# Лекция 2. Законы распределения случайных величин.

# Биномиальный закон

Дискретная случайная величина X имеет **биномиальный закон** распределения, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., m, ..., n с вероятностями

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $p+q=1$, $p>0$, $q>0$, $\quad C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$

# Биномиальный закон

## Ряд распределения

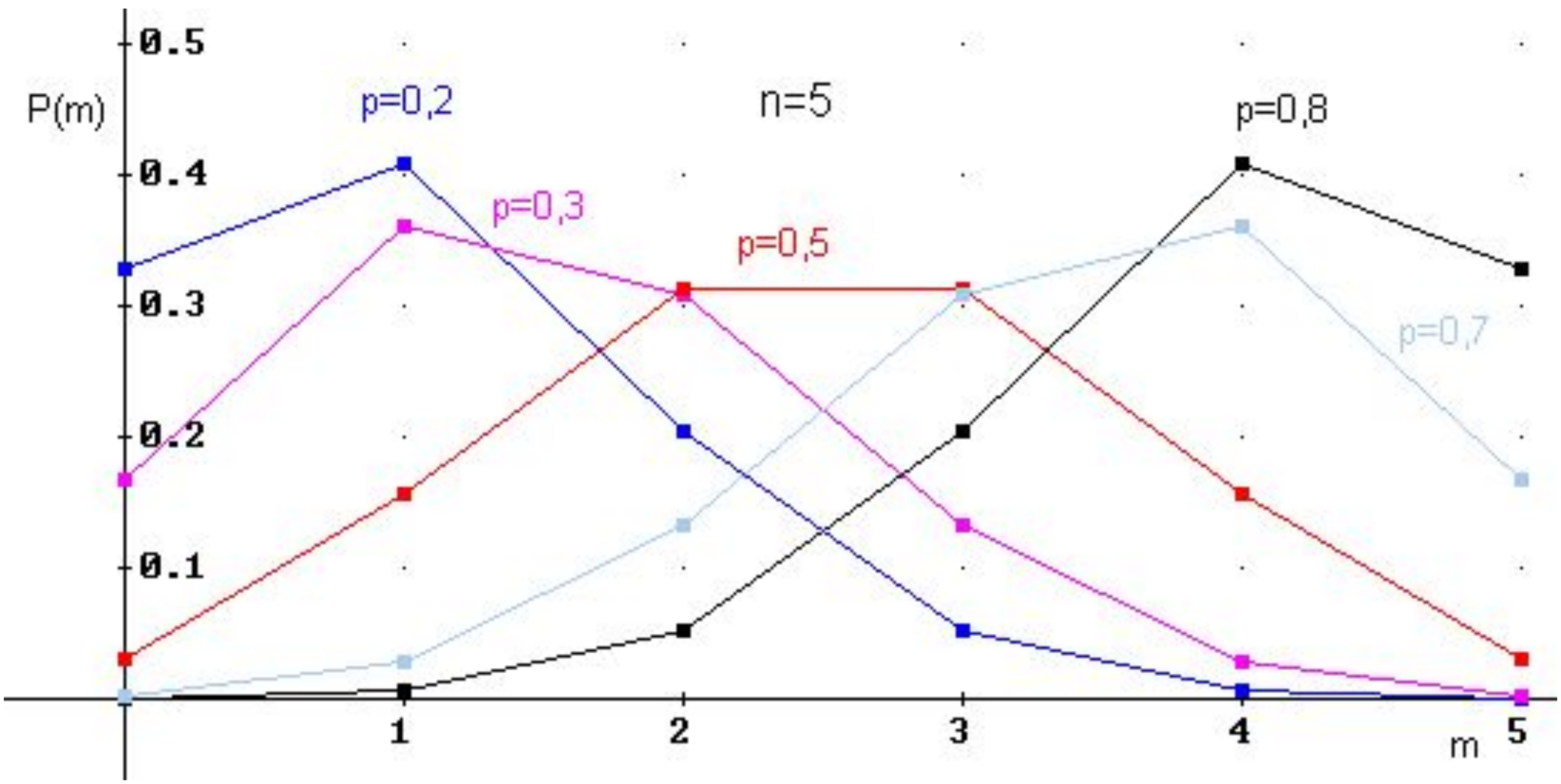
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | … | $m$ | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $q^n$ | $C_n^1 pq^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | … | $C_n^m p^m q^{n-m}$ | … | $p^n$ |

причем $\sum_0^n p_i = 1$

# Биномиальный закон

| | |
|---|---|
| Параметры | $n,\ p$ |
| Математическое ожидание | $M(X) = np$ |
| Дисперсия | $D(X) = npq$ |
| Среднее квадратическое отклонение | $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ |
| Мода (наивероятнейшее число) | $np - q \le Mo(X) \le np + p$ |

многоугольники (полигоны) распределения случайной величины $X$, имеющей биномиальный закон распределения с параметрами $n=5$ и $p$ (для $p=0,2$; $0,3$; $0,5$; $0,7$; $0,8$)



# Пример

Примерно 20% судебных дел – это дела по обвинению в краже. В порядке прокурорского надзора проверено 4 наудачу отобранных дела.

Каково наивероятнейшее значение дел о краже среди отобранных и какова вероятность этого значения?

# РЕШЕНИЕ

$$n = 4,$$

$$p = \frac{20}{100} = 0{,}2,$$

$$q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

$$np - q \le Mo(X) \le np + p$$

$$4 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le Mo(X) \le 4 \cdot 0{,}2 + 0{,}2$$

$$0 \le Mo(X) \le 1$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1$$

# РЕШЕНИЕ

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1$$

$$P_4(0) = 0{,}8^4 = 0{,}4096$$

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}4096$$

# Закон Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет **закон распределения Пуассона**, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., m, ... (бесконечное, но счётное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad e = 2{,}71828...$$

