

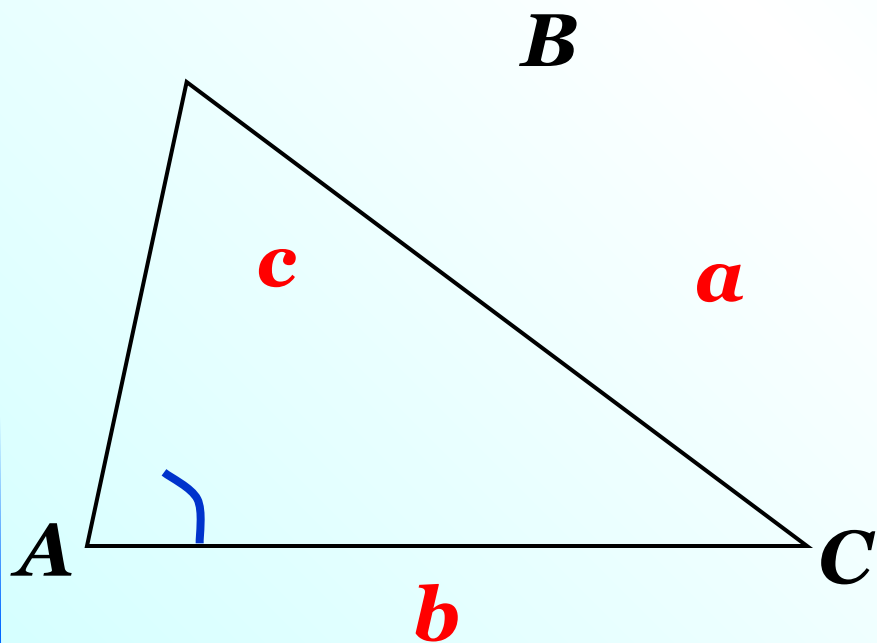


К л а с с н а я р а б о т а .

Решение задач.

Теорема косинусов.

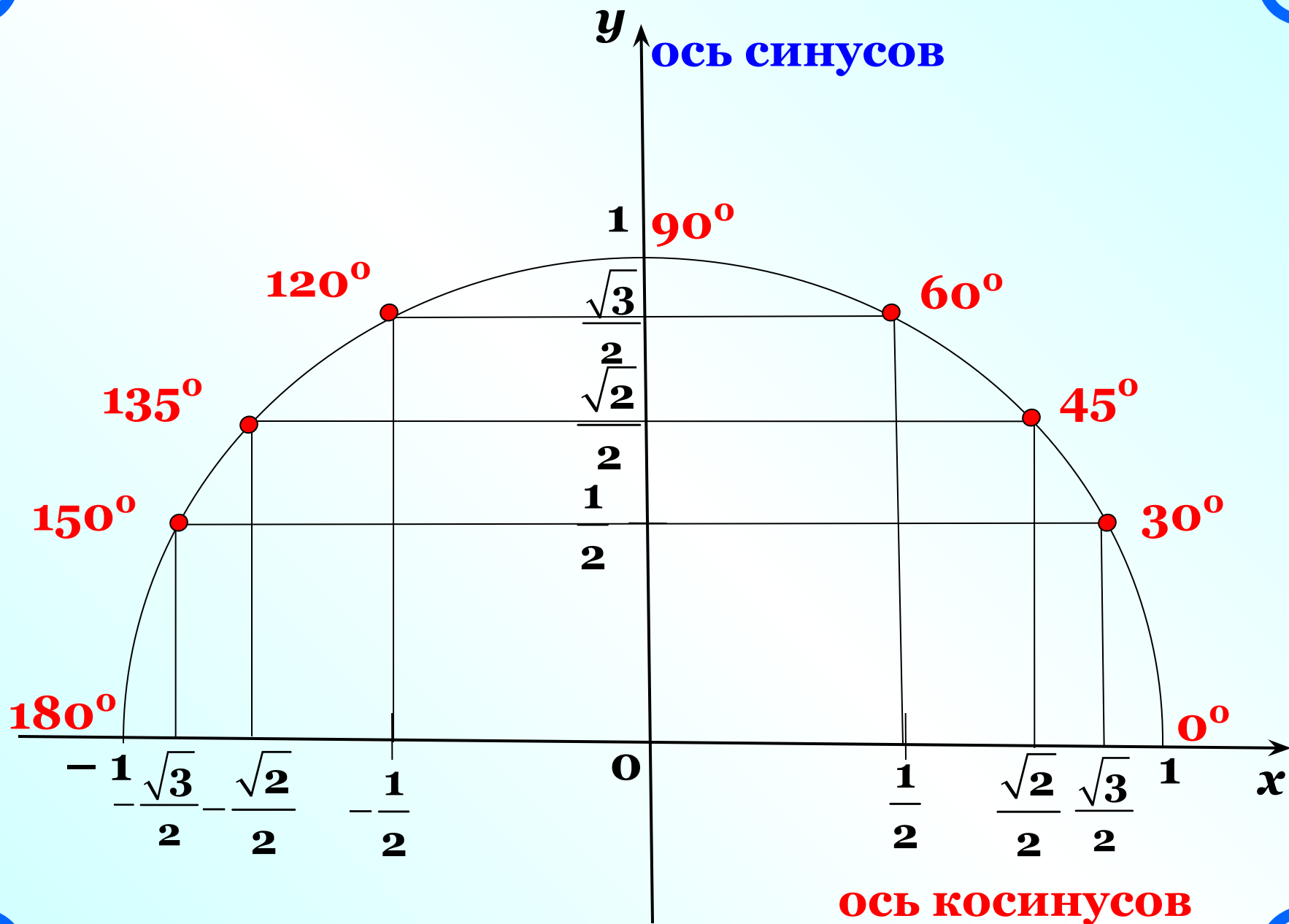
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



