

Функции $y = \operatorname{tg}x$ и

$y = \operatorname{ctg}x$,

их свойства и

графики

Определение

Тангенсом угла α называют число, равное отношению $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$, обозначают $\operatorname{tg} \alpha$, т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Тангенс определён для всех углов α , **кроме тех, для которых косинус равен нулю**

Для любого угла $\alpha \neq \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ существует, и притом **единственный** $\operatorname{tg} \alpha$

Ось тангенсов

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

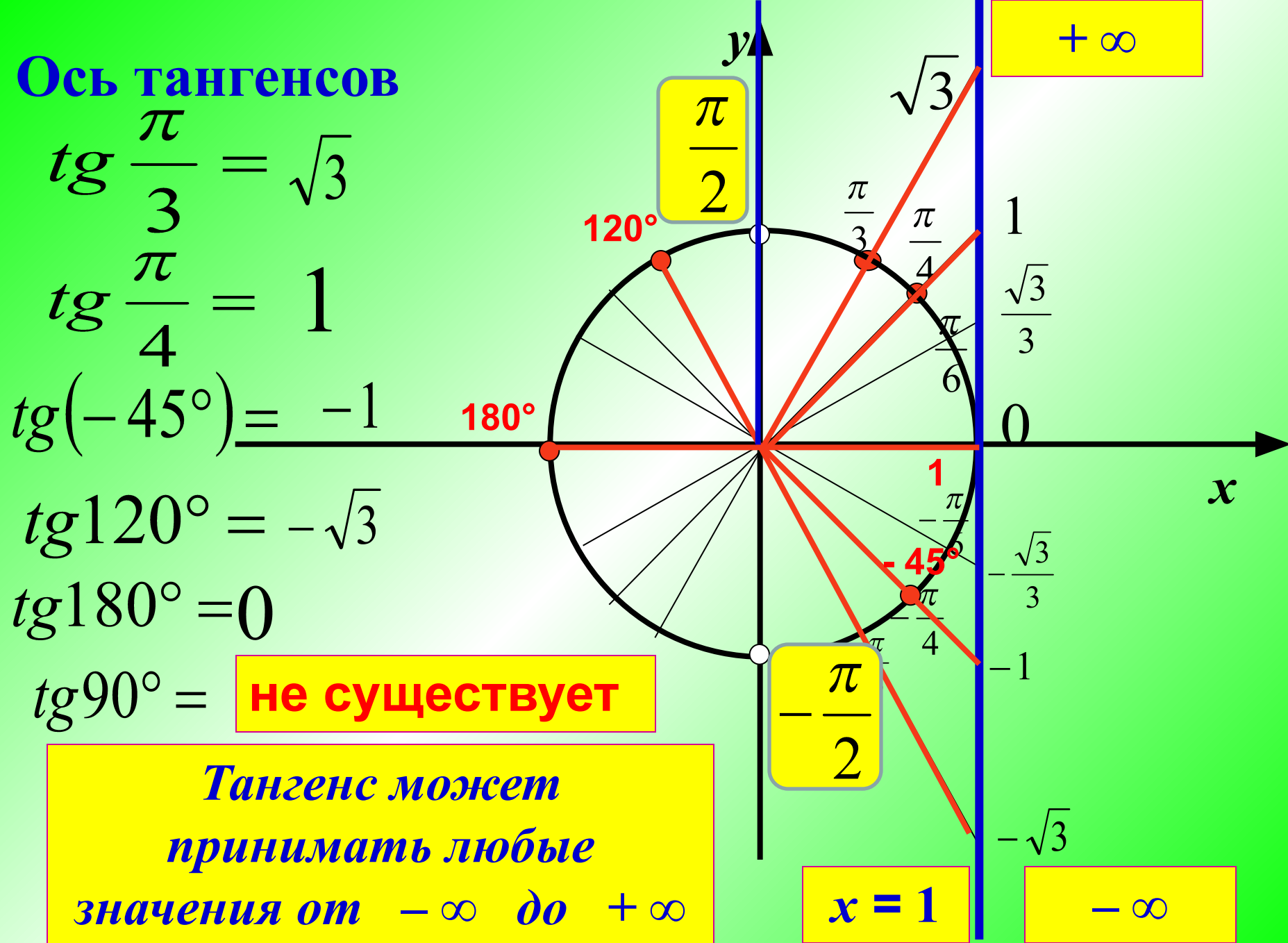
$$\operatorname{tg}(-45^\circ) = -1$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \text{не существует}$$

Тангенс может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$



Определение

Котангенсом угла α называют число, равное отношению $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$, обозначают $\operatorname{ctg} \alpha$, т. е.