# Закон Пуассона

## Ряд распределения

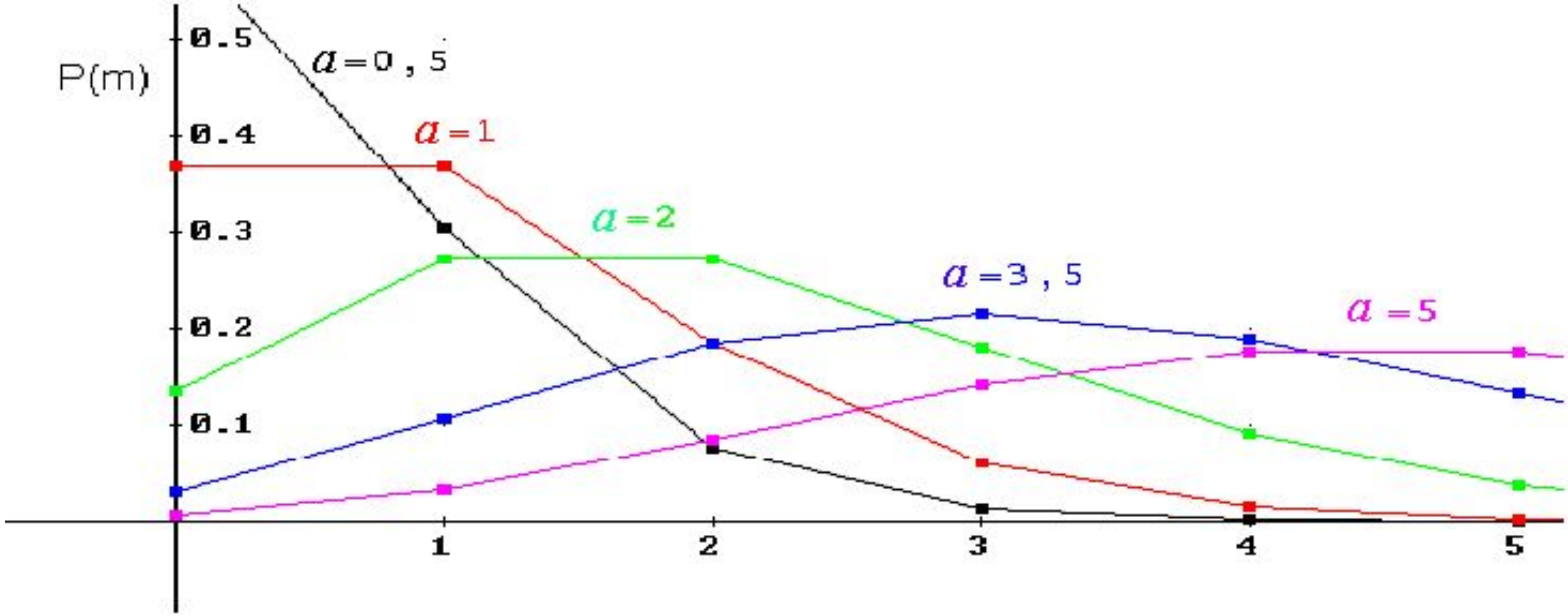
| $x_i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\ldots$ | $m$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $e^{-a}$ | $a \cdot e^{-a}$ | $\frac{a^2 \cdot e^{-a}}{2}$ | $\ldots$ | $\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$ | $\ldots$ |

причем $\sum_{0}^{\infty} p_i = 1$

# Закон Пуассона

| | |
|---|---|
| Параметры | $a$ |
| Математическое ожидание | $M(X)=a$ |
| Дисперсия | $D(X)=a$ |
| Среднее квадратическое отклонение | $\sigma(X)=\sqrt{a}$ |
| Мода (наивероятнейшее число) | $a-1\leq Mo(X)\leq a$ |

# Многоугольники распределения случайной величины *X*, имеющей закон распределения Пуассона с параметром $a$ (для $a$=0,5; 1; 2; 3,5; 5).



# Применение закона Пуассона

При больших $n$, малых $p$

| Формула Бернулли | Формула Пуассона |
|---|---|
| $$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$ | $$P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$ |

$$\approx$$

$$a = np$$

# Пример

Примерно 0,1% судебных дел – это дела по обвинению в убийстве. Проверено 200 наудачу взятых судебных дел.

Какова вероятность того, что среди них дел о убийстве буде: 0, 1, 2, 3 ?

# Решение

$$n = 200,\ \ p = 0{,}001,\ \ n \cdot p = 0{,}2$$

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(m) = \dfrac{0{,}2^m}{m!} e^{-0{,}2}$ | 0,8187 | 0,1638 | 0,0164 | 0,0010 | 0,9999 |
| $P_{200}(m) = C_{200}^{m} (0{,}001)^{m} (0{,}999)^{200-m}$ | 0,8186 | 0,1639 | 0,0163 | 0,0011 | 0,9999 |

# Применение закона Пуассона

Вероятности того, что за промежуток времени длиной $t$ наступит $m$ событий простейшего потока

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

$$P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

$$a = \lambda \cdot t$$

*λ – это среднее число событий потока, происходящих в единицу времени (интенсивность).*

# Пример

В дежурную часть органов внутренних дел за час в среднем поступает 30 сообщений различного характера.

Какова вероятность, что за минуту поступит 2 сообщения?