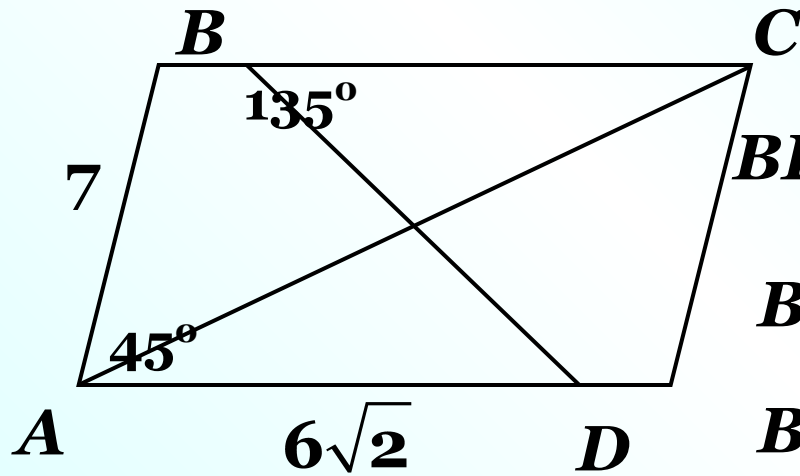
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



10. Стороны параллелограмма равны 7 см и $6\sqrt{2}$ см, а один из углов равен 45° . Найдите диагонали параллелограмма.



1) Рассмотрим $\triangle ABD$:

$$BD^2 = 7^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$$

$$BD^2 = 49 + 36 \cdot 2 - 2 \cdot 7 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BD^2 = 49 + 72 - 84$$

$$BD^2 = 37$$

$$BD = \sqrt{37}$$

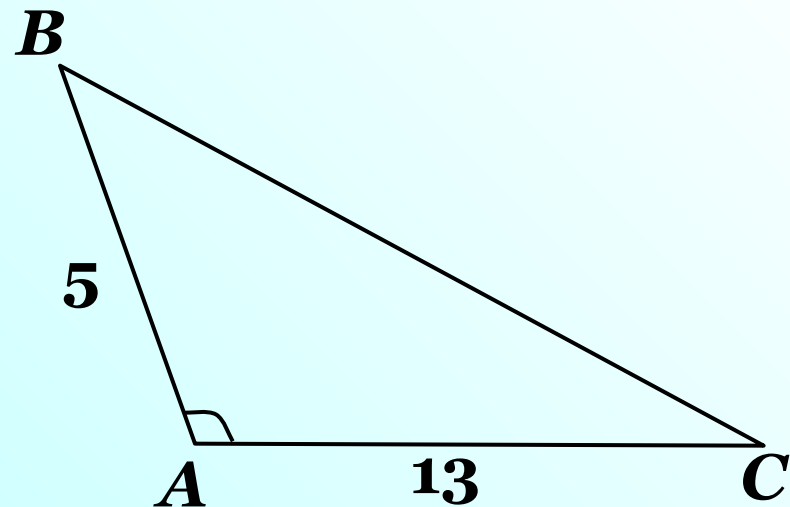
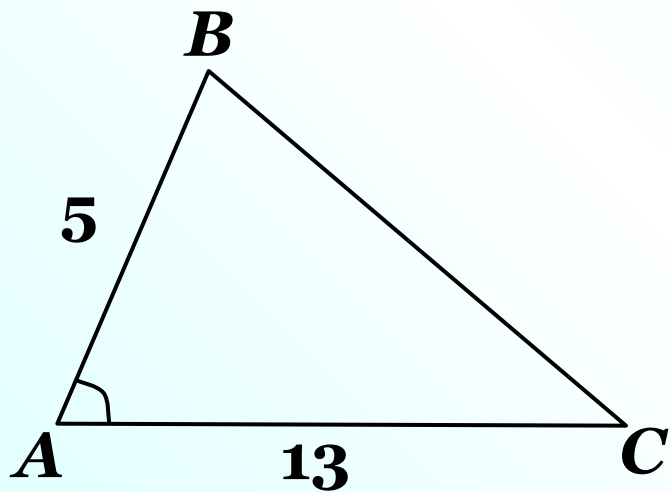
2) Рассмотрим $\triangle ABC$: $AC^2 = 49 + 72 + 84$

