \approx \frac{\omega_1\tau}{2}.$$

Подставим также значения $y_{ст} = \delta_{1F}F$ и введем импульс $S = F\tau$. Получим

$$y_1(t) = \delta_{1F}S\omega_1\sin\omega_1 t. \qquad (1.44)$$

Это решение можно выразить через максимальный динамический коэффициент при $\sin\omega_1 t = 1$ и заменить импульс действием эквивалентной силы. Умножим и разделим выражение (1.44) на F:

$$y_1 = \delta_{1F}\frac{F}{F}S\omega_1 = \frac{y_{ст}}{F}S\omega_1 = \mu_{max}y_{ст},$$

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

откуда

$$\mu_{max} = \frac{S}{F}\omega_1. \tag{1.45}$$

Отсюда эквивалентная сила

$$F_{эк} = \mu_{max}F = \omega_1 S, \tag{1.46}$$

т.е. *эквивалентная сила равна произведению импульса на частоту свободных колебаний массы, на которую действует сила.*

При практической реализации результата (1.44) трудно обеспечить прямоугольный импульс. Обычно требуется время для достижения максимальной величины силы. Затем сила не обрывается сразу на максимальной величине, а исчезает с некоторым уменьшением. Поэтому при расчете вводится коэффициент $\gamma < 1$, учитывающий форму импульса (см. штриховую линию на рис. Д.1, *в*). В результате выражение (1.44) примет вид

$$y_1(t) = \gamma\delta_{1F}S\omega_1 \sin\omega_1 t. \tag{1.47}$$

Формулами (1.44)—(1.47) можно пользоваться не только в случае, когда $\tau \to 0$, но и при большей продолжительности действия нагрузки, если время ее действия не превышает одну десятую периода собственных колебаний массы.

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

1.8. Удар и падение тела на конструкцию

В строительной практике часто встречаются случаи удара или падения тела на конструкцию, особенно в период возведения зданий и сооружений. Нередко такие явления приводят к аварийным ситуациям. Точное решение этой задачи — относительно сложное. Усложнение возникает вследствие того, что упругие тела при соударении отскакивают друг от друга, вызывая разрыв в уравнениях движения. Кроме того, при соударении часть энергии поглощается за счет местных деформаций. Поэтому дальше рассмотрим приближенное решение, приняв следующие допущения, которые идут в запас прочности (так как они как бы увеличивают силу удара):

1) примем, что удар неупругий, т.е. будем полагать, что падающее тело не отскакивает, а остается на конструкции;

2) будем считать тела жесткими, при соударении которых местные деформации не возникают.

Описываемый процесс приближенно можно представить как одновременное внезапное приложение нагрузки и задание начальной скорости массе, находящейся в покое (рис. 1.19). Решения для названных случаев получены выше — см. формулы (1.11) и (1.43). Суммируем их с учетом массы падающего тела:

$$y_1(t) = \frac{v_0}{\omega_F}\sin\omega_F t + y_{\text{ст}}(1 - \cos\omega_F t) \qquad (1.48)$$

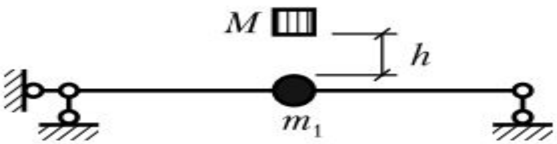

Рис. 1.19. **Падение тела на конструкцию**

1. To’satdan qo’yilgan yuklama ta’siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

Так как падающее тело остается на конструкции, то

$$\omega_F = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}(m_1 + M)}},$$

где M — масса падающего тела. Начальная скорость определяется из закона сохранения количества движения. До контакта с массой m_1 движется только одна масса M. Ее количество движения равно Mv, где v — скорость падающей массы в момент контакта с массой m_1. После контакта массы перемещаются вместе уже со скоростью v_0. Их количество движения равно $(m_1 + M)v_0$. Приравнивая оба значения, получим из этого равенства выражение для начальной скорости масс:

$$v_0 = \frac{Mv}{m_1 + M}.$$

Скорость свободного падения тела, как известно из курса физики, $v = \sqrt{2gh}$, где $g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения.

Как и выше, решение (1.48) можно представить через динамический коэффициент μ. Вынесем значение $y_{ст}$ за скобку:

$$y_1(t) = y_{ст}\left(\frac{v_0}{y_{ст}\omega_F}\sin\omega_F t + 1 - \cos\omega_F t\right) = \mu y_{ст}.$$

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

Выражение в скобках представляет собой динамический коэффициент. Для практических целей уместно найти его максимальное значение, для чего продифференцируем μ по времени и приравняем производную к нулю:

$$\frac{d\mu}{dt} = \omega_F \sin\omega_F t + \frac{v_0}{y_{ст}}\cos\omega_F t = 0;$$

$$\frac{v_0}{y_{ст}\omega_F} = -\operatorname{tg}\omega_F t. \qquad (1.49)$$

При этом значении тангенса динамический коэффициент будет максимальным.