# Решение

Количество сообщений, поступающих в час $\lambda = 30$,

$t = 1$(мин) $= 1/60$ (час), $a = 30 \cdot \frac{1}{60} = 0{,}5$

$$P_{1мин.}(2) = \frac{0{,}5^2}{2} e^{-0{,}5} \approx 0{,}07$$

# Равномерный закон

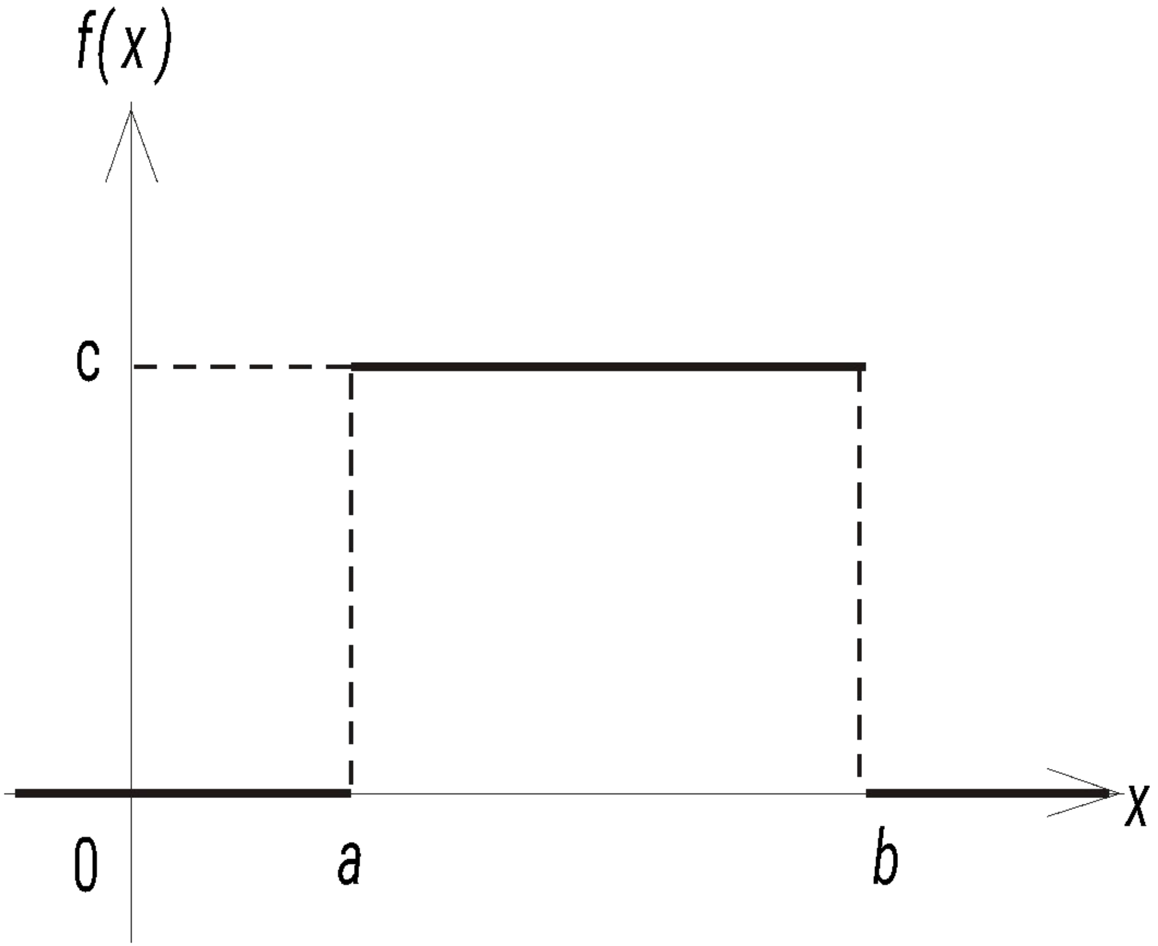
Непрерывная случайная величина $X$ имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке плотность распределения вероятности случайной величины постоянна, а вне его равна нулю, т. е. если

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<a,\\ c & при \quad a\le x\le b,\\ 0 & при \quad x>b.\end{cases}$$

где $\quad c=\dfrac{1}{b-a}=const.$

# Равномерное распределение

## Кривая распределения



# Равномерный закон

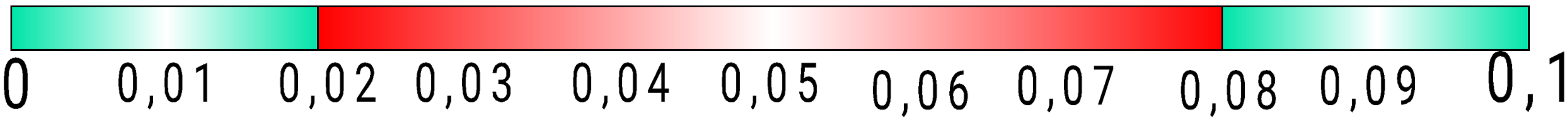
| | |
|---|---|
| Математическое ожидание | $M(X)=\dfrac{b+a}{2}$ |
| Дисперсия | $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ |
| Среднее квадратическое отклонение | $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$ |
| Вероятность попадания СВ X в интервал $[\alpha, \beta]$, $([\alpha, \beta]\in[a, b])$ | $P(\alpha\le X\le\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ |

# Пример

Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления.

Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

# Решение




Ошибка превысит заданную точность, если
X$\in$[0,02, 0,08]

$$P(0{,}02 < X < 0{,}08) = \frac{0{,}08 - 0{,}02}{0{,}1} = 0{,}6$$

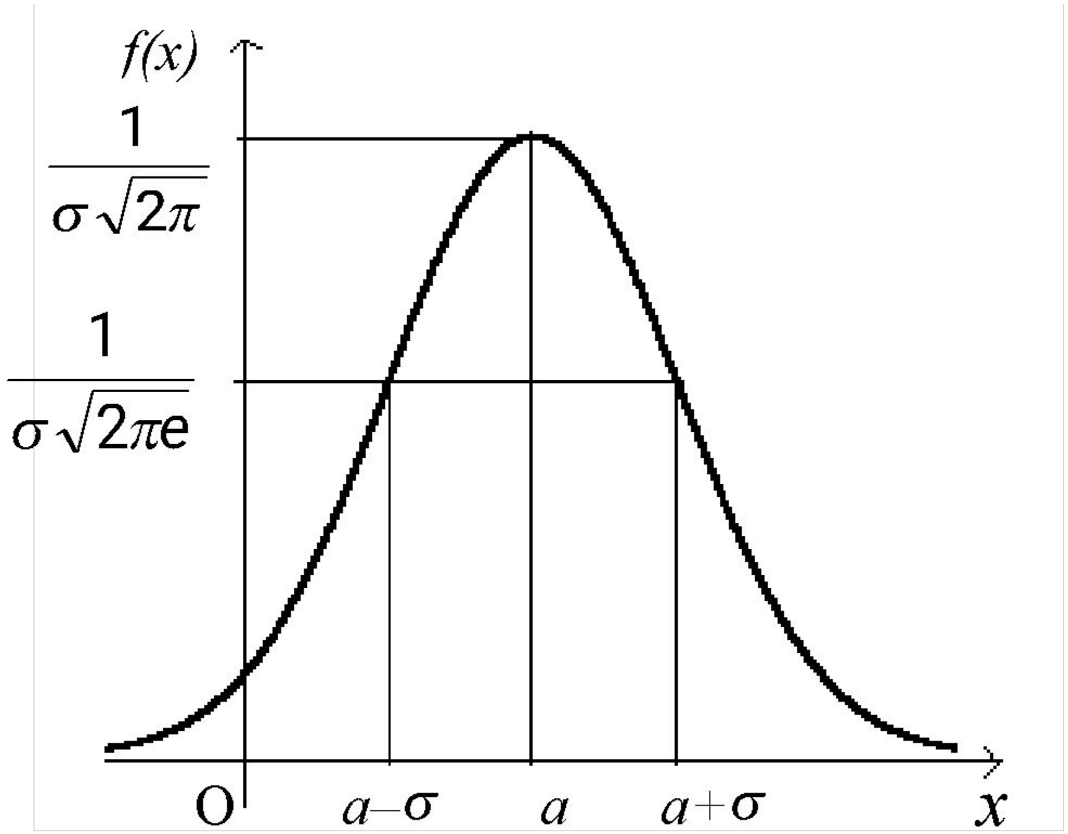
# Нормальный закон

Непрерывная случайная величина *X* имеет *нормальное распределение*, если плотность вероятности *f(x)* имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