$$AC^2 = 205$$

$$AC = \sqrt{205}$$

Ответ: $\sqrt{37}$; $20\sqrt{5}$ см.

11. Две стороны треугольника равны 5 см и 13 см, а синус угла между ними равен $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Найдите третью сторону треугольника.



$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

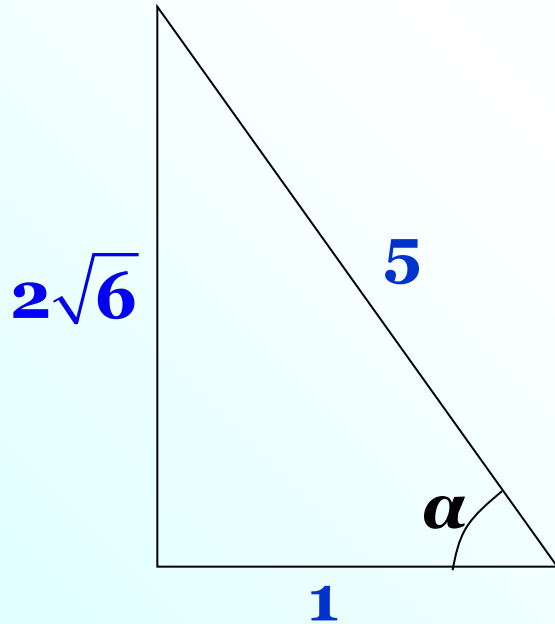
$$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \right)^2$$

$$\cos^2 A = 1 - \frac{24}{25}$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{25}$$

$$\cos A = \frac{1}{5} \text{ или } \cos A = -\frac{1}{5}$$

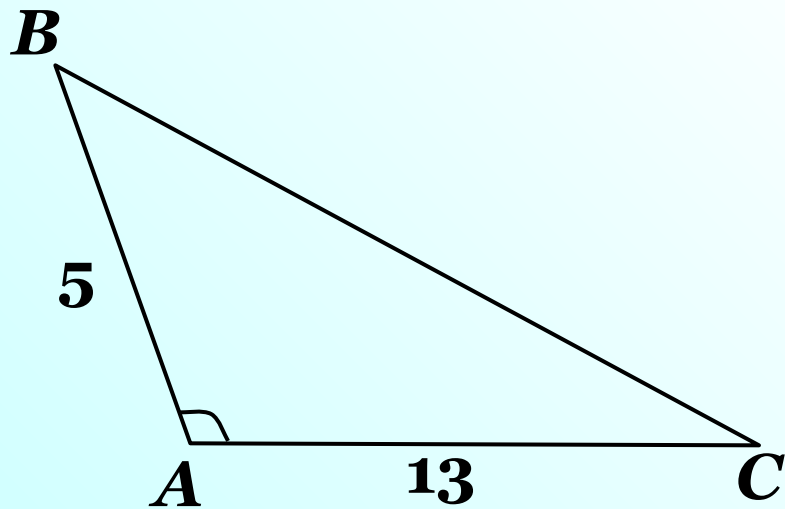
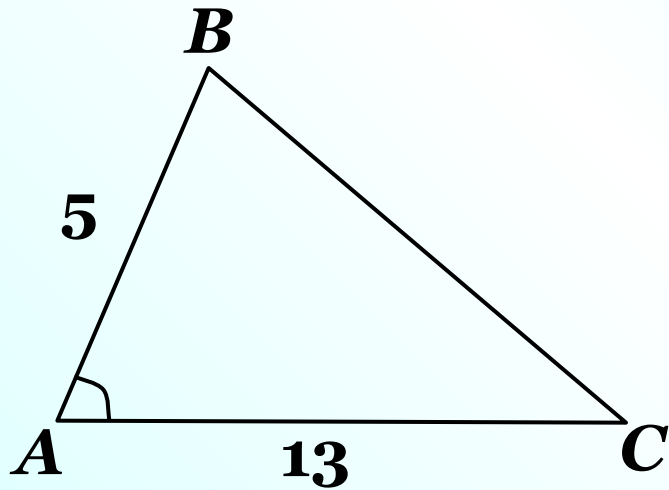
Найдите $\cos \alpha$, если: $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.