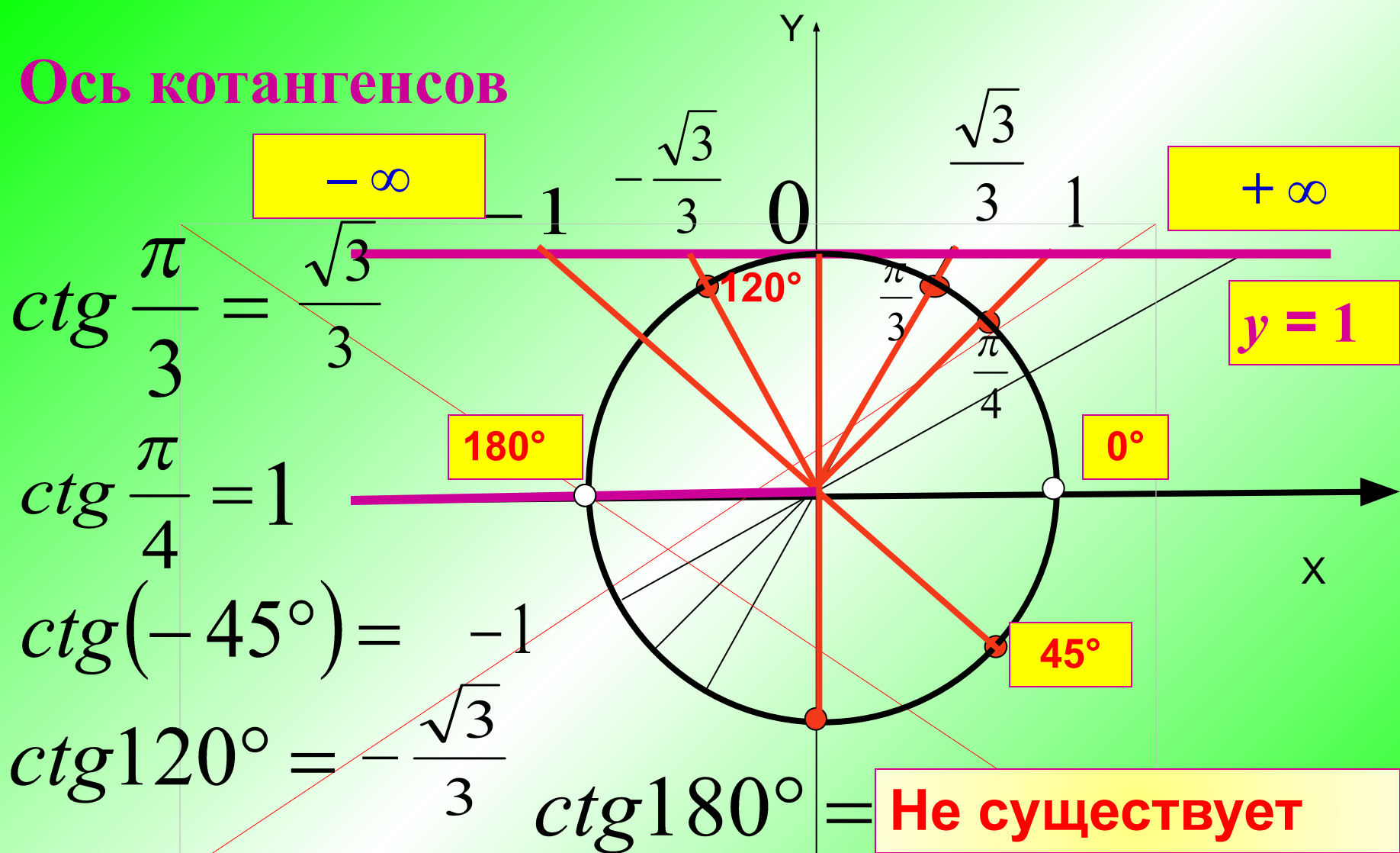
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Котангенс определён для всех углов α , **кроме тех, для которых синус равен нулю**

Для любого угла $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ существует, и притом **единственный $\operatorname{ctg} \alpha$**