# Нормальное распределение

## Кривая распределения



# Нормальный закон

| | |
|---|---|
| Параметры | $a,\ \sigma$ |
| Математическое ожидание | $M(X)=a$ |
| Дисперсия | $D(X)=\sigma^2$ |
| Среднее квадратическое отклонение | $\sigma(X)=\sigma$ |
| Вероятность попадания СВ X в интервал [α, β], ([α, β]∈[$a$, $b$]) | $P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$ $\Phi(x)$ – функция Лапласа |

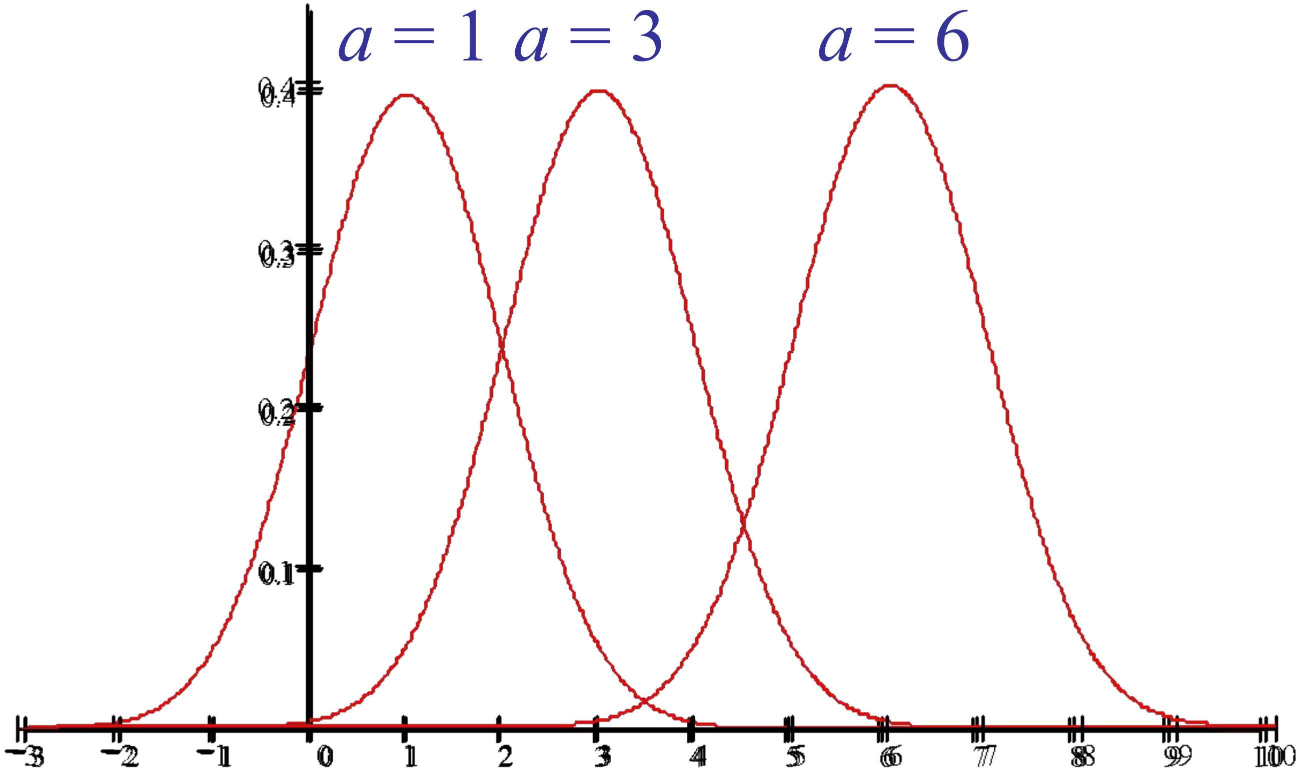
# Функция Лапласа

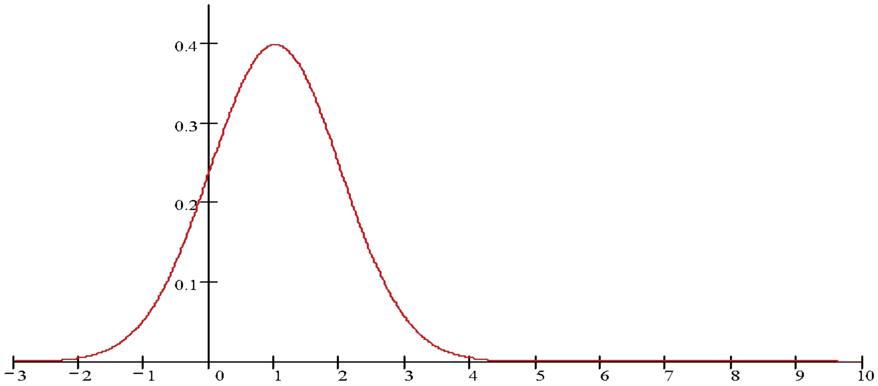
$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

