Автоматика и управление

Тема 6. Качество ЛСС

Лекция 7. Показатели качества устойчивых ЛСС и методы их определения. Точность ЛСС в установившемся режиме при действии медленноменяющихся входных сигналов.

Качество - обобщенное понятие, определяющее степень работоспособности устойчивых ЛСС.

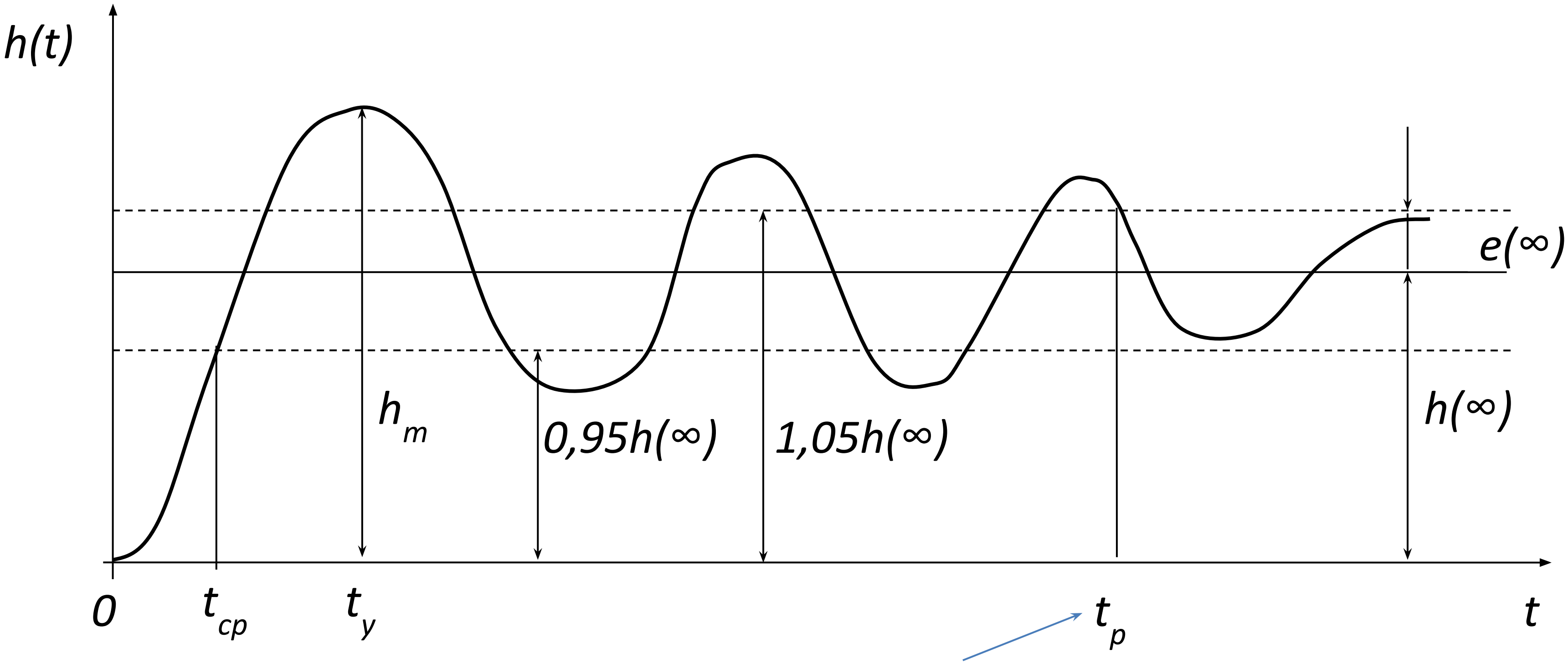
степень устойчивости; быстродействие; точность.

6.1. Показатели качества устойчивых ЛСС и методы их определения

Показатели качества определяются по динамическим характеристикам АС.
Прямые показатели качества : величина перерегулирования Δh_m (σ), время регулирования t_p (время переходного процесса), ошибка в установившемся режиме $e(t)$.
Косвенные: запасы устойчивости $\phi_з$, $L_з$, интегральные оценки качества и др.

Различают точные и приближенные методы определения показателей качества.
Точные методы основаны на анализе переходных процессов или аналитических выражений передаточных функций АС.

По графику переходной функции *h(t)* определяются следующие прямые показатели качества:



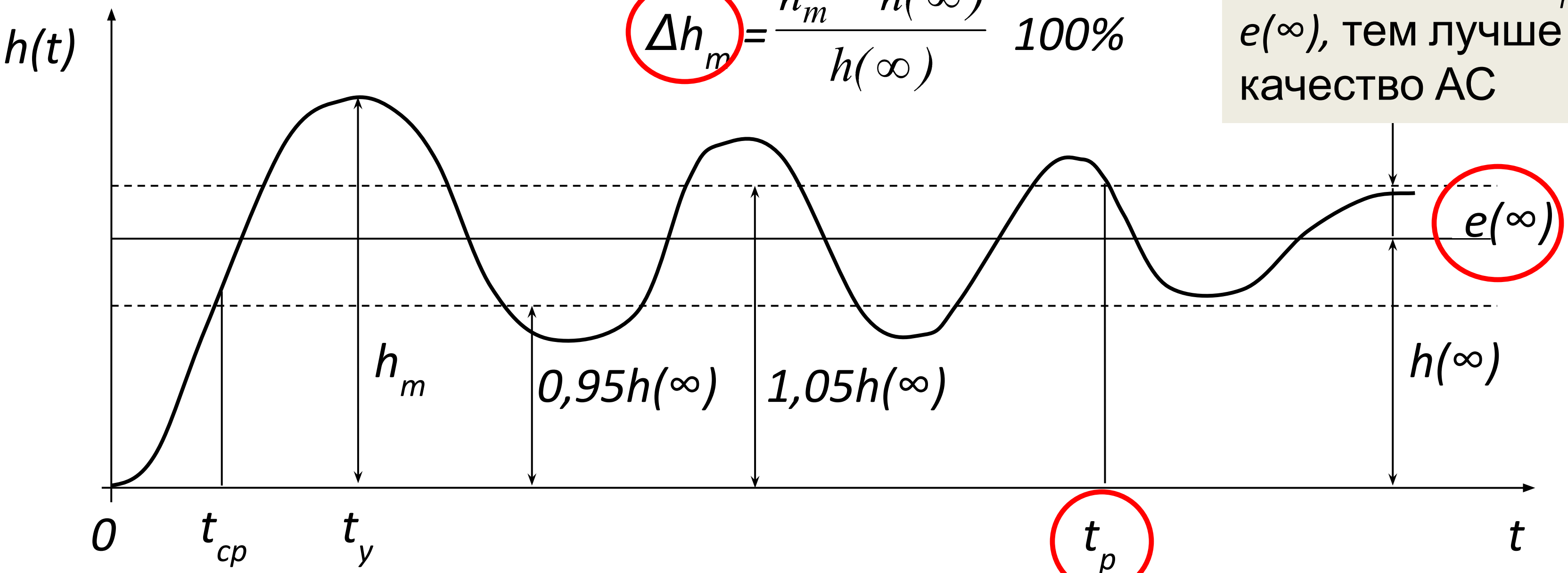
Время регулирования t_p *- время установления переходного процесса с точностью до 5% относительно установившегося значения переходной функции h(∞).*

Значение выходного сигнала принято считать установившимся по истечении $3t_p$ с момента подачи на вход системы задающего воздействия.