$$\sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{25 - 24} = 1$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

11. Две стороны треугольника равны 5 см и 13 см, а синус угла между ними равен $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Найдите третью сторону треугольника.



2) если $\cos \alpha = \frac{1}{5}$, то

$$BC^2 = 25 + 169 - 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot \frac{1}{5}$$

$$BC^2 = 25 + 169 - 26$$

$$BC^2 = 168$$

$$BC = \sqrt{168} = \sqrt{42}$$

3) если $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$, то

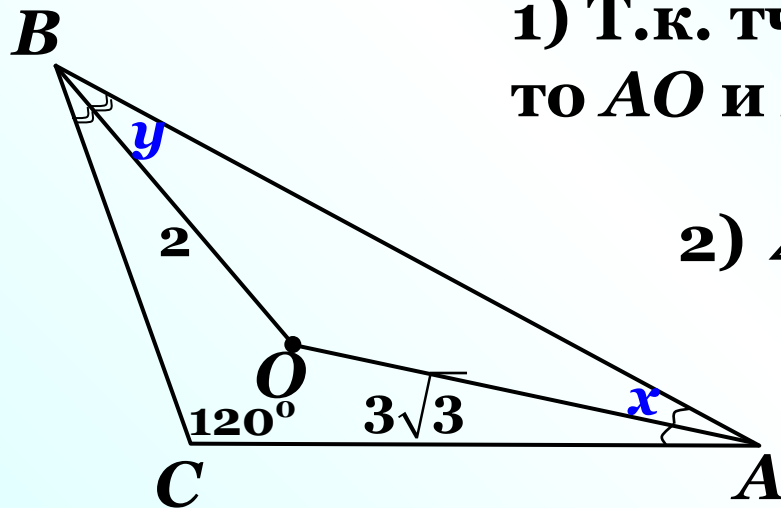
$$BC^2 = 25 + 169 + 26$$

$$BC^2 = 220$$

$$BC = \sqrt{220} = \sqrt{55}$$

Ответ: $\sqrt{42}$ или $2\sqrt{55}$ см.

12. Центр окружности, вписанной в треугольник ABC , удалён на 2 см и на $3\sqrt{3}$ см от вершин A и B соответственно. Найдите сторону AB , если $\angle C = 120^\circ$.



1) Т.к. тч. O – центр вписанной окр., то AO и BO – бис-сы углов A и B .

$$2) \angle A + \angle B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$3) 2x + 2y = 60^\circ$$

$$x + y = 30^\circ$$

$$\angle AOB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

4) Рассмотрим $\triangle AOB$:

$$AB^2 = 2^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot$$

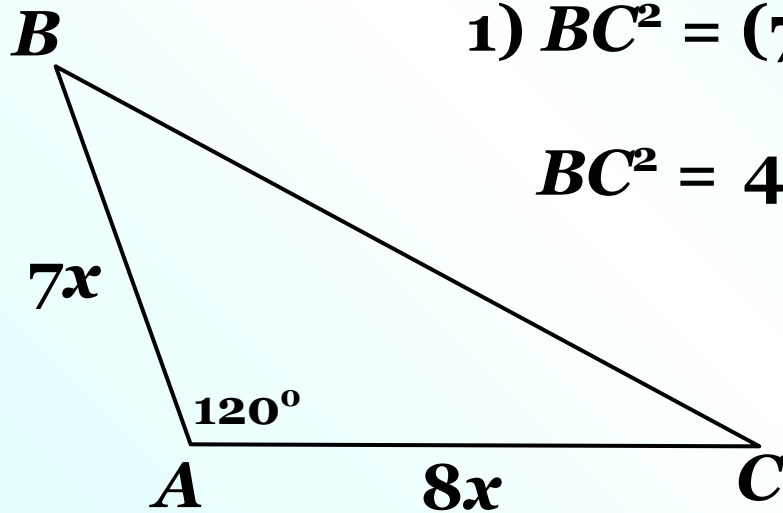
$$AB^2 = 4 + 27 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$AB^2 = 4 + 27 + 18$$

$$AB^2 = 49 \quad AB = 7 \text{ см}$$

Ответ: 7 см.