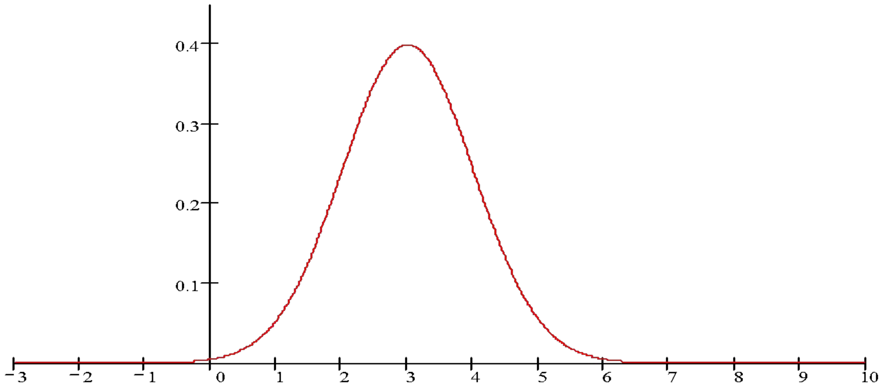
| x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,06 | 0,0239 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,07 | 0,0279 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,08 | 0,0319 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,09 | 0,0359 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,10 | 0,0398 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,11 | 0,0438 |

*При изменении параметра a* форма графика функции не изменяется, а происходит лишь смещение вдоль оси абсцисс вправо, если он возрастает, и влево, если убывает.