Перерегулирование Δh_m *- относительный максимальный выброс переходной функции $h(t)$*

$$\Delta h_m = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} 100\%$$

чем меньше Δh_m, t_p и $e(\infty)$, тем лучше качество АС



Время срабатывания $t_{ср}$ *- время достижения переходной функцией величины $0{,}95h(\infty)$*

Время установления $t_у$ *- время достижения переходной функцией первого максимума.*

Число колебаний *(максимумов)* $N_к$ *переходной функции за время регулирования.*

Ошибка в установившемся режиме $e(\infty)$ *- разность между задающим воздействием и установившемся значением выходного сигнала (для статических следящих систем).*

Приближенные методы определения показателей качества основаны на анализе частотных характеристик АС.

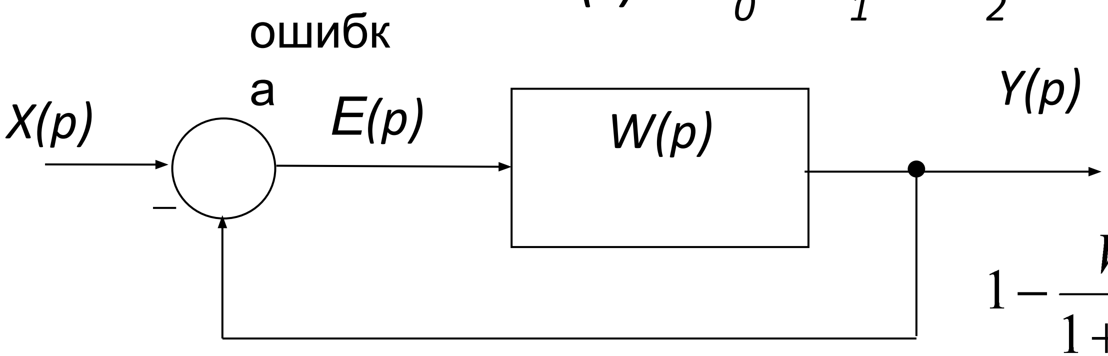
Запасы устойчивости $\boldsymbol{\varphi_з}$ **и** $\boldsymbol{L_з}$**, полоса пропускания** $\boldsymbol{\omega_п}$

Важным показателем качества является **точность отработки** АС **задающего воздействия** в установившемся режиме.

6.2. Точность ЛСС в установившемся режиме при действии медленноменяющихся входных сигналов

Методика определения ошибки следящей ЛСС в установившемся режиме, при воздействии на ее вход медленноменяющегося полезного входного сигнала:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$



$$1 - \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{1+W(p)-W(p)}{1+W(p)}$$

$$E(p) = X(p) - Y(p) = X(p) - \Phi(p)X(p) = [1-\Phi(p)]X(p) = \frac{1}{1+W(p)}X(p) = S(p)X(p)$$

Допустим, что передаточная функция АС по ошибке $S(p)$ представляет собой полином n-й степени относительно p:

$$S(p) = S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \ldots$$

Ряд Тейлора – $f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

S(p) можно разложить в ряд Тейлора в точке *p=0*, поскольку *S(p)* рациональная функция и точка *p=0* не является ее полюсом ($a_0 \neq 0$) т.к. АС устойчива:

$$S(p) = S(0) + \frac{p}{1!} S^{(1)}(0) + \frac{p^2}{2!} S^{(2)}(0) + \ldots$$

Обозначив $S(0) = S_0$; $\frac{S^{(1)}(0)}{1!} = S_1$ $\frac{S^{(2)}(0)}{2!} = S_2$, ...

получим

$$S(p) = S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \ldots$$

Тогда изображение ошибки системы определится равенством:

$$E(p) = S(p)X(p) = (S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \ldots)X(p) = S_0 X(p) + S_1 p X(p) + S_2 p^2 X(p) + \ldots$$

Применив операцию $L^{-1}[E(p)]$

$$e(t) = S_0 x(t) + S_1 x^{(1)}(t) + S_2 x^{(2)}(t) + \ldots$$

Коэффициенты S_i, разложения передаточной функции S(p) в степенной ряд относительно переменной p называются ***коэффициентами ошибок****.*

Как вычислить S_i?

$$S(p)=\frac{в_m p^m + в_{m-1} p^{m-1} + \dots + в_1 p + в_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$\frac{в_m p^m + в_{m-1} p^{m-1} + \dots + в_1 p + в_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \dots$$

$$в_m p^m + в_{m-1} p^{m-1} + \dots + в_1 p + в_0 = (S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \dots)(a_n p^n + \dots + a_0);$$

$$в_m p^m + в_{m-1} p^{m-1} + \dots + в_1 p + в_0 = S_0 a_0 + (S_0 a_1 + S_1 a_0) p + \dots;$$

два полинома равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях аргумента *p* левой и правой частей равенства.

Количество коэффициентов обусловлено минимальным порядком производной входного сигнала *x(t),* равной нулю.

$$
\begin{array}{l|l}
p^0 & в_0 = S_0 a_0 \Rightarrow S_0 = \dfrac{в_0}{a_0} \\
p^1 & в_1 = S_0 a_1 + S_1 a_0 \Rightarrow S_1 = \dfrac{1}{a_0}(в_1 - a_1 S_0); \\
\vdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Пример: $x(t) = t+2t^2$,

$$x^{(1)}(t) = 1+4t,\ \ x^{(2)}(t) = 4,\ \ x^{(3)}(t) = x^{(4)}(t) = \ldots = 0,$$

следовательно, число коэффициентов ошибок, подлежащих определению, равно 3: S_0, S_1, S_2, т.к. ошибка АС в установившемся режиме для такого сигнала будет определяться равенством:

$$e(t) = S_0 x(t)+S_1\, x^{(1)}(t)+S_2\, x^{(2)}(t).$$

Методику можно применить для нахождения выходного сигнала системы $y(t)$, при этом коэффициенты $\widetilde{S}_i$ вычисляются из передаточной функции $\Phi(p)$.