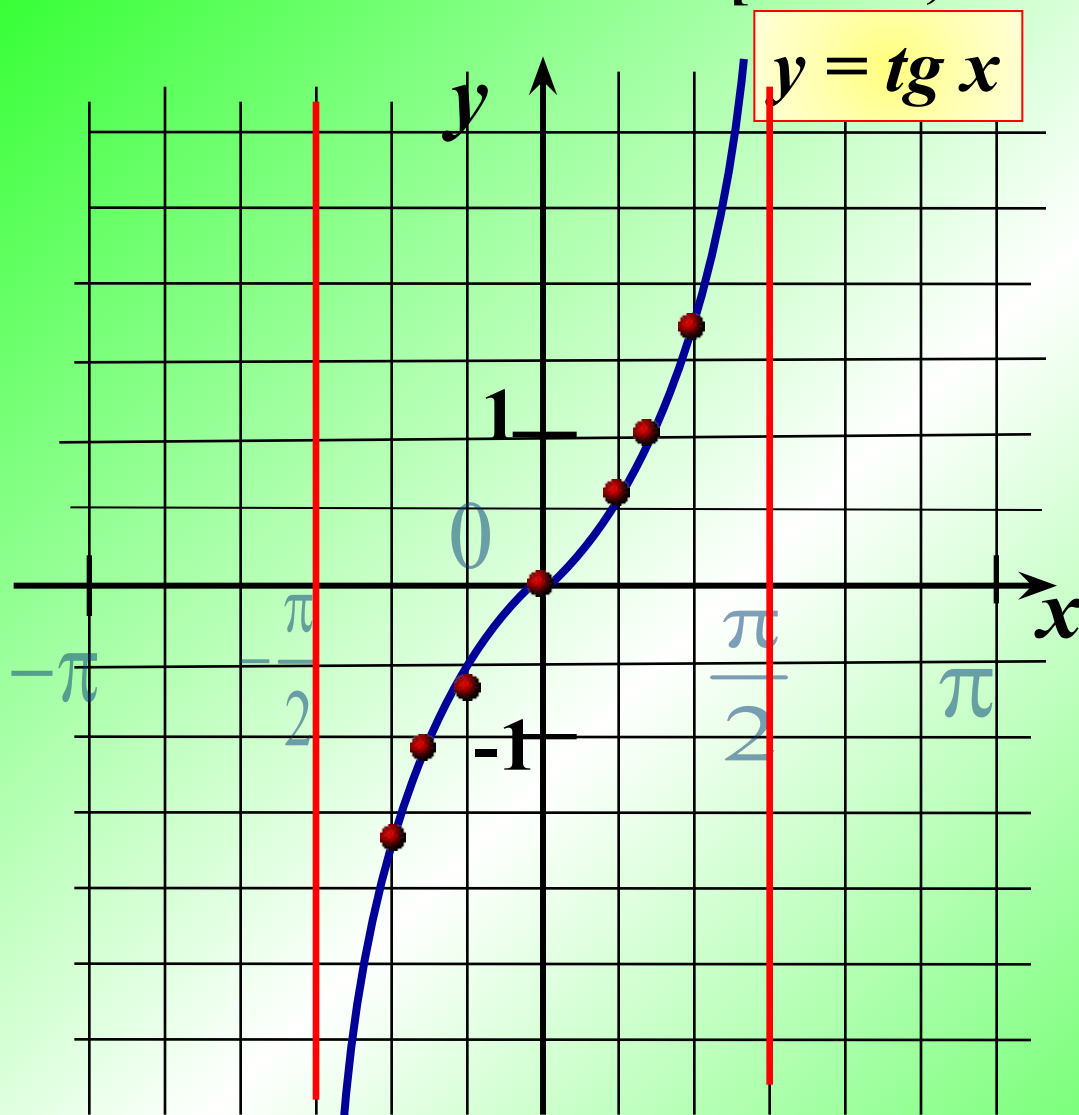
Ось котангенсов



Котангенс может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$

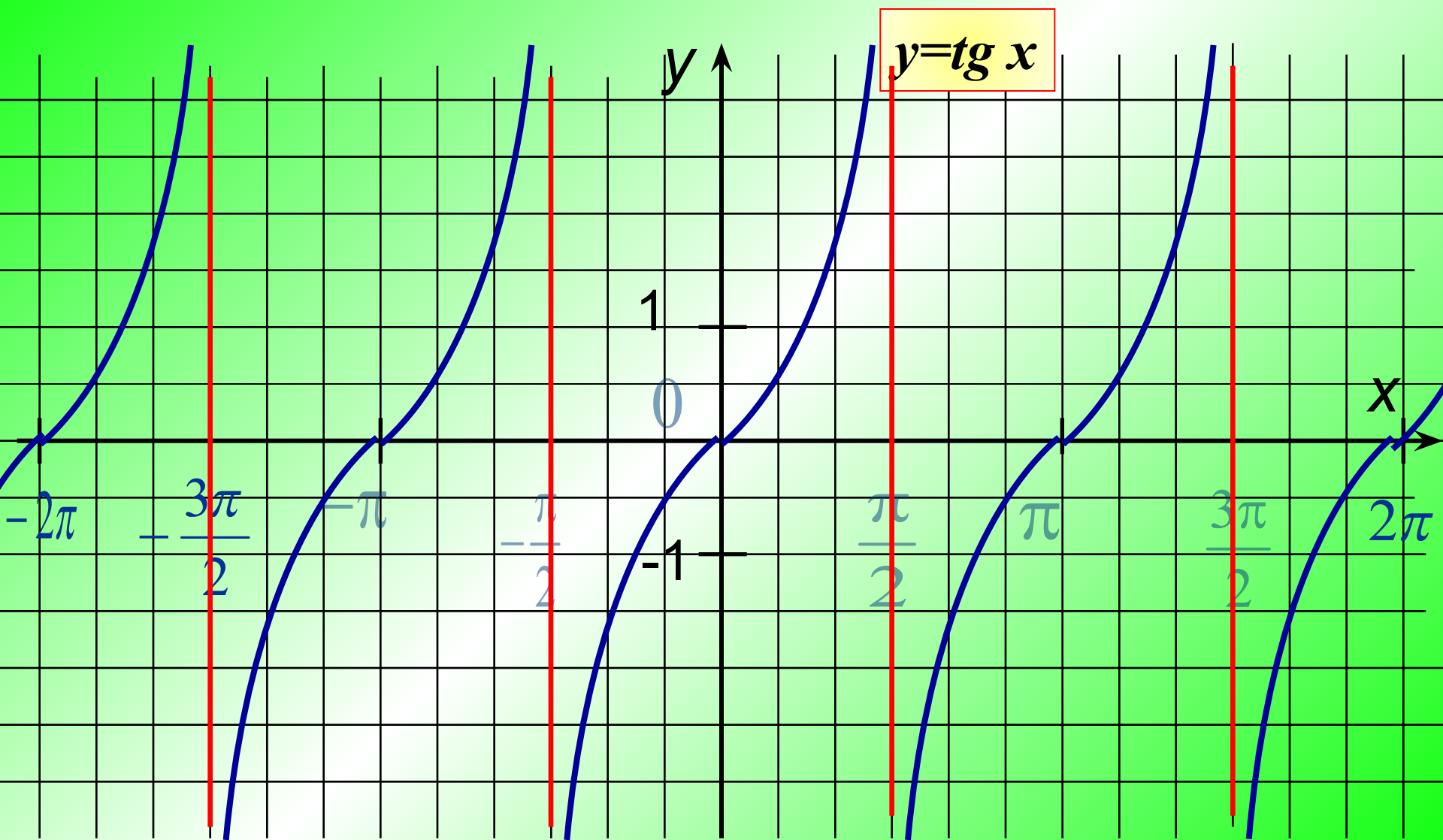
$$ctg(-90^\circ) = 0$$

Построение графика функции $y = \operatorname{tg} x$, если $x \in [-\pi/2; \pi/2]$

