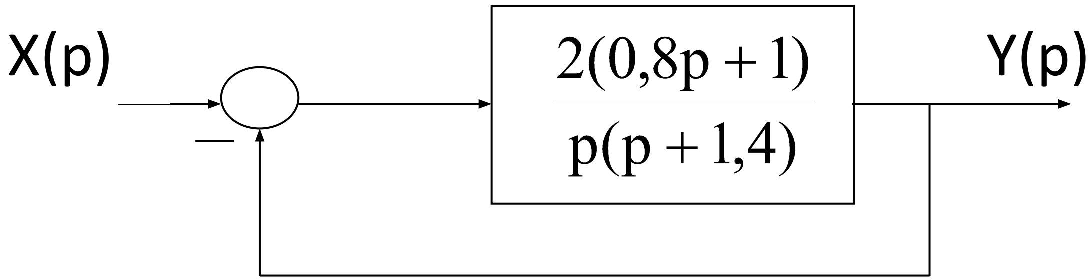
Автоматика и управление

Тема 3. Временные характеристики линейных стационарных автоматических систем

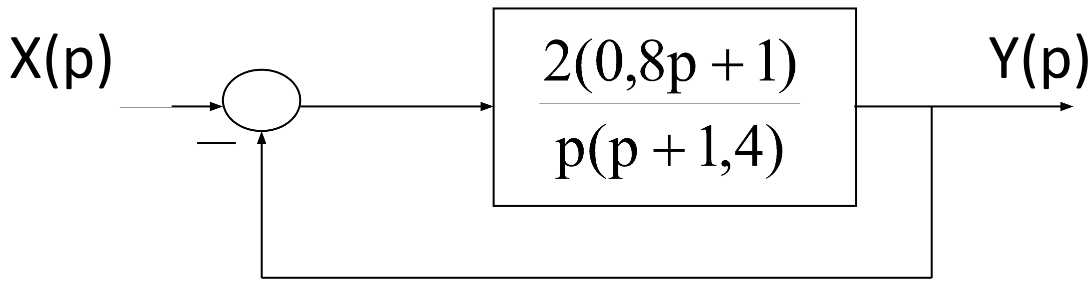
ПЗ 4. Аналитическое вычисление весовой и переходной функций.

Задача № 1

Структурная схема АС имеет вид:



определить аналитические выражения *h(t)* и *g(t),* изобразить графики этих функций.



$$H(p)=\frac{1{,}6\,p+2}{p(p^2+3p+2)};\qquad G(p)=\frac{1{,}6\,p+2}{p^2+3p+2}$$

Решение:

Определяем корни знаменателя *H(p)* и *G(p)*

$$p_{1,2}=\frac{-в\pm\sqrt{в^2-4ac}}{2a};$$

$$H(p):\ p(p^2+3p+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\tilde{p}_1=0\\ \tilde{p}_2=-2\\ \tilde{p}_3=-1\end{cases}$$

$$p_1+p_2=-\frac{в}{a};\quad p_1p_2=\frac{c}{a}$$

при *a = 1* $\quad -\dfrac{в}{2}\pm\dfrac{\sqrt{в^2-4c}}{2};$

$G(p)$: $p^2 + 3p + 2 = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} p_1 = -2 \\ p_2 = -1 \end{cases}$ $-\frac{в}{2} \pm \frac{\sqrt{в^2 - 4c}}{2};$

Определяем коэффициент C_0, C_i разложения функций $h(t)$ и $g(t)$

$$\begin{cases} g(t) = C_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{p_i t}, \quad t \ge 0; \\ C_0 = \frac{b_n}{a_n} = \Phi(\infty), m = n \\ C_0 = 0, \qquad m < n \end{cases}$$

$$C_i = \left.\frac{B(p)}{A^{(1)}(p)}\right| p = p_i$$

$A'(p)$: $(p^2+3p+2)' = 2p+3$

$$g(t): \quad C_1 = \left.\frac{1{,}6p+2}{2p+3}\right|_{p_1=-2} = \frac{-1{,}2}{-1} = 1{,}2;$$

$$C_2 = \left.\frac{1{,}6p+2}{2p+3}\right|_{p_2=-1} = \frac{0{,}4}{1} = 0{,}4$$

Определяем оригинал

$g(t) = 1{,}2e^{-2t} + 0{,}4e^{-t}$

$$\begin{cases} h(t) = \widetilde{C}_0 \cdot 1(t) + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{C}_i e^{Pit}, \quad t > 0; \\ \widetilde{C}_0 = \dfrac{b_0}{a_0} = \Phi(0), \\ \widetilde{C}_i = \dfrac{B(p_i)}{[p_i A(p_i)]'}. \end{cases}$$

$$\Phi(p) = \frac{1{,}6p + 2}{p^2 + 3p + 2}$$

$$H(p) = \frac{1{,}6p + 2}{p(p^2 + 3p + 2)};$$

[pA(p)]': $\left[p(p^2 + 3p + 2)\right]' = 3p^2 + 6p + 2$

$$\begin{cases} \widetilde{p}_1 = 0 \\ \widetilde{p}_2 = -2 \\ \widetilde{p}_3 = -1 \end{cases}$$

$$h(t): \quad \widetilde{C}_0 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\widetilde{C}_1 = \left.\frac{1{,}6p + 2}{3p^2 + 6p + 2}\right|_{\widetilde{p}2=-2} = -\frac{1{,}2}{2} = -0{,}6;$$

$$\widetilde{C}_2 = \left.\frac{1{,}6p + 2}{3p^2 + 6p + 2}\right|_{\widetilde{p}3=-1} = \frac{0{,}4}{-1} = -0{,}4;$$

h(t) = 1 $+ (-0{,}6)e^{-2t} + (-0{,}4)e^{-t} = 1 - 0{,}6e^{-2t} - 0{,}4e^{-t}$

Проверк
а: $g(t) = h^{(1)}(t)$

$$g(t) = (1 - 0{,}6e^{-2t} - 0{,}4e^{-t})' = 1{,}2e^{-2t} + 0{,}4e^{-t}$$

Проверить $h(0)$ и $g(0)$; $h(\infty)$ и
$g(\infty)$

Задача № 2

На вход системы действует входной сигнал

$X(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{p}} \longrightarrow Y(p)$

$x(t) = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 4\delta(t-4)$

Изобразить график выходного сигнала.