Пример

:

$$x(t) = 5-6t+7t^2; \quad \Phi(p) = \frac{K}{T^2p^2+2T\xi p+1}$$

где $T = 1$, $K = 1$, $\xi = 0{,}5$

Определим $y(t)$:

$$y(t) = \tilde{S}_0 x(t) + \tilde{S}_1 x^{(1)}(t) + \tilde{S}_2 x^{(2)}(t) + \ldots$$

$$x^{(1)}(t) = -6+14t, \quad x^{(2)}(t) = 14, \quad x^{(3)}(t) = 0.$$

необходимо вычислить 3 коэффициента: $\tilde{S}_0, \tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$

$$K/(T^2p^2+2T\xi p+1) = \tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 p + \tilde{S}_2 p^2 + \ldots \;;$$

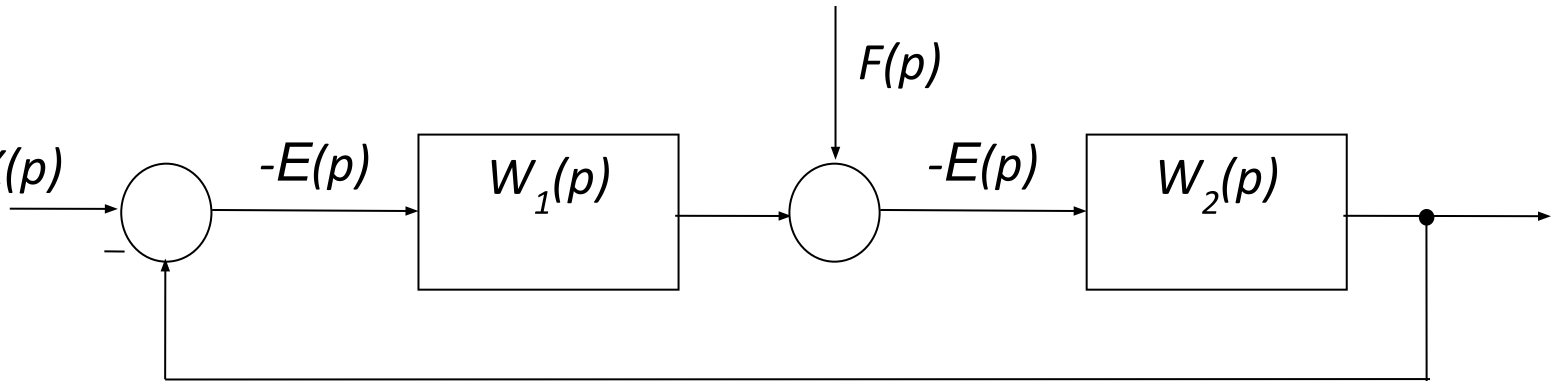
$$K = (T^2p^2+2T\xi p+1)(\tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 p + \tilde{S}_2 p^2 + \ldots);$$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & K = \tilde{S}_0 = \Phi(0) = 1, \\ p^1 & 0 = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_0 2T\xi \Rightarrow \tilde{S}_1 = -2T\xi K = -1, \\ p^2 & 0 = \tilde{S}_0 T^2 + \tilde{S}_1 2T\xi + \tilde{S}_2 \Rightarrow \tilde{S}_2 = KT^2(4\xi^2 - 1) = 0. \end{array}$$

$y(t) = (5-6t+7t^2)-(-6+14t) =$
$=11-20t+7t^2$

Если на следящую ЛСС действует несколько входных сигналов, то в силу линейности АС, справедливо равенство:

$$E(p) = E_X(p)+E_F(p) = \Phi_{XE}(p)X(p)+\Phi_{FE}(p)F(p)$$



$$\Phi_{XE}(p)=S(p)=-\frac{1}{1+W(p)}, \quad \Phi_{FE}(p)=\frac{W_2}{1+W(p)}, \quad W(p) = W_1(p)W_2(p)$$

$$S(p)=\frac{B_x(p)}{A_x(p)} = S_0+S_1p+S_2p^2+\dots \qquad \Phi_{FE}(p)=\frac{B_F(p)}{A_F(p)} = \tilde{S}_0+\tilde{S}_1 p+\tilde{S}_2 p^2+\dots;$$

Определяются коэффициенты ошибок

$$B_X(p) = (S_0+S_1p+\dots.)A_X(p) \qquad B_F(p) = (\tilde{S}_0+\tilde{S}_1 p+\dots)A_F(p)$$

Ошибка системы в установившемся режиме:

$$e(t) = e_x(t)+e_f(t)$$

$e_x(t)=S_0x(t)+S_1x^{(1)}(t)+S_2x^{(2)}(t)+\dots$ -составляющая ошибки от задающего сигнала

$$e_f(t) = \widetilde{S}_0 f + \widetilde{S}_1 f^{(1)} p + \widetilde{S}_2 f^{(2)} p^2 + \dots$$

- составляющая ошибки от сигнала помехи.

Полученный результат можно обобщить для любого количества входных сигналов, действующих на ЛСС.

6.3. Статические и астатические системы

ЛСС по отношению к входному сигналу x(t) называется ***статической***, ***если начальный коэффициент ошибки S_0 отличен от нуля:***

$$S_0 \neq 0$$

Статическая, по отношению к полезному входному сигналу, АС - это такая, ошибка которой в установившемся режиме не равна нулю при постоянном входном сигнале, т.е., если

$x(t) = a = const,$ то $e(t) = S_0 x(t) \neq 0.$

ЛСС по отношению к входному сигналу x(t) называется ***астатической v-го порядка***, ***если первые v коэффициентов ошибки подряд равны 0, то есть:***

$$S_0 = 0,\quad S_1 = 0, \ldots, S_{v-1} = 0,\quad S_v \neq 0.$$

Например
:

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_1 \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{ЛСС первого поряд} - \\ \textit{ка астатизма } \nu = 1; \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_1 = 0 \\ S_2 \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{ЛСС второго} \\ \textit{порядка ас -} \\ \textit{татизма } \nu = 2; \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_1 \neq 0 \\ S_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{ЛСС первого} \\ \textit{порядка ас -} \\ \textit{татизма } \nu = 1. \end{array}$$

1. Ошибка системы *e(t)* в установившемся режиме равна *0*, если $v > k$, т.е. $e(t) = 0$, *если* $v > k$ и описывается полиномом порядка $(k\text{-}v)$, если $v \leq k$,

$$e(t) = \sum_{i=0}^{k-\nu} a_i t^i$$ если $v \leq k$

где *k* - порядок полинома, описывающего входной сигнал.

2. Чем выше порядок астатизма АС, тем она принципиально точнее.
3. Ошибка АС тем меньше, чем меньше коэффициенты ошибки.