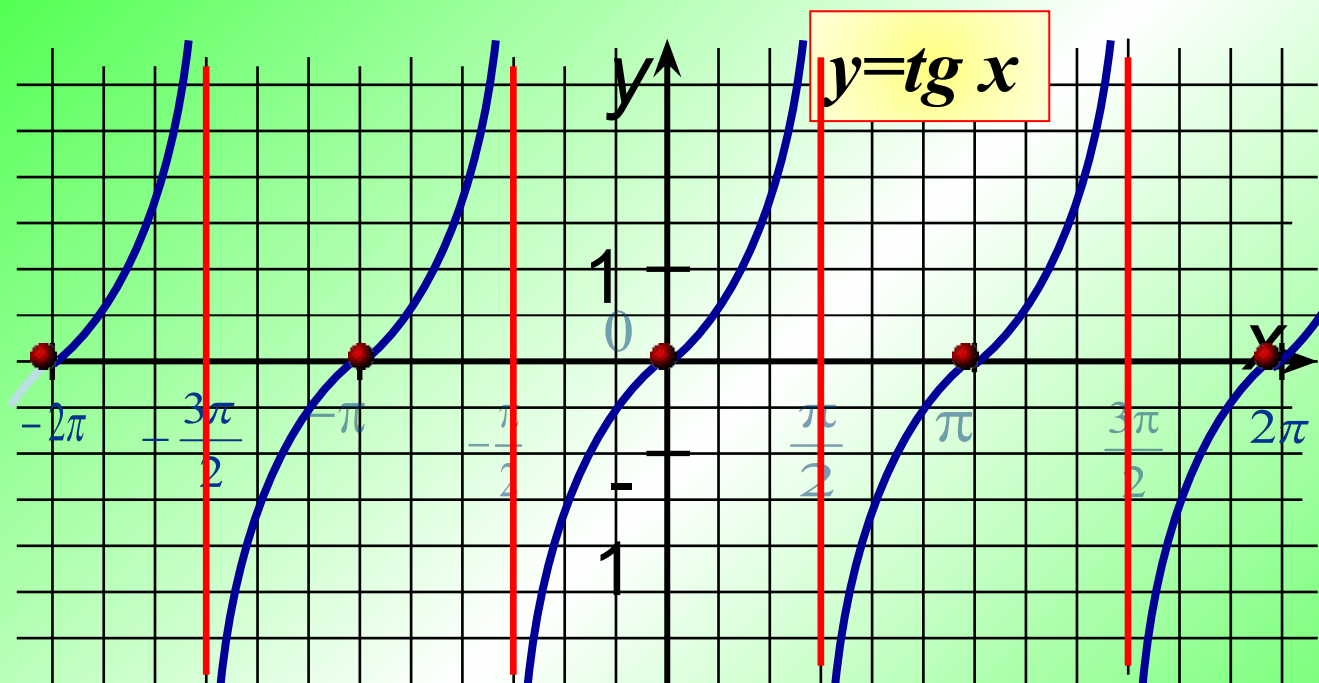


x	$y = \operatorname{tg} x$
0	0
$\pm\pi/6$	$\approx \pm 0,6$
$\pm\pi/4$	± 1
$\pm\pi/3$	$\approx \pm 1,7$
$\pm\pi/2$	Не существ.

Построение графика функции $y = \operatorname{tg} x$.



Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

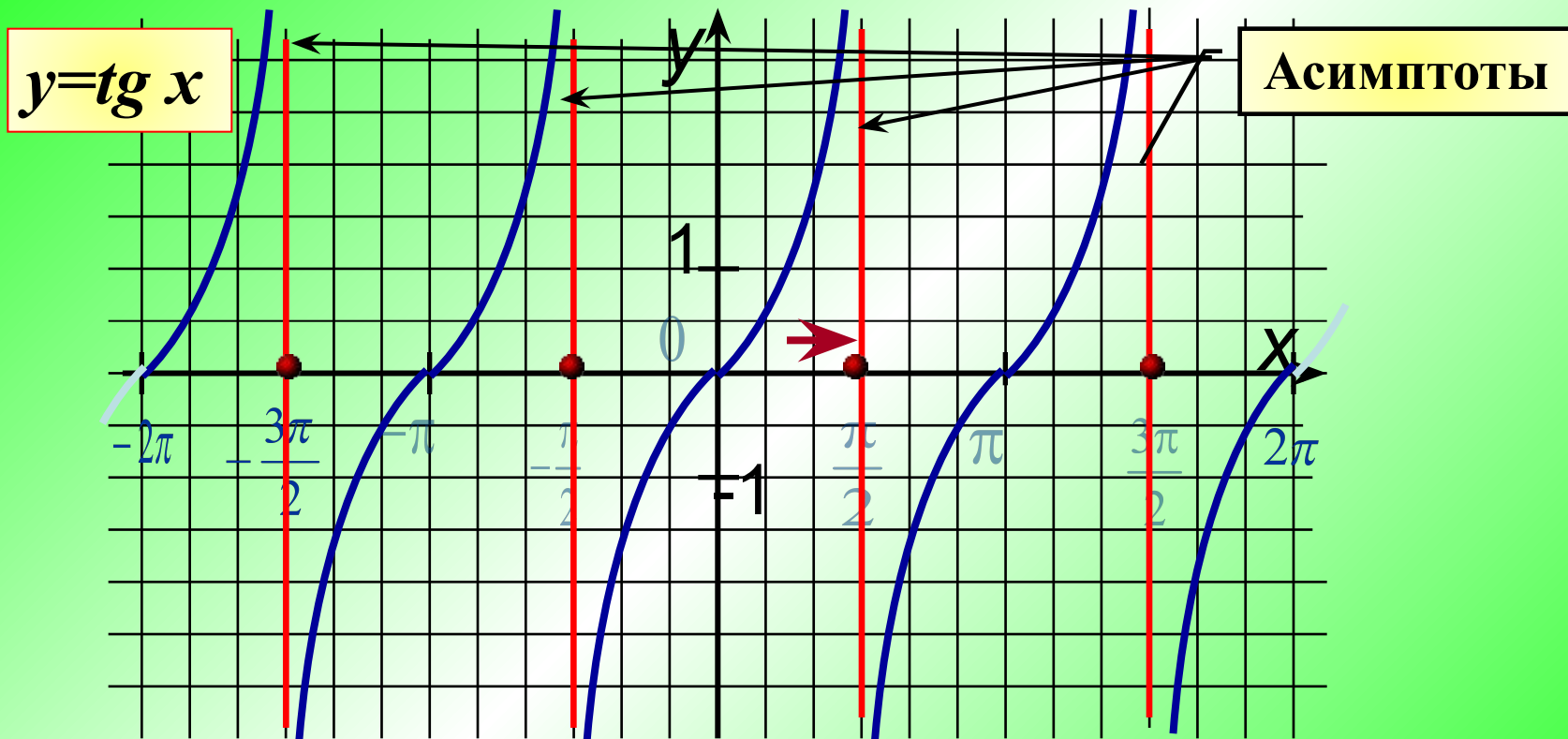


Нули функции: $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$y > 0$ при $x \in (0; \pi/2)$ и при сдвиге на πn , $n \in \mathbb{Z}$.