15. Две стороны треугольника относятся как 7 : 8, а угол между ними равен 120° . Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 84 см.



$$1) BC^2 = (7x)^2 + (8x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 8x \cdot \cos 120^\circ$$

$$BC^2 = 49x^2 + 64x^2 - \cancel{2} \cdot 56x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \right)$$

$$BC^2 = 169x^2$$

$$BC = 13x$$

$$2) 7x + 8x + 13x = 84$$

$$28x = 84$$

$$x = 3$$

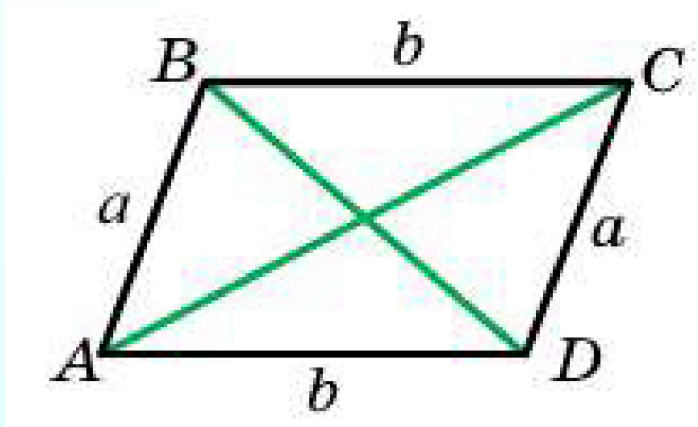
$$3) AB = 7x = 21 \text{ см}$$

$$AC = 8x = 24 \text{ см}$$

$$BC = 13x = 39 \text{ см}$$

Ответ: 21 см, 24 см, 39 см.

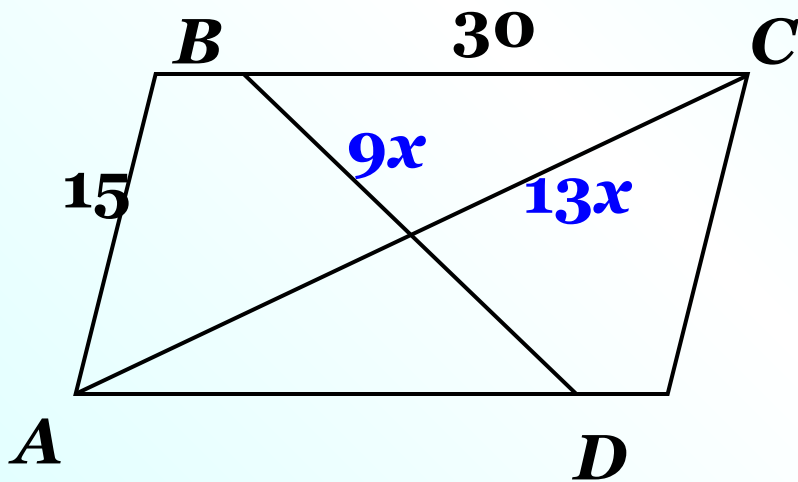
Теорема. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.



$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$BD^2 + AC^2 = 2(a^2 + b^2)$$

- 18.** Стороны параллелограмма равны 15 см и 30 см, а его диагонали относятся как 9 : 13. Найдите диагонали параллелограмма.