Основное (необходимое и достаточное) условие астатизма

ЛСС по отношению к входному сигналу x(t) является астатической ν-го порядка тогда и только тогда, когда в передаточной функции АС по ошибке от этого входного сигнала:

$$\Phi_{XE}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_{\mathrm{i}} p^{i}}{\sum_{i=0}^{n} a_{\mathrm{i}} p^{i}}$$

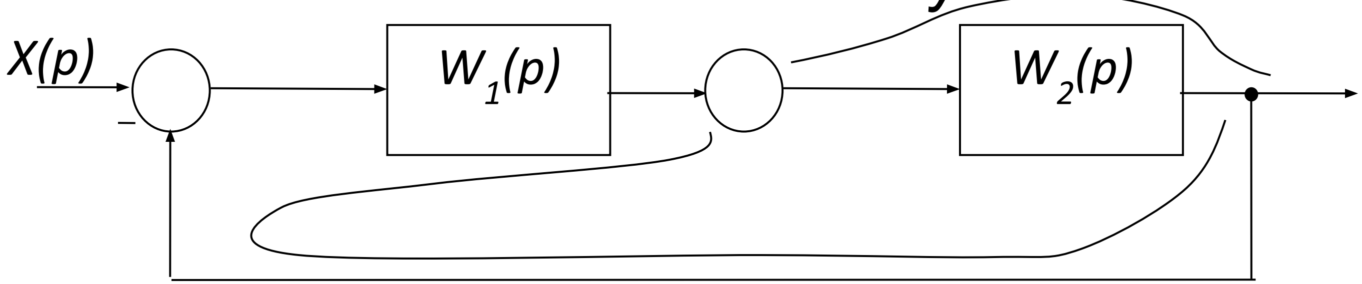
имеется ν дифференцирующих звеньев

$$\Phi_{XE}(p) = \frac{p^{\nu}\widetilde{B}(p)}{A(p)} = \frac{p^{\nu}(b_m p^{m-\nu} + \dots + b_{\nu+1} p + b_{\nu})}{a_n p^{n} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Порядок астатизма замкнутой ЛСС по отношению к задающему воздействию равен числу интегрирующих звеньев в передаточной функции разомкнутой системы.

$$S(p)=\frac{1}{1+W(p)}$$

Порядок астатизма ЛСС по отношению к возмущению, равен числу интегрирующих звеньев i, включенных между входом возмущения и выходом системы против хода сигнала, или числу дифференцирующих звеньев d, включенных между входом возмущения и выходом системы по ходу сигнала

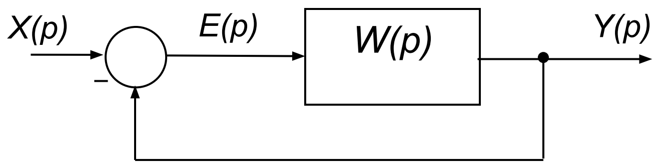


Если структурная схема АС содержит как интегрирующее *i*, так и дифференцирующие *d* звенья, включенные между входом возмущения и выходом системы соответственно против и по ходу сигнала, то порядок астатизма системы по отношению к возмущению равен максимальному из чисел *i* или *d*.

Влияние коэффициента усиления разомкнутой системы на ошибку ЛСС

Если передаточная функция разомкнутой следящей системы

$$W(p)=\frac{d_0+d_1p+\dots+d_{m-1}p^{m-1}+d_mp^m}{C_0+C_1p+\dots+C_{n-1}p^{n-1}+C_np^n},$$



то, передаточная функция по ошибке от задающего воздействия

$$\Phi_{XE}(p)=\frac{1}{1+W(p)}=\frac{C_0+C_1p+\dots+C_{n-1}p^{n-1}+C_np^n}{(C_0+d_0)+(C_1+d_1)p+\dots+(C_m+d_m)p^m+\dots+C_np^n}$$

с другой стороны $\Phi_{XE}(p)=$ $S_0+S_1p+S_2p^2+\dots$

Тогда $(C_0+C_1p+\dots+C_np^n)=(S_0+S_1p+\dots)[(C_0+d_0)+(C_1+d_1)p+\dots+C_np^n]$,

а

$$\begin{array}{l|l} p^0 & C_0=S_0(d_0+C_0) \\ p^1 & C_1=S_0(C_1+d_1)+S_1(C_0+d_0) \quad \text{и т.д.} \end{array}$$

Если АС статическая, то $C_0\neq 0$

Пусть $C_0=1$, тогда $W(0)=d_0=K$ - коэффициент усиления разомкнутой системы. $\longrightarrow$ $S_0=\dfrac{1}{K+1}$ $\boxed{\downarrow e(t)=\dfrac{a}{\uparrow K+1}}$

Допустим, что $x(t)=a=const$. $\longrightarrow$ $e(t)=S_0a=\dfrac{a}{K+1}$

Ошибка статической АС в отработке постоянного входного сигнала уменьшается при увеличении коэффициента усиления разомкнутой системы.

вывод справедлив не только для статических АС, но и для всех астатических систем

АС астатичная 1 порядка *(v=1)*. Тогда, согласно основному условию астатизма, коэффициенты $C_0=0$, а $C_1 \neq 0$.

$$\begin{array}{l|l} p^0 & C_0 = S_0(d_0 + C_0) \\ p^1 & C_1 = S_0(C_1 + d_1) + S_1(C_0 + d_0) \quad \text{и т.д.} \end{array}$$

Пусть $C_1 = 1$, а $d_0 = K$. Тогда $S_0 = 0$, $S_1 = 1/K$

Допустим, что $x(t) = a_0 + a_1 t$, тогда $x^{(1)}(t) = a_1 = const$

$$e(t) = S_0 x(t) + S_1 x^{(1)}(t) = \frac{x^{(1)}(t)}{K} = \frac{a_1}{K}$$

Ошибка астатической системы I порядка в отработке линейно изменяющегося задающего воздействия равна отношению скорости изменения входного сигнала к коэффициенту усиления разомкнутой системы.

Связь коэффициентов a_i, $в_i$ передаточной функции замкнутой системы с порядком ее астатизма v

Пусть передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{d_0 + d_1 p + \dots + d_{m-1} p^{m-1} + d_m p^m}{C_0 + C_1 p + \dots + C_{n-1} p^{n-1} + C_n p^n},$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{в_0 + в_1 p + \dots + в_{m-1} p^{m-1} + в_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n}$$

где $в_0 = d_0$, $в_1 = d_1, \dots,$ $в_m = d_m$; $a_0 = C_0 + d_0$, $a_1 = C_1 + d_1, \dots,$ $a_m = (C_m + d_m), \dots,$ $a_n = C_n$.

Пусть $v=1$, тогда $C_0 = 0$, а $C_1 \neq 0$.
Сравнивая коэффициенты a_i и $в_i$ - $a_0 = в_0$, а $a_1 \neq в_1$ и $\Phi(p)_{p=0} = 1$.

Пусть $v=2$, тогда $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. В этом случае очевидно, что $в_0 = a_0$, $в_1 = a_1$, $в_2 \neq a_2$.

Порядок астатизма замкнутой АС по отношению к задающему воздействию определяется числом равных друг другу первых (с младшими индексами) коэффициентов a_i и $в_i$ ее передаточной функции.