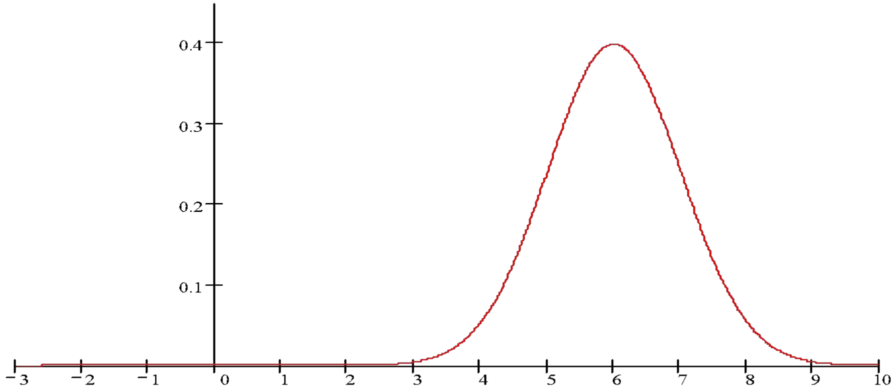





$$a = 1, \ \sigma = 1$$

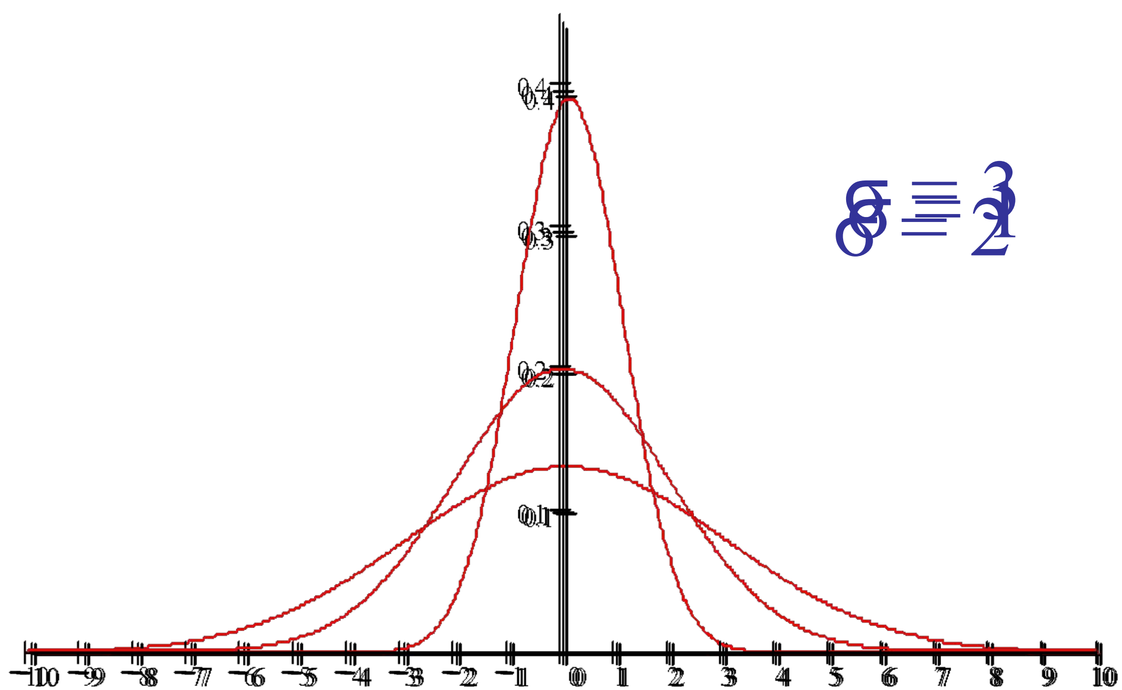


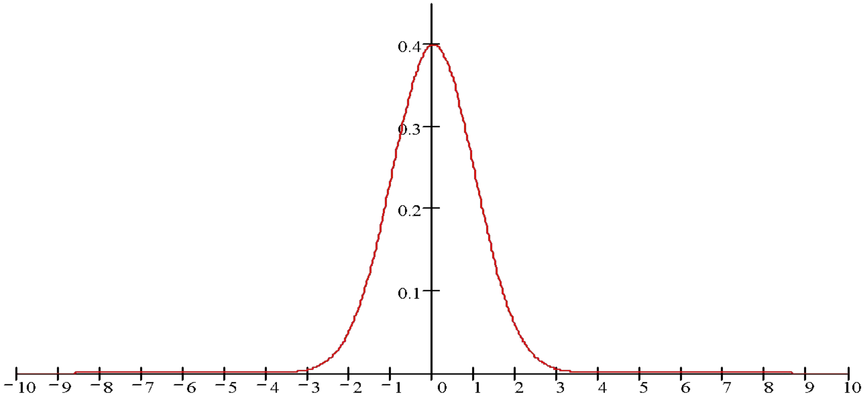

$$a = 3, \ \sigma = 1$$



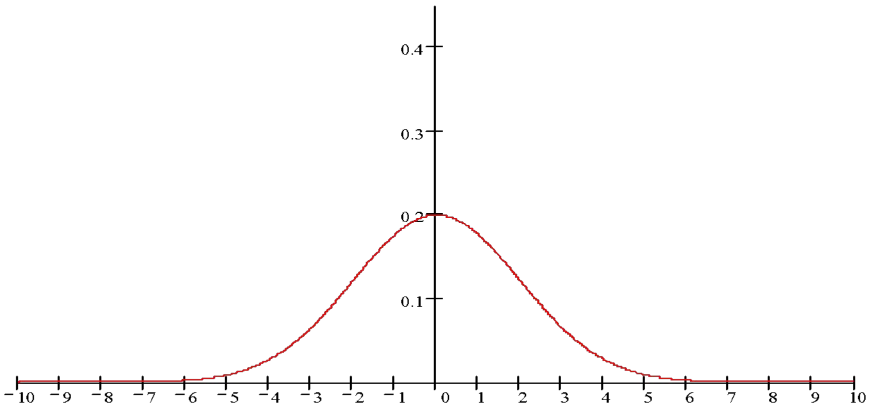

$$a = 6, \ \sigma = 1$$

*При изменении параметра* σ изменяется форма нормальной кривой. Если этот параметр убывает, то кривая становится более островершинной, если увеличивается, то кривая становится более пологой.