$$(9x)^2 + (13x)^2 = 2 \cdot (15^2 + 30^2)$$

$$81x^2 + 169x^2 = 2 \cdot 15^2 \cdot (1^2 + 2^2)$$

$$250x^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \quad | : 25$$

$$10x^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad | : 10$$

$$x^2 = 3^2$$

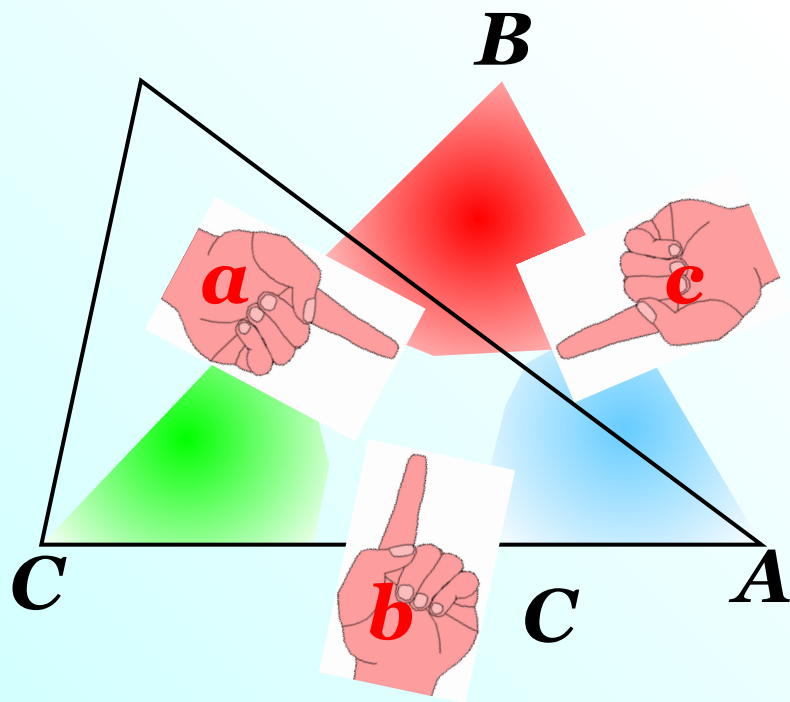
$$x_1 = 3 \quad x_2 < 0$$

Ответ: 27 см, 39 см.

Теорема синусов.

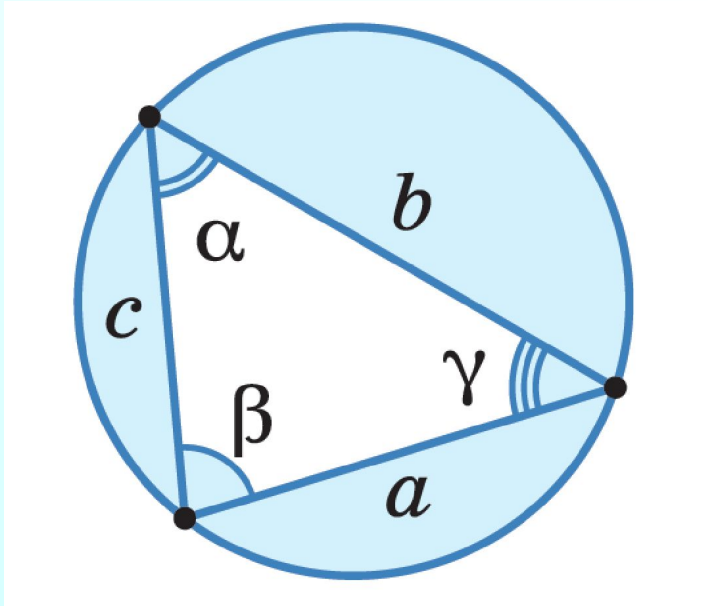
Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