6.4. Оценка качества переходного процесса по распределению корней характеристического уравнения АС

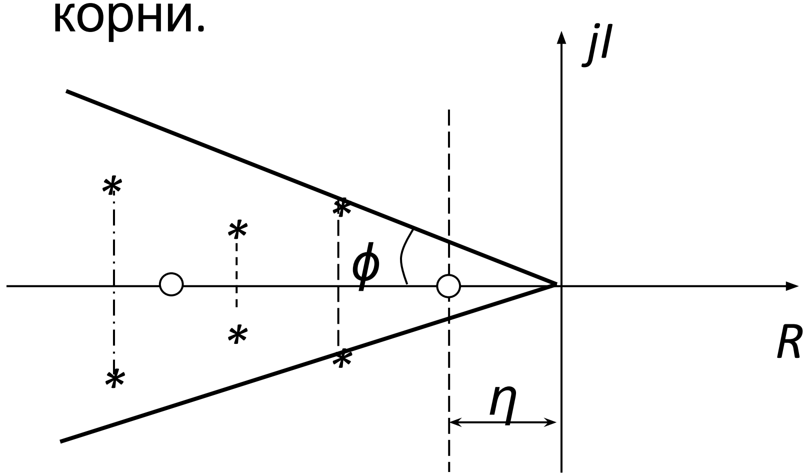
Рассмотрим передаточную функцию устойчивой АС, не имеющую нулей:

$$\Phi(p) = \frac{K}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

полюса (корни *A(p)=0*) расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

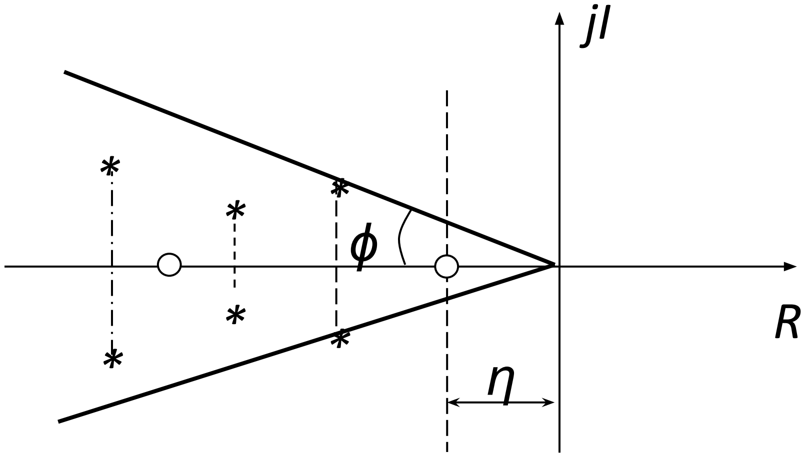
о - вещественный корень,

* - комплексно-сопряженные корни.



Степень колебательности $\mu = tg\phi$, где ϕ - половина угла минимального центрального сектора, охватывающего все полюса передаточной функции АС.

Степень устойчивости η - удаление от мнимой оси ближайших к ней действительного или пары комплексно - сопряженных корней характеристического уравнения.



Ближайшему к мнимой оси полюсу соответствует медленно изменяющаяся составляющая переходной функции, следовательно, величина η определяет время регулирования АС. Очень грубо можно принимать

$$\boxed{t_p \approx \frac{3}{\eta}}$$

Степень колебательности $\mu = tg\phi$ тесно связана с перерегулированием АС Δh_m . Если два полюса системы комплексно-сопряженные, а остальные действительные, то

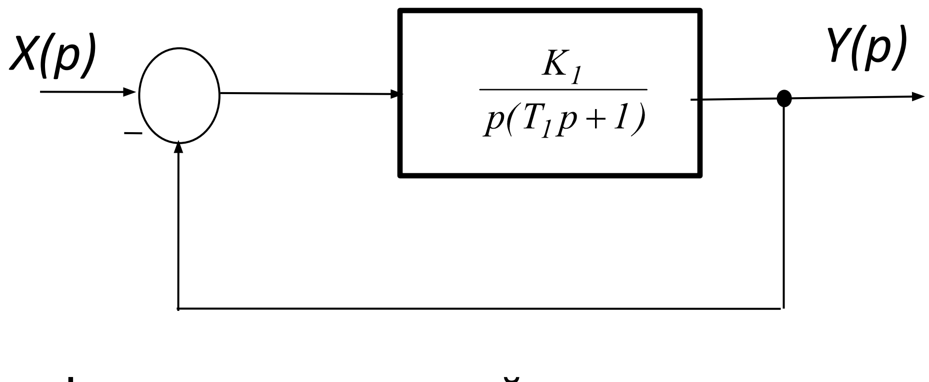
$\Delta h_m \leq e^{-\pi/\mu} \cdot 100\%$ - формула Фельдбаума А.А.

В общем случае данная зависимость позволяет оценить верхнюю границу перерегулирования. Из нее следует, что для уменьшения Δh_m необходимо уменьшить μ (т.е. угол ϕ).

При наличии нулей в передаточной функции АС их расположение на комплексной плоскости необходимо также учитывать при оценке качества переходного процесса. В частности, чем ближе они расположены к мнимой оси, тем больше Δh_m

6.5. Связь показателей качества замкнутой АС с параметрами ЛЧХ разомкнутой системы

Рассмотрим на примере АС второго порядка



Передаточная функция замкнутой АС

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K_1}{T_1 p^2 + p + K_1}$$

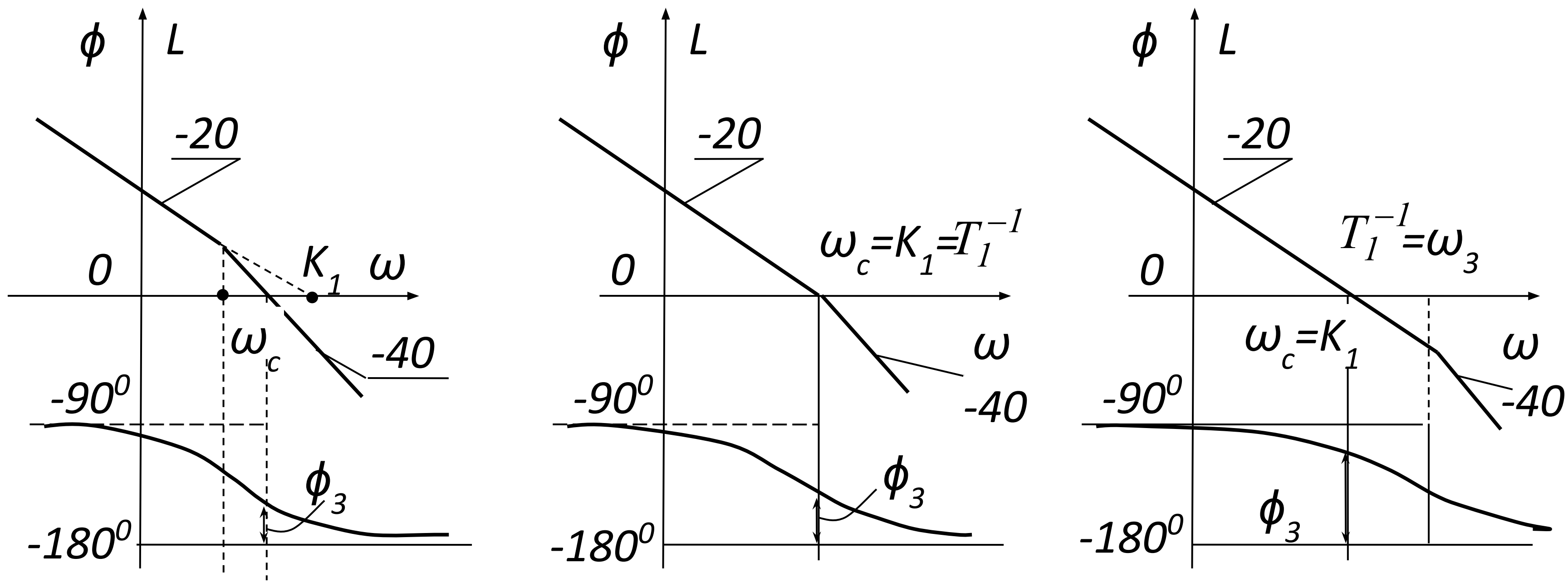
Приведем к первой стандартной форме записи