Заменим в выражении для μ все значения тангенсами, используя формулы тригонометрии:

$$\mu_{\max} = -\operatorname{tg}\omega_F t\left(-\frac{\operatorname{tg}\omega_F t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega_F t}}\right) + 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega_F t}}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega_F t}}(1+\operatorname{tg}^2\omega_F t) = 1 + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega_F t}.$$

Учитывая равенство (1.49), заменим тангенс через исходные данные:

$$\mu_{\max} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{y_{ст}^2\omega_F^2}}.$$

Выразим эти значения через массы и высоту падения. Окончательно формула для динамического коэффициента примет вид

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

$$\mu_{max} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{ст}\left(1 + \frac{m_1}{M}\right)}}. \qquad (1.50)$$

Выражение (1.50) показывает, что величина динамического коэффициента зависит от высоты падения груза. Если $h = 0$, то будет иметь место внезапно приложенная нагрузка, при которой $\mu_{max} = 2$.

Если пренебречь массой балки, то

$$\mu_{max} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{ст}}}.$$

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

1.9. Кинематическое воздействие

Под кинематическим воздействием понимается явление, при котором колебание конструкций не вызывается действием динамической силы, а передается через ее упругое закрепление. Типичным примером такого колебания служит передача воздействия через колебания фундамента или основания, на котором расположена конструкция. Колебания фундаментов могут быть вызваны различными причинами. Сюда относятся колебания от работы станков, копров, проходящего транспорта. К кинематическим относится и сейсмическое воздействие, вызываемое землетрясением. Отличие состоит в характере воздействия.

Например, от проходящего трамвая на неровностях пути от удара колес в грунте возникают волны (рис. 1.21). Основное воздействие на конструкцию оказывают, как правило, всевозможные волны (см. гл. 7).

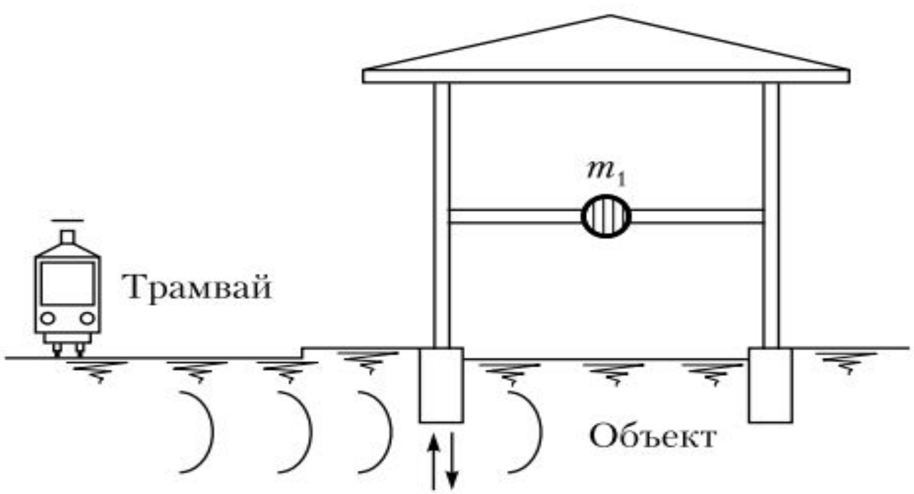

Рис. 1.21. **Пример кинематического воздействия**

1. To'satdan qo'yilgan yuklama ta'siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

Для получения решения опять представим конструкцию в виде системы с одной степенью свободы (рис. 1.22). Полное перемещение массы m_1, как очевидно из рисунка, состоит из двух частей:

1) $\delta_{1\Delta} y_0(t)$ — как бы статическое перемещение;

2) $y_1(t)$ — перемещение вследствие упругих свойств конструкции.

Здесь $\delta_{1\Delta}$ — доля перемещения от $y_0(t)$ при статическом смещении. Решим задачу без учета диссипативных сил. На основании принципа Даламбера, как и в параграфе 1.1, получим уравнение (1.3). Особенность настоя-

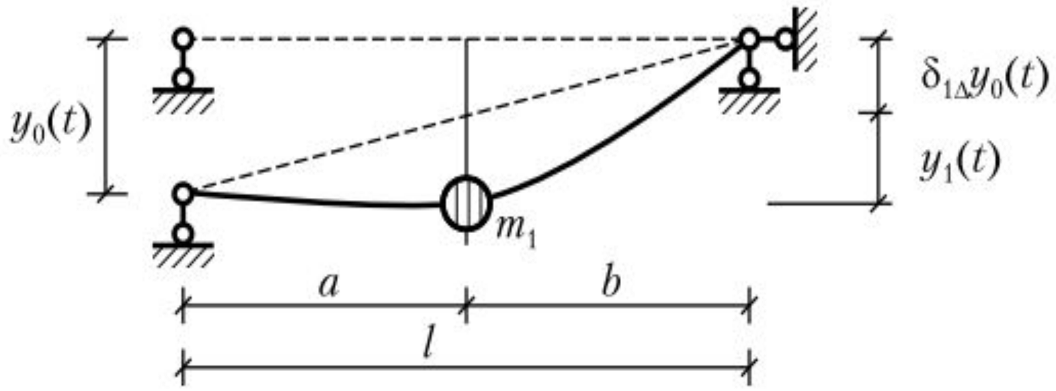

Рис. 1.22. **Расчетная схема при кинематическом воздействии**

1. To’satdan qo’yilgan yuklama ta’siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

щего решения состоит в том, что в выражение S_1 входит только перемещение $y_1(t)$, а в выражение для силы инерции J_1 — полное перемещение $\delta_{1\Delta}y_0(t) + y_1(t)$.