$y < 0$ при $x \in (-\pi/2; 0)$ и при сдвиге на πn , $n \in \mathbb{Z}$.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

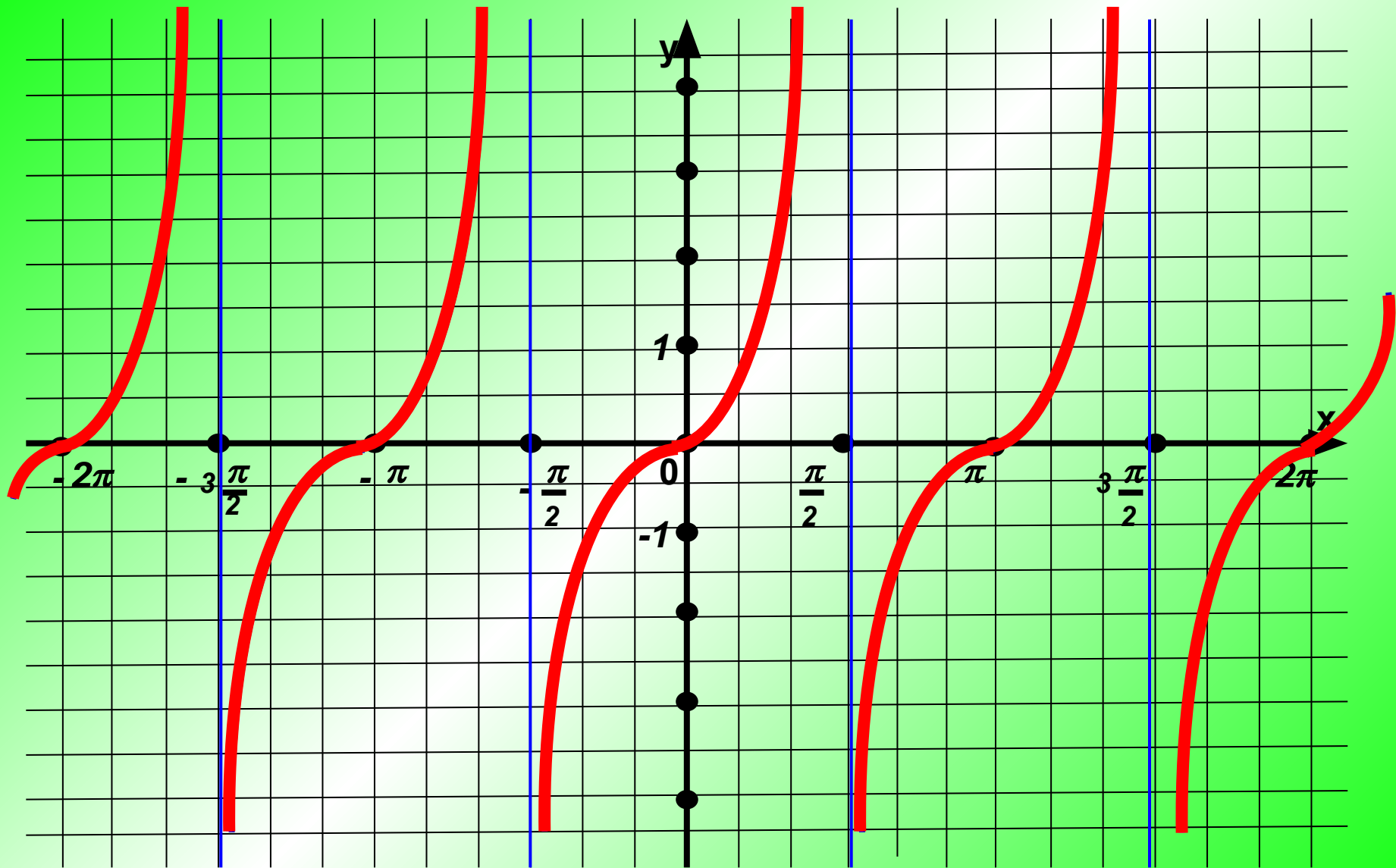


При $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ - функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена.

Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ – точки разрыва функции.