$$\Phi(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi\, p + 1}$$

$K = 1$, $T = \sqrt{T_1 / K_1}$

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{T_1 K_1}}$$

Рассмотрим три возможных вида ЛЧХ разомкнутой системы



$$\Phi(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi\, p + 1}$$

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{T_1 K_1}}$$

$K = 1$, $T = \sqrt{T_1/K_1}$

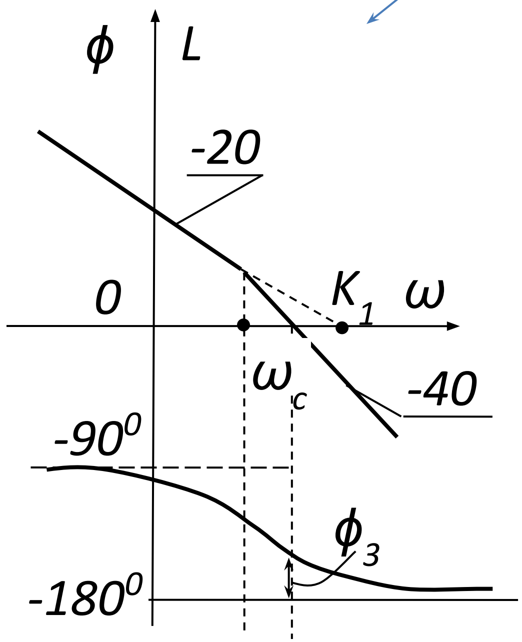
$$\frac{1}{T_1} < \omega_c \qquad \frac{1}{T_1} = \omega_c \qquad \frac{1}{T_1} > \omega_c$$

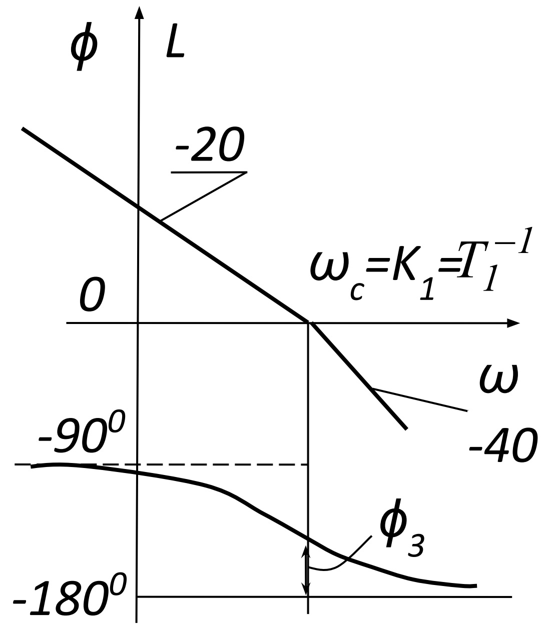
Низкочастотная асимптота, соответствующая ЛАХ интегрирующего звена, пересекает ось абсцисс на частоте $\omega = K_1$, поэтому

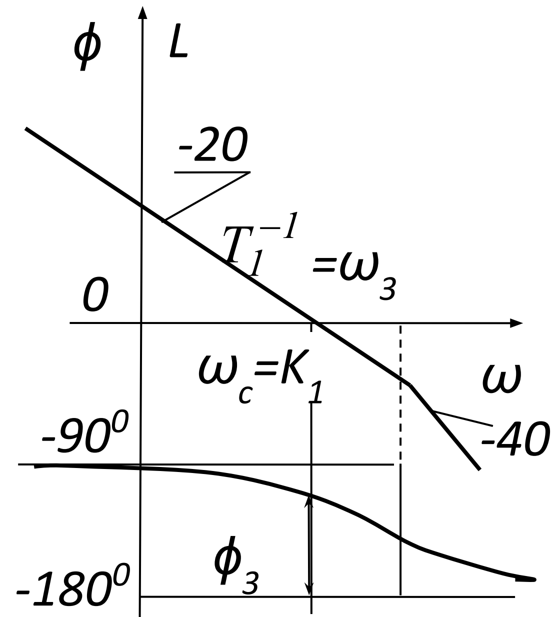
$$\frac{1}{T_1} < K_1 \qquad \frac{1}{T_1} = K_1 \qquad \frac{1}{T_1} > K_1 \quad \longrightarrow \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{T_1 K_1}}$$

$\xi < 0{,}5$, $\xi = 0{,}5$, $\xi > 0{,}5$

Если у колебательного звена $\xi < 0{,}5$, то переходный процесс протекает со значительным перерегулированием (Δh_m >20:30%). Это те АС, у которых ω_c лежит на участке ЛАХ с наклоном -40 дб/дк







если $\xi > 0{,}5$, то $\Delta h_m < 20:30\%$, т.е. для АС, у которых ω_c находится на участке ЛАХ с наклоном -20 дб/дк

Обозначим $\omega_3 = T_1^{-1}$

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{T_1 K_1}}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{T_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{K_1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_c}} \uparrow \rightarrow \Delta h_m \downarrow$$

$\phi_3 \uparrow$

$\phi_3 = \pi/2 - arctg(\omega_c/\omega_3)$

Система имеет хорошее качество управления (малое перерегулирование, большой запас устойчивости), если наклон отрезка ЛАХ, имеющего верхнюю границу $\omega_з$, *на частоте* ω_c *равен -20 дб/дк,* а соотношение

$$2 \le \frac{\omega_з}{\omega_c} \le 4.$$

Величина времени регулирования t_p обратно пропорциональна величине частоты среза ω_c:

$$t_p \approx \frac{K_p}{\omega_c}$$ где $$K_p \approx 2 \div 3.$$

Данные выводы можно обобщить для широкого класса минимально-фазовых АС, которые характеризуются однозначной связью между ЛАХ и ЛФХ, поэтому оценку их качества можно производить по виду только одной характеристики, как правило ЛАХ