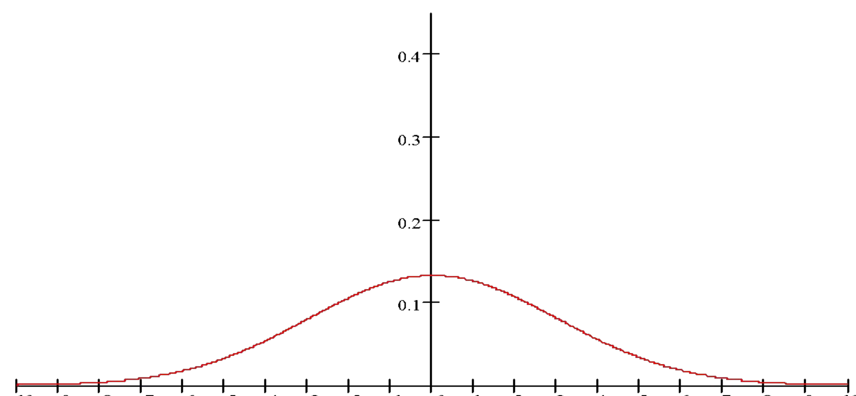





$\sigma = 1$

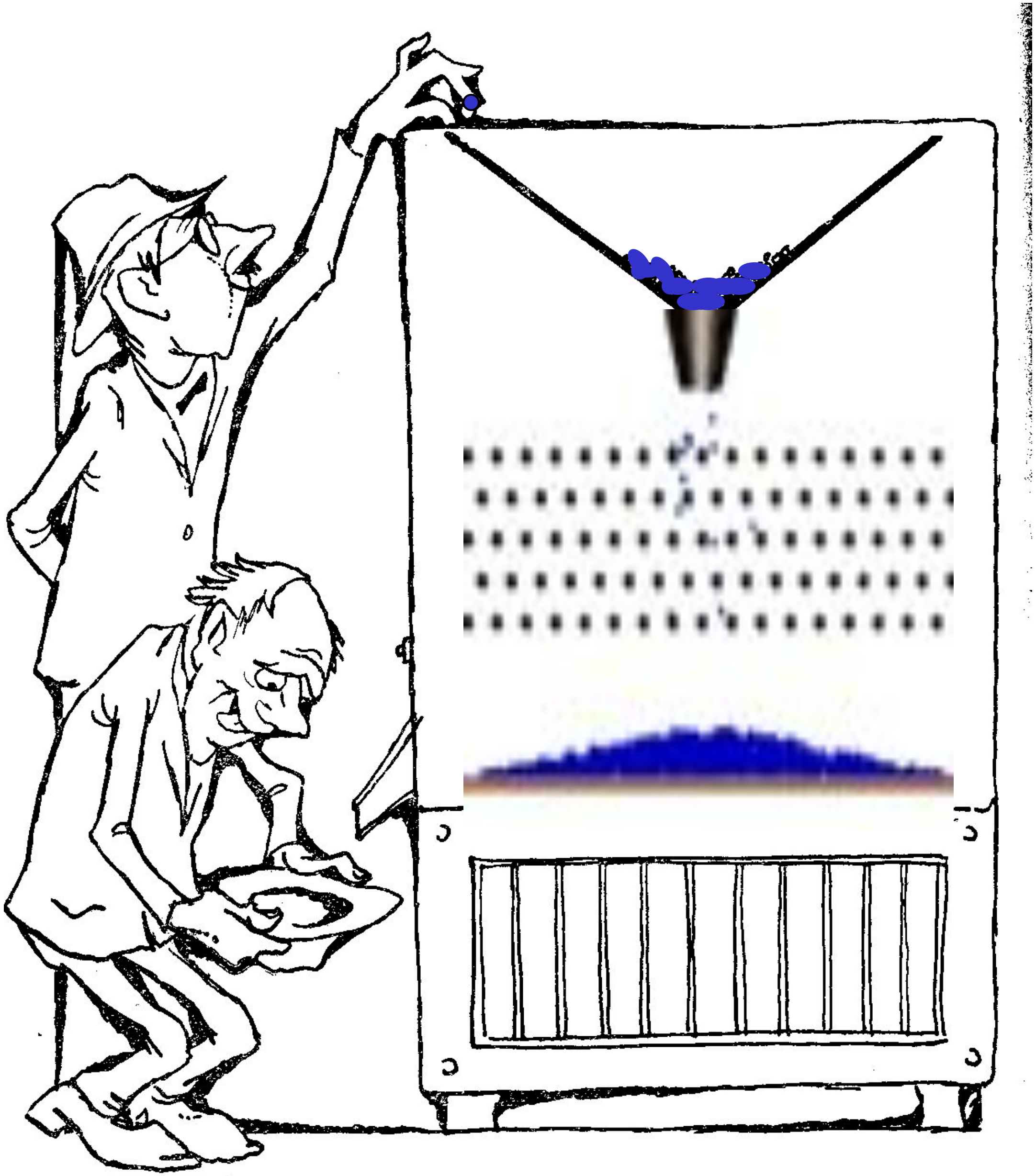



$\sigma = 2$

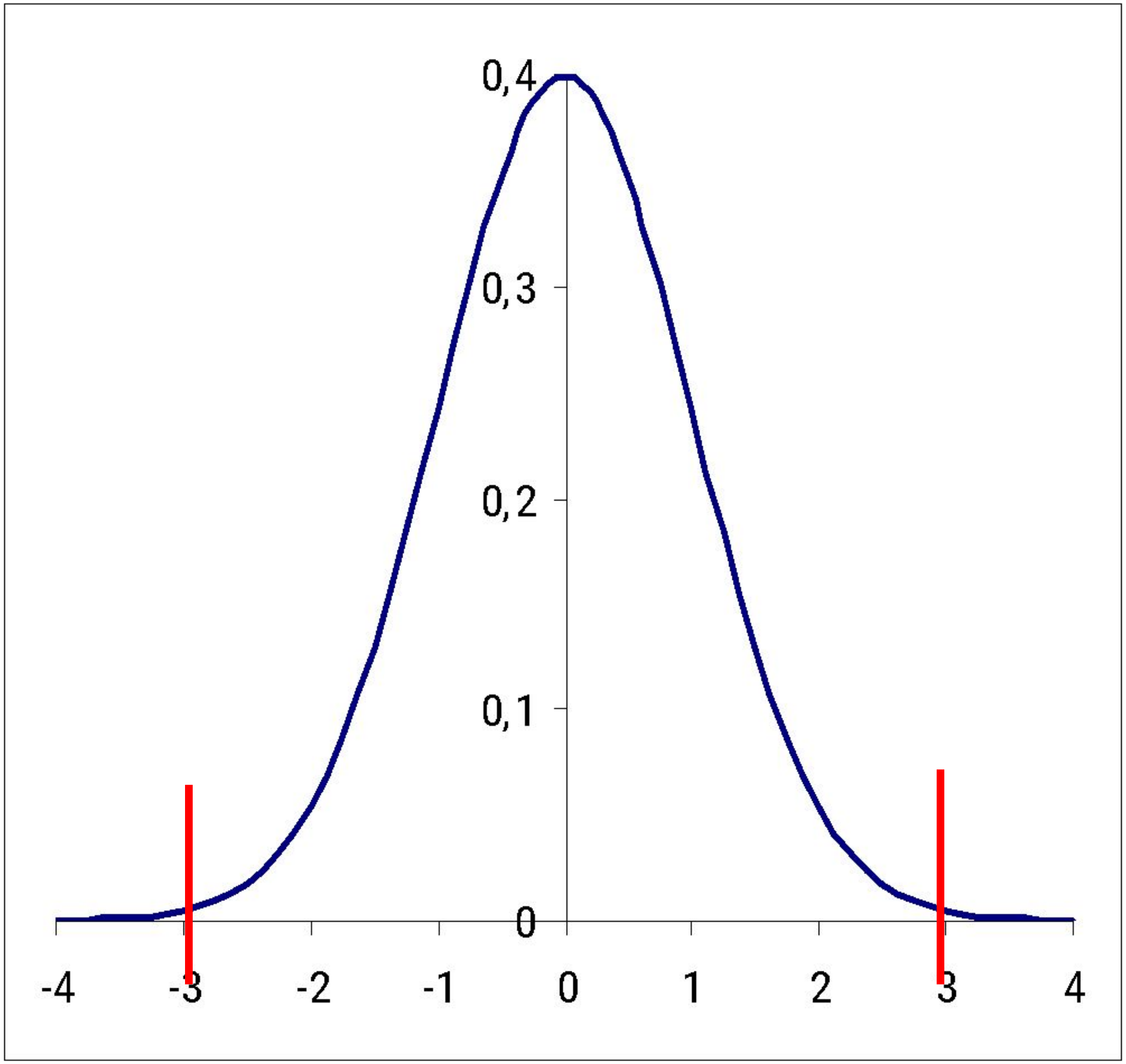



$\sigma = 3$

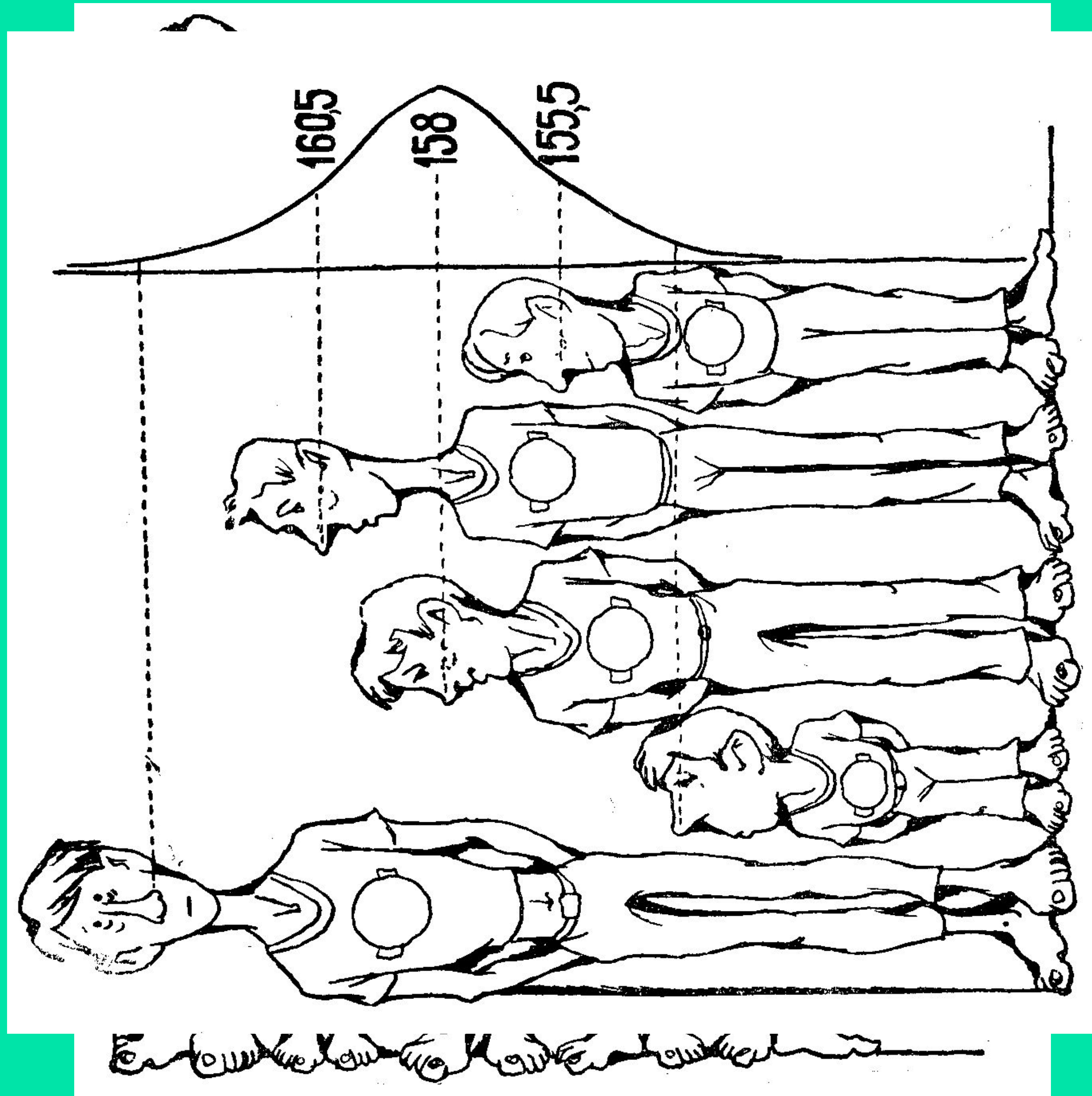
# Доска Гальтона



# Правило «трех сигм»




если случайная величина *X* имеет нормальный закон распределения с параметрами *a* и σ, то практически достоверно, что её значения заключены в интервале ($a$–3σ, $a$+3σ).


160,5
158
155,5

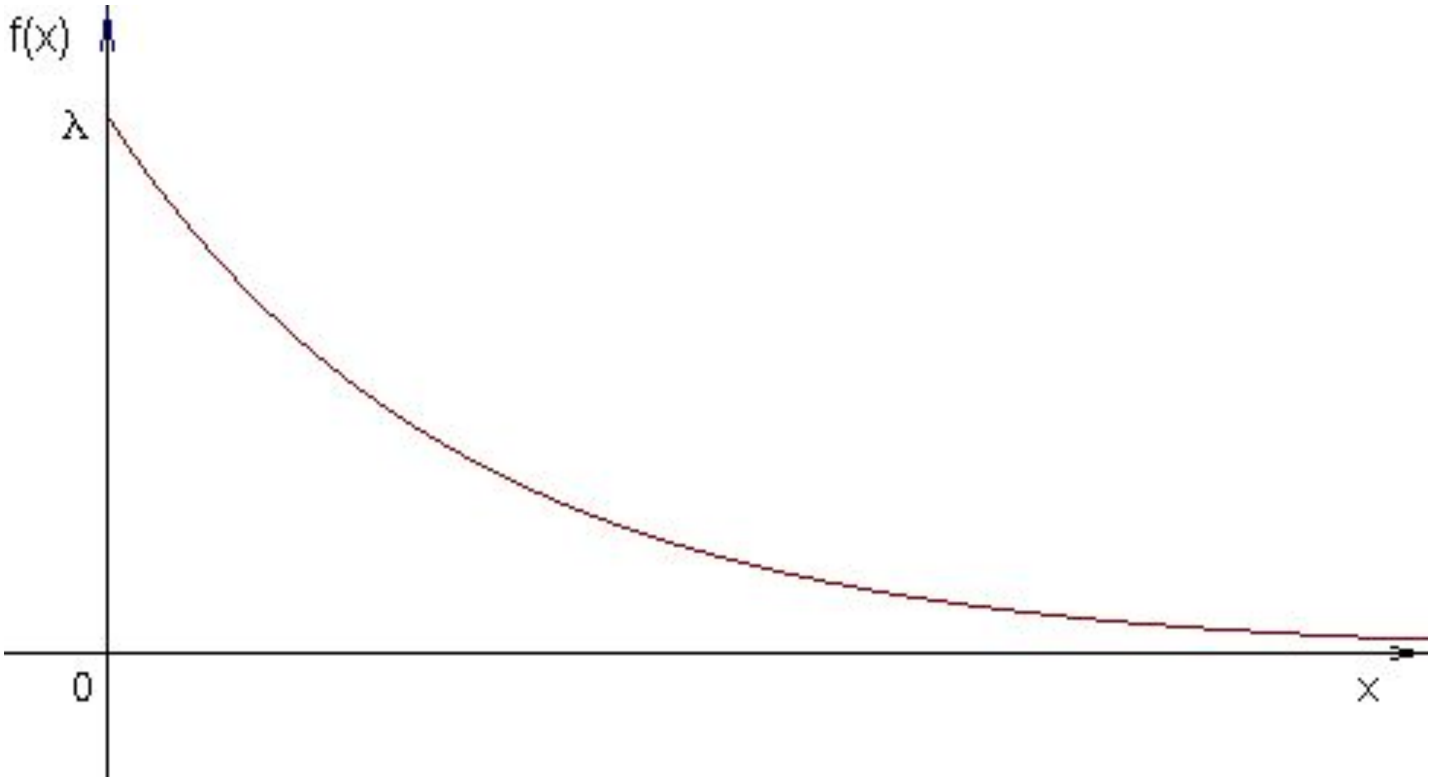
# Показательный (экспоненциальный) закон


Непрерывная случайная величина $X$ имеет ***показательный (экспоненциальный) закон распределения***, если её плотность вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0 \end{cases}$$

# Показательное распределение

## Кривая распределения



# Показательный закон

| | |
|---|---|
| Параметр | $\lambda$ |
| Математическое ожидание | $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ |
| Дисперсия | $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ |
| Среднее квадратическое отклонение | $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$ |
| Вероятность попадания СВ X в интервал [α, β], ([α, β]∈[*a*, *b*]) | $P(\alpha \le X \le \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$ |

# Пример

На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей.


Найти среднее время ожидание очередной машины контролером T, – если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону

$$f(t) = 5e^{-5t}$$

# Решение

$$f(t) = 5e^{-5t}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 5}$$

$$M(T) = 1/\lambda = 1/5(\text{часа}) = 12(\text{минут})$$

# Спасибо за внимание!