Запишите все свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

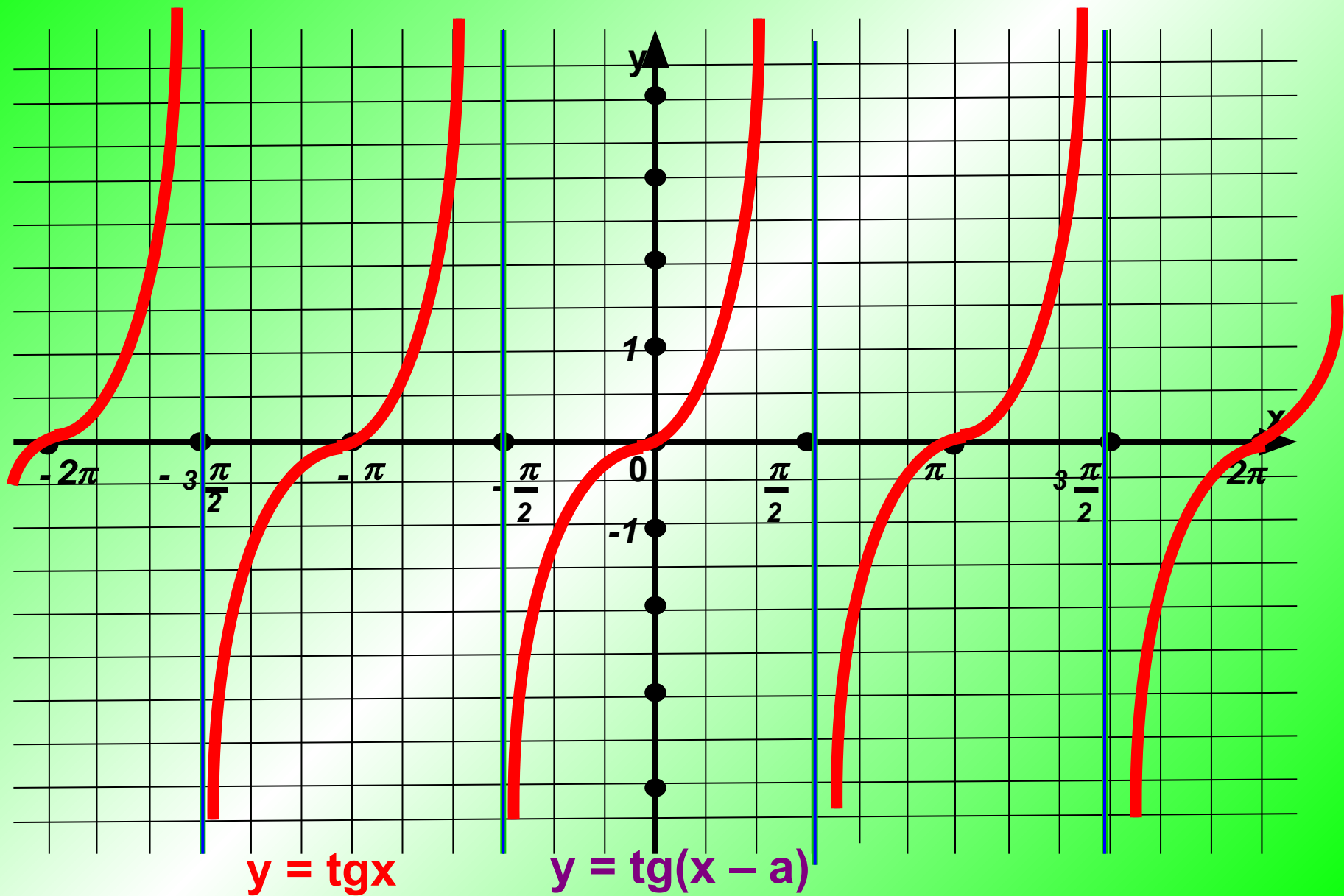
1. Область определения:
2. Множество значений функции:
3. Периодическая, $T =$
4. Нечётная функция
5. Возрастает на всей области определения.
6. Нули функции $y = 0$ при $x =$
7. $y > 0$ при $x \in$ и при сдвиге на
8. $y < 0$ при $x \in$ и при сдвиге на
9. При $x =$ - функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена.
Имеет точки разрыва графика