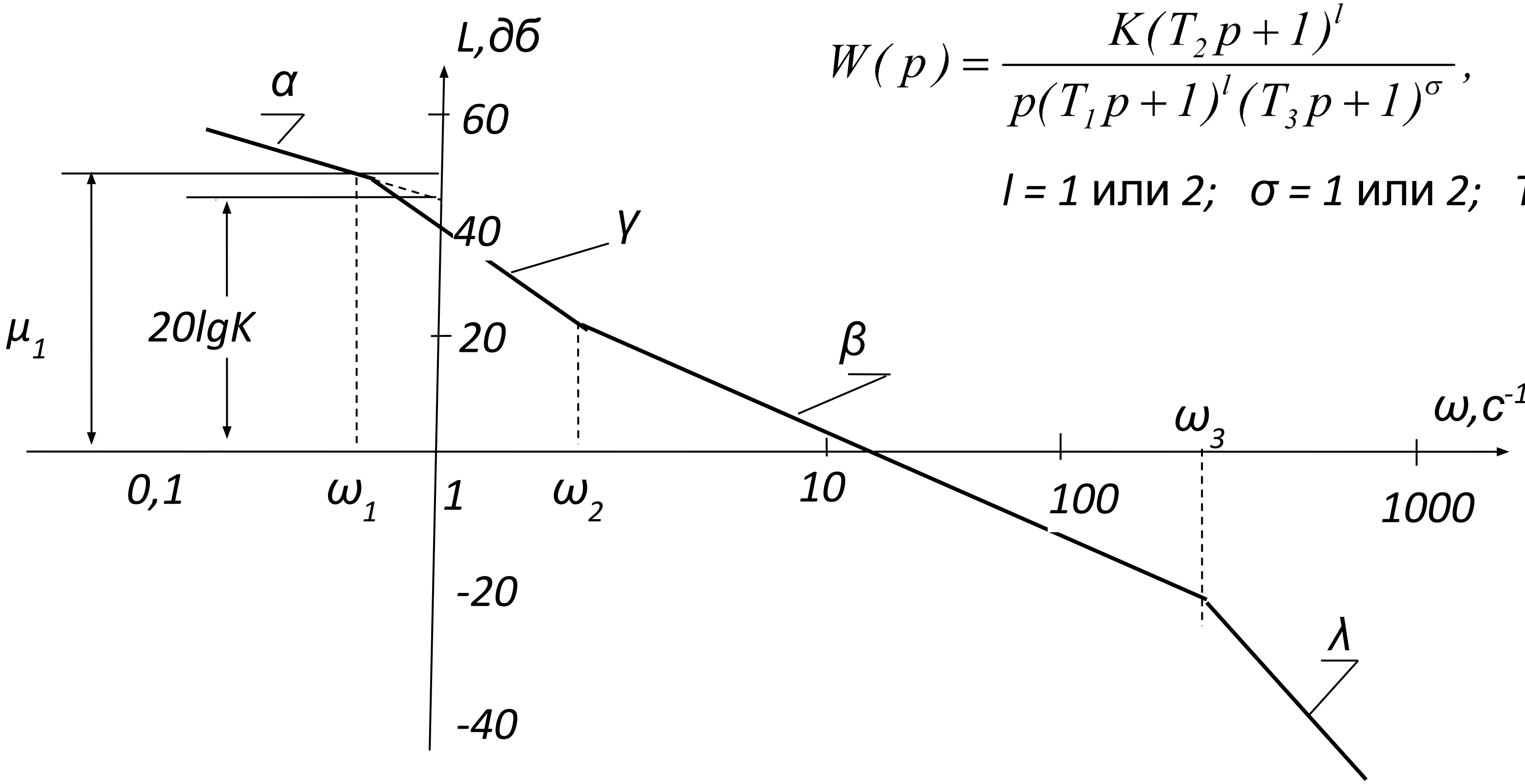
1. Точность АС определяется параметрами низкочастотной асимптоты ЛАХ разомкнутой системы.

2. Степень колебательности *(Δh_m)* и быстродействие *(t_p)* определяются *параметрами среднечастотной асимптоты ЛАХ. т.е. асимптоты, пересекающей абсциссу 0 дБ* и которой принадлежит частота ω_c.

3. В области высоких частот качество замкнутой АС не имеет заметных связей с параметрами ЛАХ разомкнутой системы.

$$W(p) = \frac{K(T_2 p + 1)^l}{p(T_1 p + 1)^l (T_3 p + 1)^\sigma},$$

l = 1 или *2*; *σ = 1* или *2*; $T_1 > T_2 > T_3$



1. Наклон низкочастотной асимптоты α определяет порядок астатизма АС по отношению к задающему воздействию.

Если $\alpha = -20$ дб/дек, то $\nu = 1$, *если* $\alpha = -40$ дб/дек, то $\nu = 2$ *и т. д.*

2. Ординаты низкочастотной асимптоты $L(1)=20lgK$ определяет величину ошибки $e(t)$ AC в установившемся режиме. Чем больше $L(1)$, тем больше K и, следовательно, тем меньше $e(t)$, так как $e(t)\approx[1/K]$, но одновременно уменьшается и степень ее устойчивости $\phi_з$, $L_з$.

3. Величина перерегулирования Δh_m определяются параметрами среднечастотной асимптоты: наклоном β, ее протяженностью $(\omega_2 \div \omega_3)$ и расположением частоты ω_c относительно концов средней асимптоты.

Так, $\Delta h_m \leq 20 \div 30\%$, если $\beta =$-20 дб/дек, $\omega_3/\omega_2 \geq 10$ *и* $2 \leq \omega_3/\omega_c \leq 4$.

4. Величина времени регулирования t_p обратно пропорциональна величине частоты среза ω_c и прямо пропорциональна (но с меньшим весом) Δh:

$t_p \approx K_0 \pi/\omega_c$, где $K_0 = K_0(\Delta h_m) = 0{,}5 \div 3{,}5$,

или $t_p \approx K_0/\omega_c$, где $K_0 = K_p(\Delta h_m) = 3 \div 12$.

6.6. Интегральная квадратичная оценка качества (ИКО)

Интегральная оценка качества является косвенным показателем качества АС, так как представляет собой обобщенную оценку времени регулирования t_p и величины перерегулирования Δh_m, т.е. быстродействия и степени устойчивости системы.

Интегральной оценкой качества переходного процесса называется определенный интеграл вида:

$$I = \int_0^{\infty} \left| f^n(t) \right| dt \qquad n = 1,2,3,$$

где f(t) - абсолютно интегрируемая функция времени, характеризующая протекание переходного процесса АС.