Подставим эти значения в уравнение (1.3):

$$m_1(\delta_{1\Delta}\ddot{y}_0(t) + \ddot{y}_1(t)) + r_1 y_1(t) = 0.$$

Раскроем скобки и перенесем первый член вправо как известную величину, разделим уравнение на m_1 и введем обозначение (1.4). В итоге получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = -\delta_{1\Delta}\ddot{y}_0(t). \tag{1.51}$$

Как уже отмечалось, характер кинематического воздействия может быть весьма разнообразным. Представим его в виде ряда синусоид:

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(\omega_0 t + \nu)$$

и, учитывая принцип независимости действия сил, получим решение для одного члена ряда при $\nu = 0$:

$$y_0(t) = a_0 \sin \omega_0 t. \tag{1.52}$$

Здесь a_0 — амплитуда колебаний основания или фундамента; ω_0 — угловая частота кинематического воздействия.

1. To’satdan qo’yilgan yuklama ta’siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

Эти величины обычно определяются для каждого вида воздействия путем натурных измерений с помощью специальных приборов. Вычислим вторую производную выражения (1.52): $\ddot{y}_0(t) = -a_0\omega_0^2 \sin\omega_0 t$ и подставим ее в уравнение (1.51):

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = \delta_{1\Delta} a_0 \omega_0^2 \sin\omega_0 t. \tag{1.53}$$

Уравнение (1.53) в левой части отличается от уравнения (1.28) только отсутствием члена, учитывающего диссипацию энергии. Решение уравнения (1.28) без среднего члена соответствует формуле (1.35). Для получения решения уравнения (1.53) приравняем правые части уравнений (1.28) и (1.53):

$$\frac{F}{m_1}\sin\theta t = \delta_{1\Delta} a_0 \omega_0^2 \sin\omega_0 t$$

и определим отсюда F:

$$F = \frac{m_1 \delta_{1\Delta} a_0 \omega_0^2 \sin\omega_0 t}{\sin\theta t}.$$

Теперь подставим значение F в решение (1.35), заменив при этом θ на ω_0, так как и в том и в другом случае это угловые частоты вынужденных колебаний. Окончательно получим

$$y_1(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t + \frac{\delta_{1\Delta} a_0 \omega_0^2}{\omega_1^2 - \omega_0^2}\sin\omega_0 t.$$

Как и в параграфе 1.4, произвольные постоянные A и B определим при нулевых начальных условиях. Результат подставим в формулу (1.36), заменив F его значением, полученным выше. В итоге получим

1. To’satdan qo’yilgan yuklama ta’siridagi tebranish. Qisqa muddatli kuchlar.

Как и в параграфе 1.4, произвольные постоянные A и B определим при нулевых начальных условиях. Результат подставим в формулу (1.36), заменив F его значением, полученным выше. В итоге получим

$$y_1(t) = \frac{\delta_{1\Delta} a_0 \omega_0^2}{\omega_1^2 - \omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right). \tag{1.54}$$

Решение (1.54) показывает, что при синусоидальном воздействии (1.52), как и в случае вибрационной нагрузки, может иметь место резонанс при $\omega_0 = \omega_1$.

Контрольные вопросы

1. Какие силы действуют на массу при колебании?
2. Какой принцип рассматривается при решении задач динамики и как он формулируется?
3. Что такое частота свободных колебаний и от каких характеристик конструкций она зависит?
4. Какова взаимосвязь между чистотой свободных колебаний и периодом колебаний?
5. Какая формула Эйлера используется при решении дифференциального уравнения колебаний?
6. По какому закону во времени изменяется перемещение массы при свободном колебании?
7. Как формулируется определение свободных колебаний?
8. Какова зависимость между круговой частотой и частотой в герцах?
9. Каковы причины затухания свободных колебаний?
10. Что такое логарифмический декремент, чему он равен и как он определяется?
11. Что представляет собой коэффициент поглощения энергии и какова его связь с логарифмическим декрементом колебаний?
12. Какое неупругое сопротивление называется критическим?
13. Что такое динамический коэффициент и от чего он зависит?
14. Какое явление происходит при совпадении частот собственных и вынуждающих колебаний?
15. Зависит ли величина амплитуды колебаний массы при резонансе от времени?
16. Чему равен динамический коэффициент при внезапном приложении нагрузки?
17. Что такое импульс и когда он возникает?