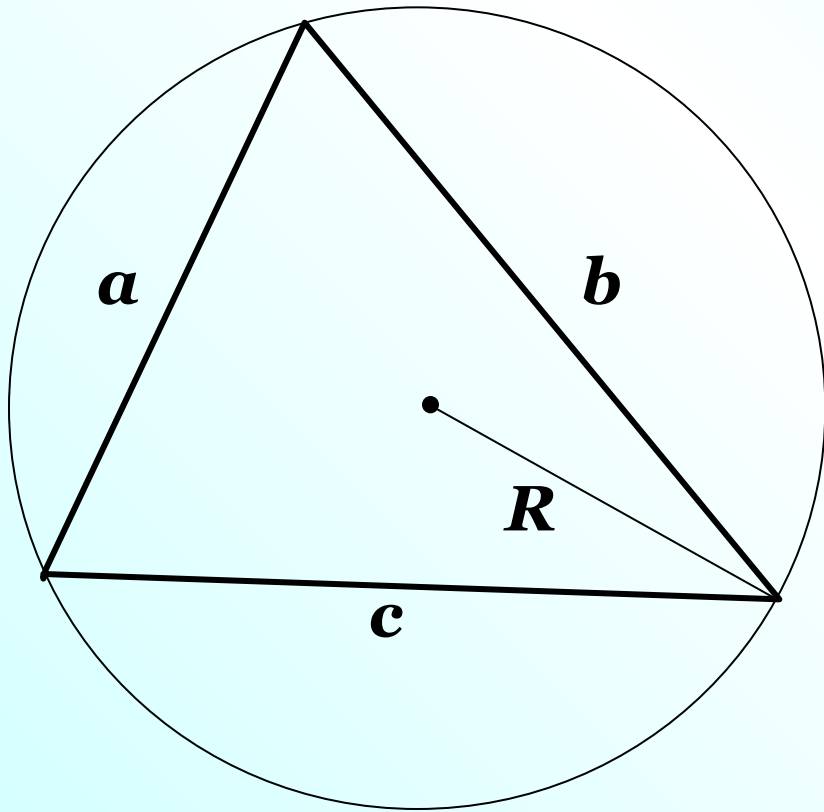
Обобщённая теорема синусов

Отношение любой стороны в треугольнике к синусу противоположного ей угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

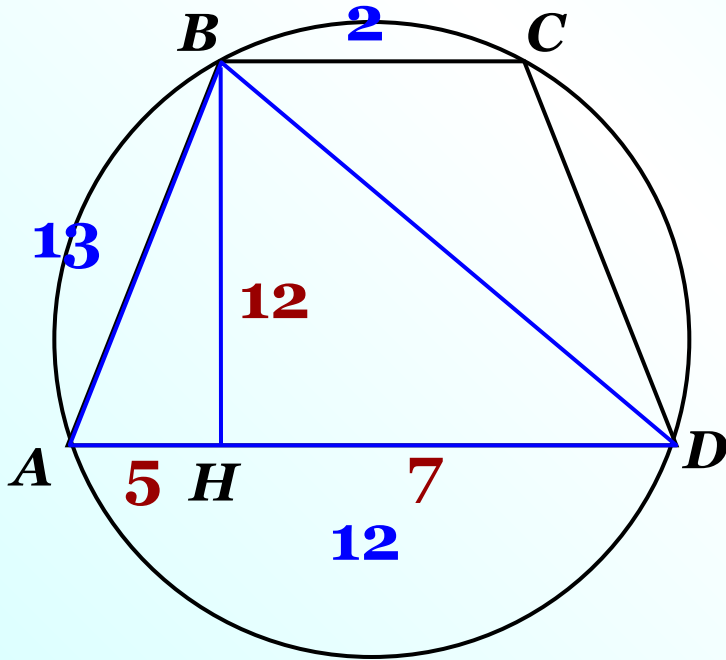
Формула площади треугольника.



$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

42. Основания равнобокой трапеции равны 2 см и 12 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.



1) По т. Пифагора из $\triangle BHD$:

$$BD = \sqrt{7^2 + 12^2}$$

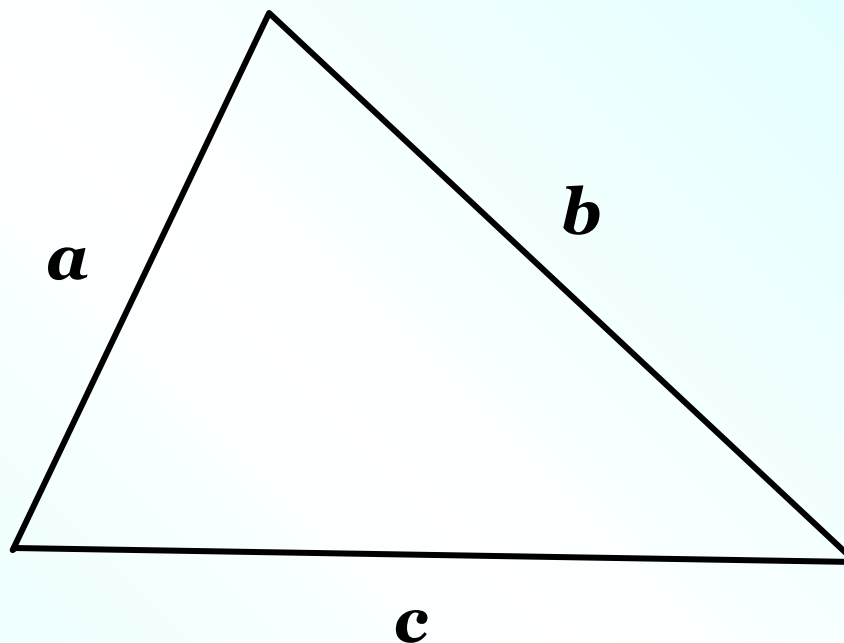
$$BD = \sqrt{193}$$

$$2) S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72$$

$$3) R = \frac{13 \cdot 12 \cdot \sqrt{193}}{4 \cdot 72} = \frac{13\sqrt{193}}{24}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{193}}{24}$ см.