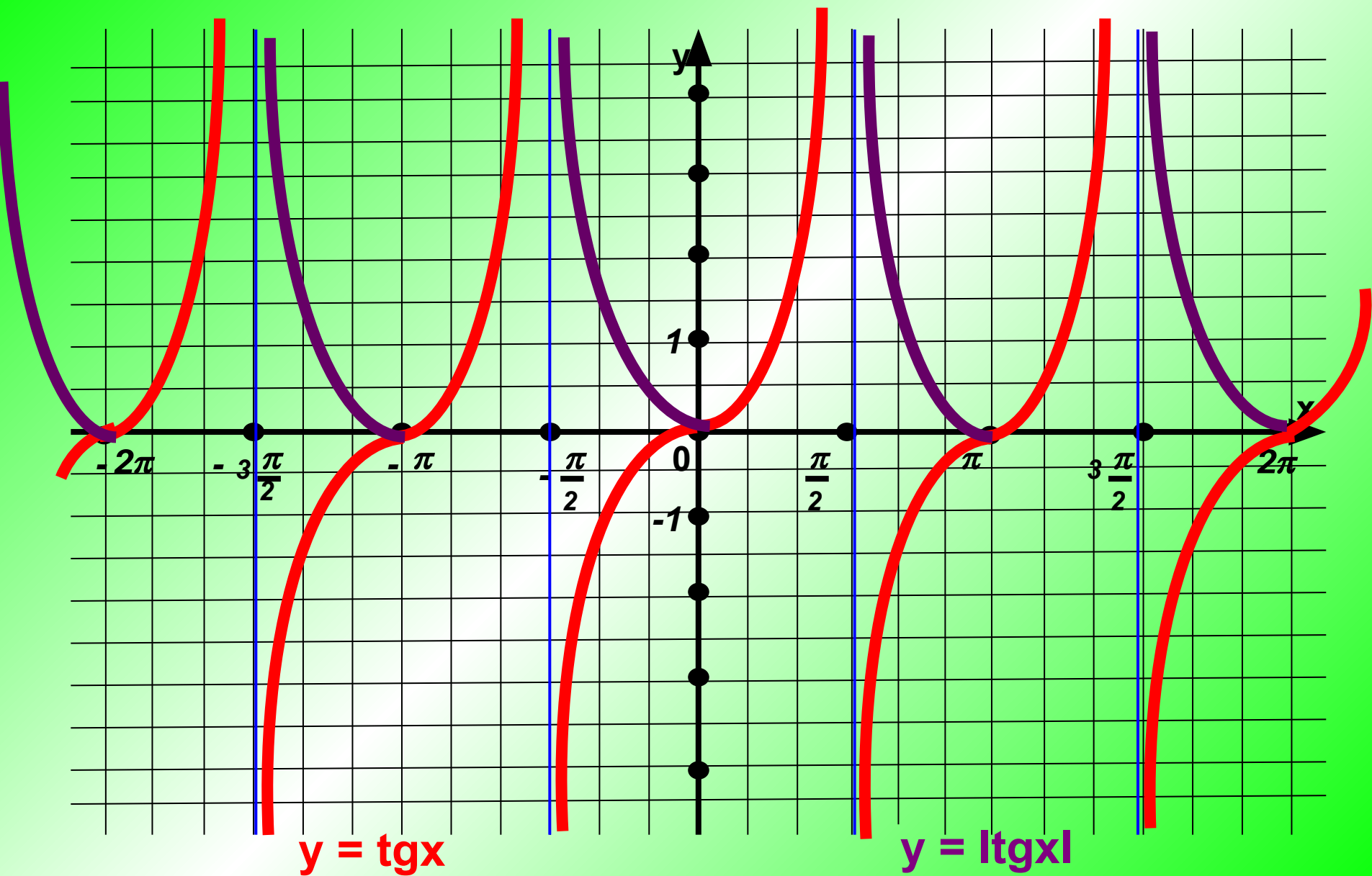


$$y = \operatorname{tg}x + a$$

$$y = \operatorname{tg}x$$

$$y = \operatorname{tg}x - b$$

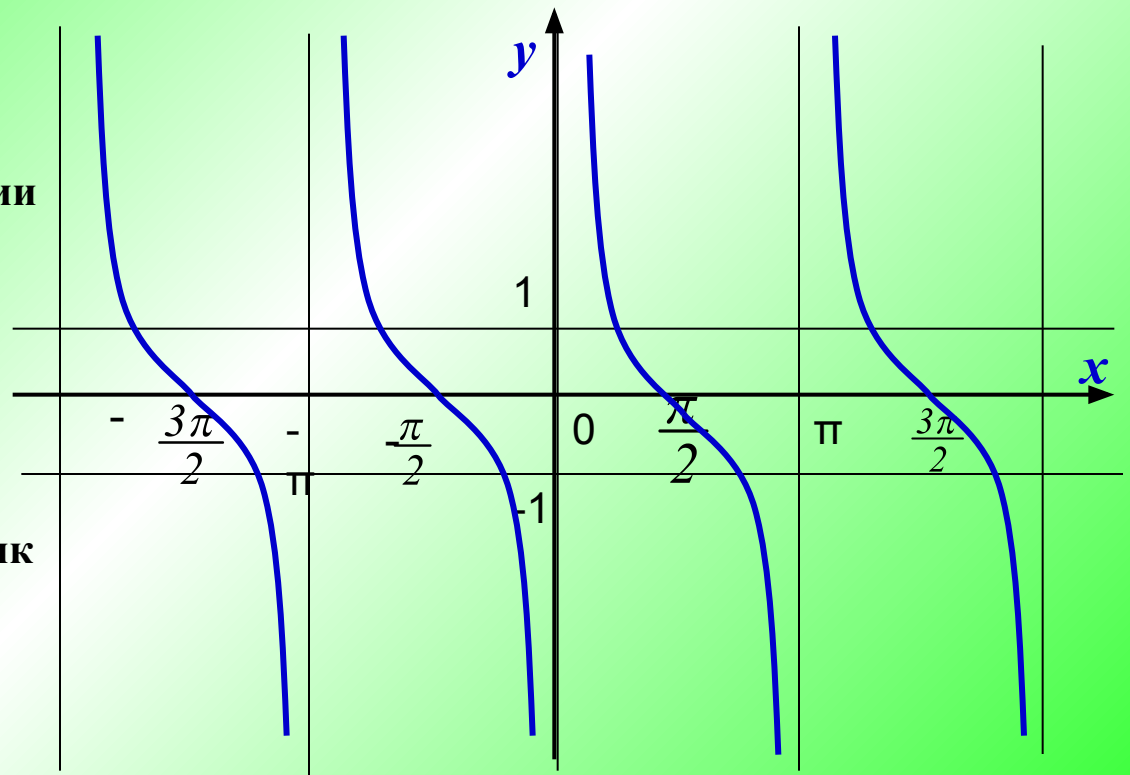




Функция $y = \text{ctg } x$

$$y = \text{ctg } x$$

1. Область определения данной функции – все действительные числа, кроме чисел $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
2. Область значений функции – все действительные числа.
3. Функция убывает на интервалах $(\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$
4. Функция нечетная, график ее симметричен относительно начала координат.
5. Функция периодическая, ее наименьший положительный период равен π .