Функция f(t) называется абсолютно интегрируемой, если выполняется условие

$$\int_0^{\infty} \left| f(t) \right| dt \neq \infty.$$

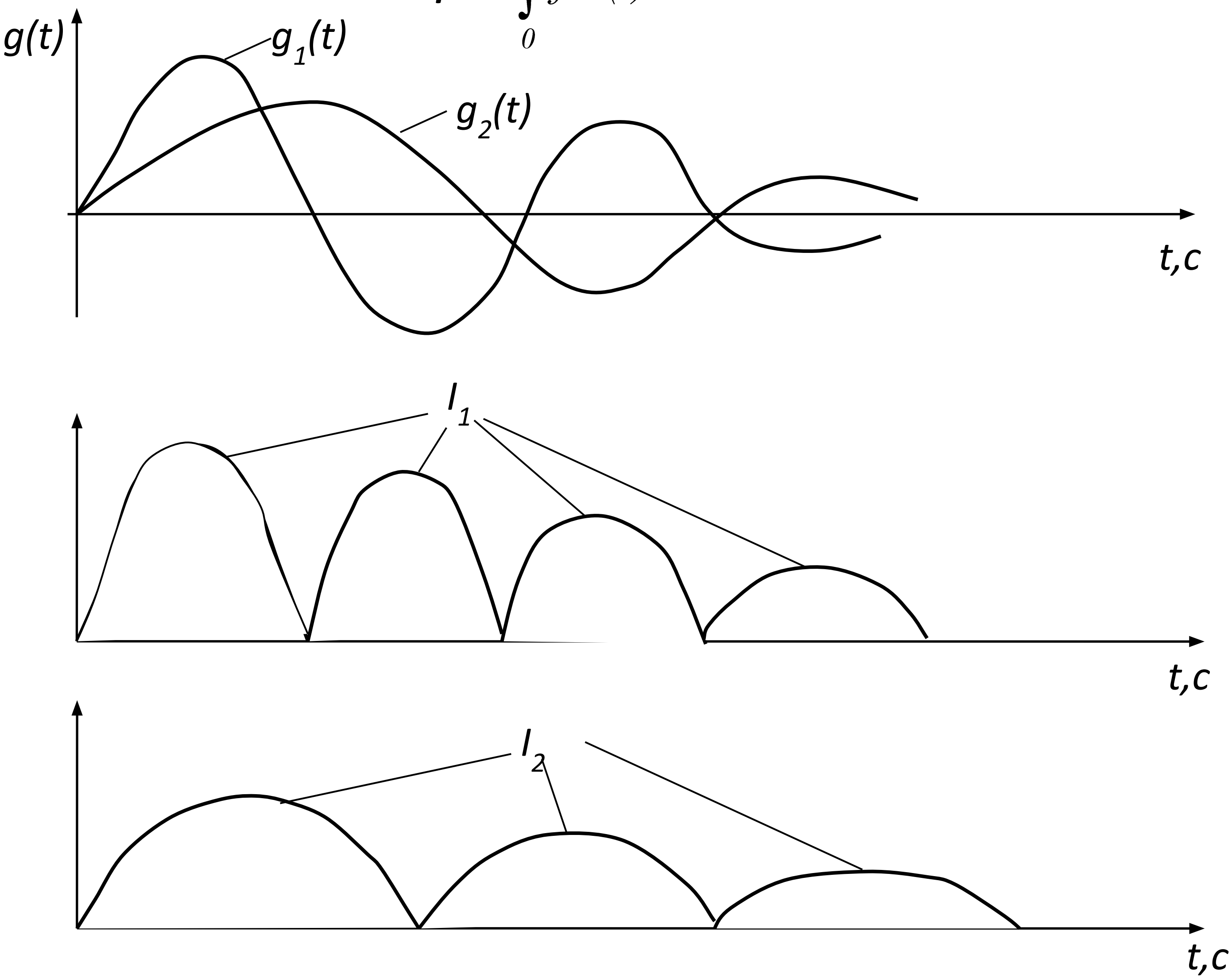
В качестве функции *f(t)* обычно используют временные характеристики АС удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости:

1. Весовая функция АС *g(t)*;
2. Переходная составляющая ошибки (динамическая ошибка) $h(t) - h(\infty) = e(t)$;
3. *Отклонение фактической переходной функции от желаемой* $h(t) - h_{ж}(t)$;
4. *Производные от перечисленных функций.*

Интегральная оценка на графике равна площади фигуры ограниченной функцией $|g(t)|$ и осью времени. Очевидно, чем меньше эта площадь, а, следовательно, и соответствующая интегральная оценка, тем лучше качество АС.

Интегральная квадратичная оценка (ИКО)

$$I = \int_0^{\infty} f^2(t)\,dt$$



Пусть известно изображение по Лапласу подынтегральной функции *f(t)*:

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{в_m p^m+\cdots+в_1 p^1+в_0}{a_n p^n+\cdots+a_1 p+a_0}.$$

Допустим, что все корни полинома *A(p),* имеют отрицательные действительные части и *m ≤ n.* Тогда функция *f(t)* удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости.

$$I=\int_0^\infty f^2(t)\,dt=I[F(p)]=\frac{\Delta_в}{2a_n\Delta}$$

a_n - старший коэффициент полинома *A(p)*

$\Delta_в$ и Δ - детерминанты матриц *B* и *A* *n*-го порядков

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_2 & a_1 & -a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_n & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

это квадратная матрица порядка *n*, которая отличается от матрицы Гурвица только тем, что перед ее элементами в шахматном порядке относительно главной диагонали проставлены знаки минус

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & B_0 \\ -a_2 & a_1 & -a_0 & 0 & \cdots & B_1 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \cdots & B_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n & a_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix}$$

-это квадратная матрица n-го порядка, которая отличается от матрицы А только элементами последнего столбца, которые определяются равенствами:

$$B_0 = в_0^2,$$

$$B_1 = в_1^2 - 2в_0 в_2,$$

$$B_2 = в_2^2 - 2в_1 в_3 + 2в_0 в_4,$$

. . . .

$$B_{n-1} = в_{n-1}^2,$$

где $в_i = 0$, при $i > m$

6.7. Полоса пропускания АС

Полоса пропускания характеризует диапазон рабочих частот АС

Полосой пропускания АС называется диапазон частот ($0 \div \omega_П$), в котором коэффициент усиления АС по мощности не меньше половины от его величины при постоянном входном сигнале ($\omega=0$)

Частота $\omega_П$ называется границей полосы пропускания АС

Мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, тогда можно записать условие для определения границы полосы пропускания $\omega_П$:

$$KW_a^2(\omega_П) = 0{,}5KW_a^2(0)$$ или $$W_a(\omega_П) = 0{,}707W_a(0)$$

Уравнение легко разрешить графически