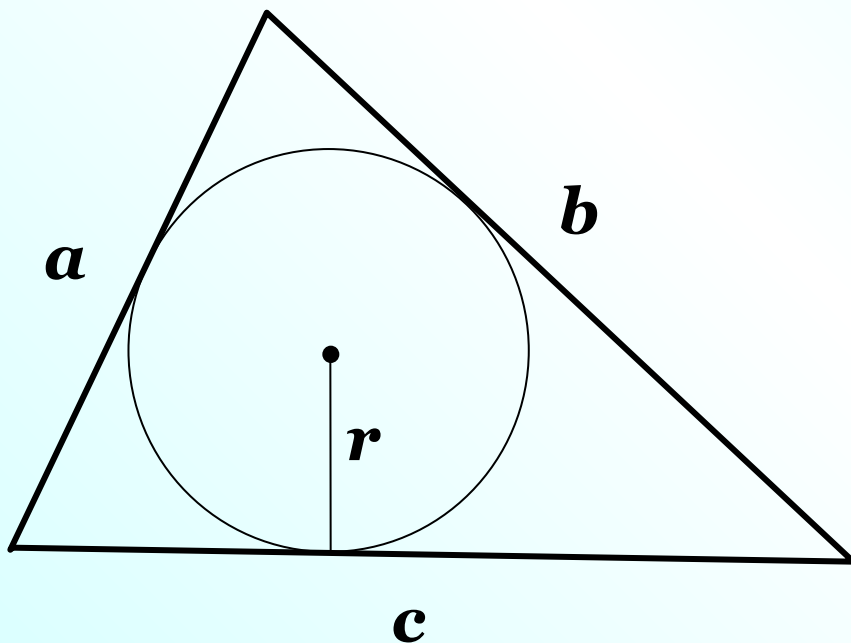
Формула площади треугольника (формула Герона).



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

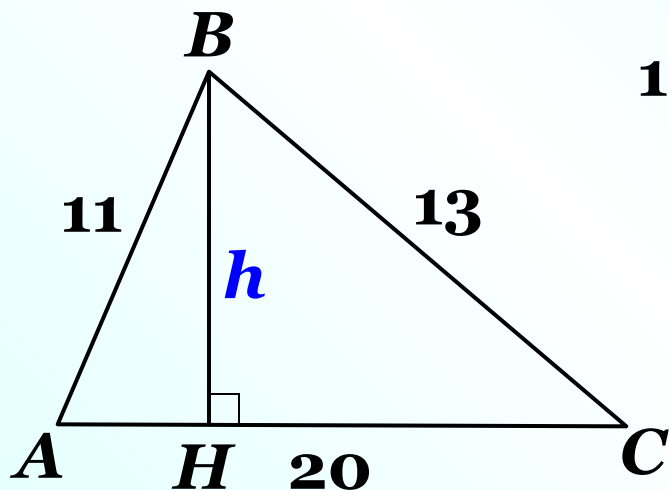
Формула площади треугольника.



$$S = \frac{1}{2} Pr$$

Формула часто применяется и для других многоугольников.

61. Стороны треугольника равны 11 см, 13 см и 20 см. Найдите наименьшую высоту треугольника, радиусы его вписанной и описанной окружностей.



$$1) S = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{11^2 \cdot 9 \cdot 2^2} = 11 \cdot 3 \cdot 2 = 66$$

$$2) 66 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 20$$

$$10h = 66$$

$$h = 6,6 \text{ см}$$

$$3) 66 = 22r$$

$$r = 3 \text{ см}$$

$$4) R = \frac{11 \cdot 13 \cdot 20}{4 \cdot 66} = \frac{65}{6} = 10 \frac{5}{6} \text{ см}$$

Ответ: 6,6 см; 3 см; $10 \frac{5}{6}$ см

Дома:

- 10.** Диагонали параллелограмма равны 6 см и $4\sqrt{3}$ см, а угол между ними равен 30° . Найдите стороны параллелограмма.
- 18.** Диагонали параллелограмма равны 30 см и 50 см, а его стороны относятся как 8 : 19. Найдите стороны параллелограмма.