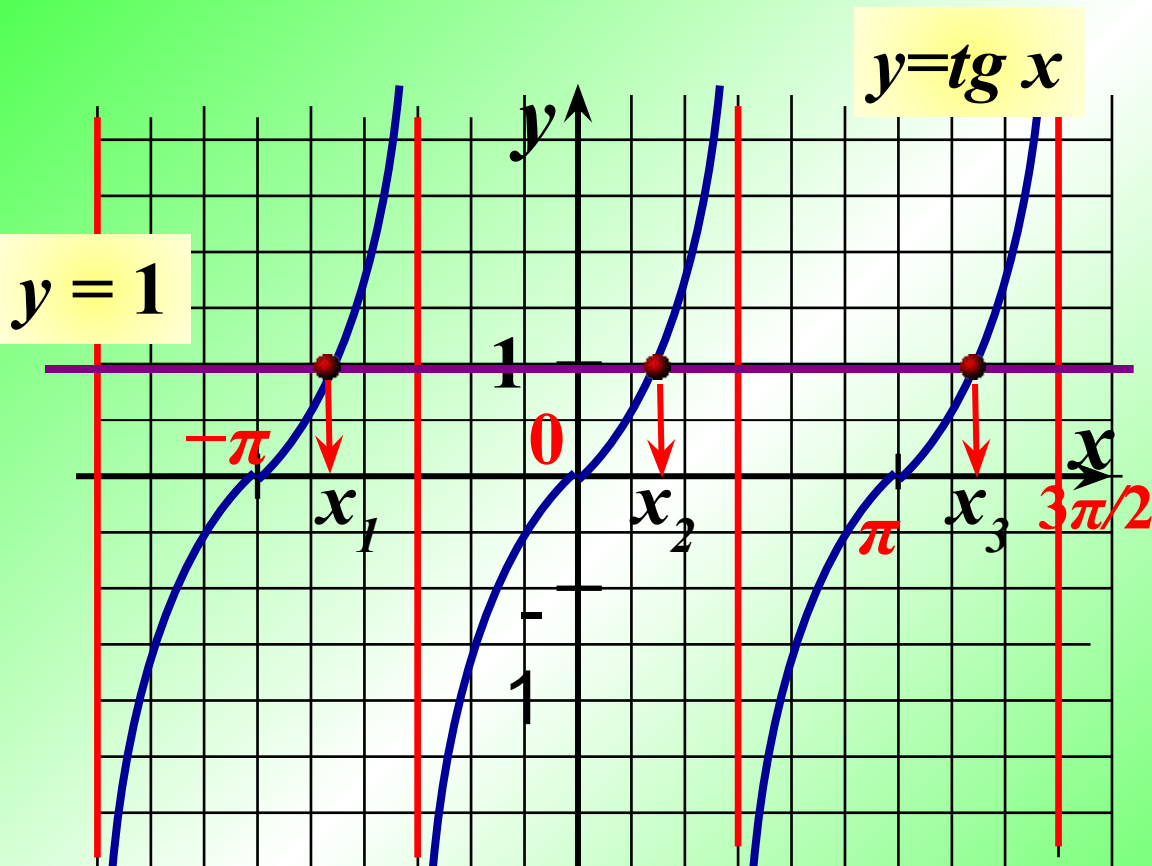


Задача №1.

Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 1$, принадлежащих промежутку $-\pi \leq x \leq 3\pi/2$.

Решение.

1. Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$

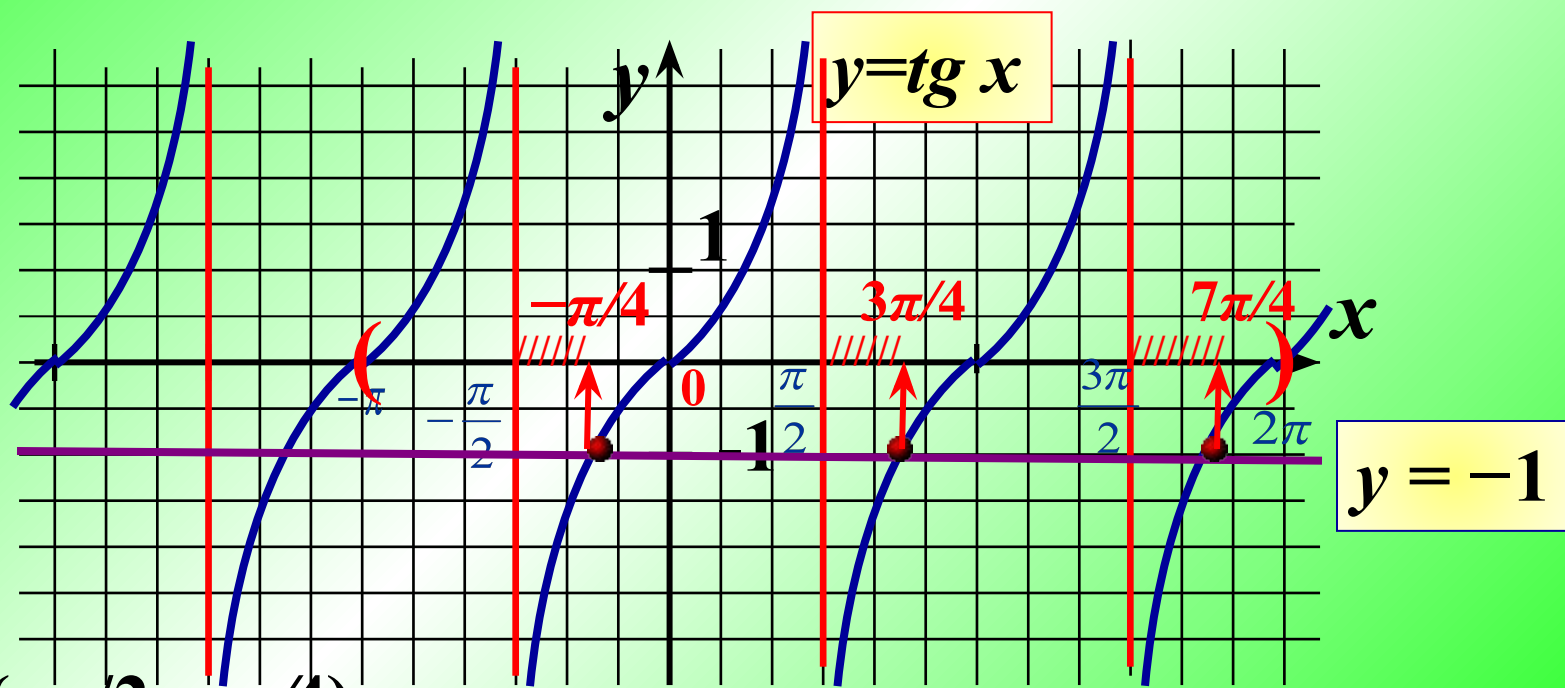


2. $x_1 = -3\pi/4$
 $x_2 = \pi/4$
 $x_3 = 5\pi/4$

Задача №2.

Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x < -1$, принадлежащие промежутку $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

1. Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -1$



2. $x \in (-\pi/2; -\pi/4)$; $x \in (\pi/2; 3\pi/4)$; $x \in (3\pi/2; 7\pi/4)$