Если на вход системы действует *δ*–импульс, то выход системы есть весовая функция *g(t).* Если на вход ЛС АС действует комбинация *δ*–импульсов, сдвинутых по времени, то в силу линейности системы её выход будет также линейная комбинация весовых функций с соответствующим сдвигом.

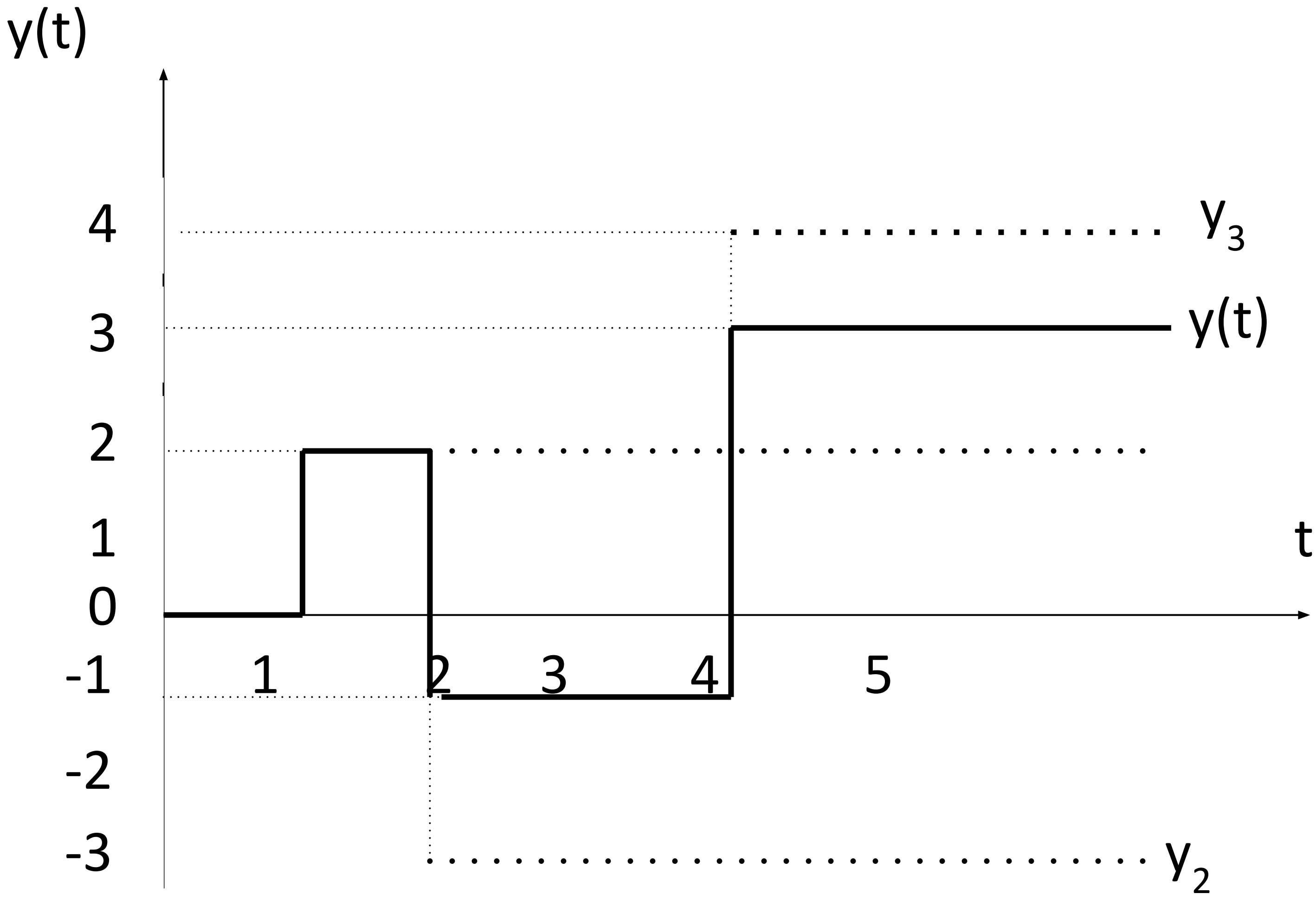
выходной сигнал системы $y(t) = 2g(t-1) - 3g(t-2) + 4g(t-4)$

Весовая функция системы (интегрирующего звена)

$$g(t) = L^{-1}\left[G(p)\right] = L^{-1}\left[W(p)\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1(t),$$

$$y(t) = 2 \cdot 1(t-1) - 3 \cdot 1(t-2) + 4 \cdot 1(t-4) = y_1 + y_2 + y_3$$

$$y(t) = 2 \cdot 1(t-1) - 3 \cdot 1(t-2) + 4 \cdot 1(t-4) = y_1 + y_2 + y_3$$

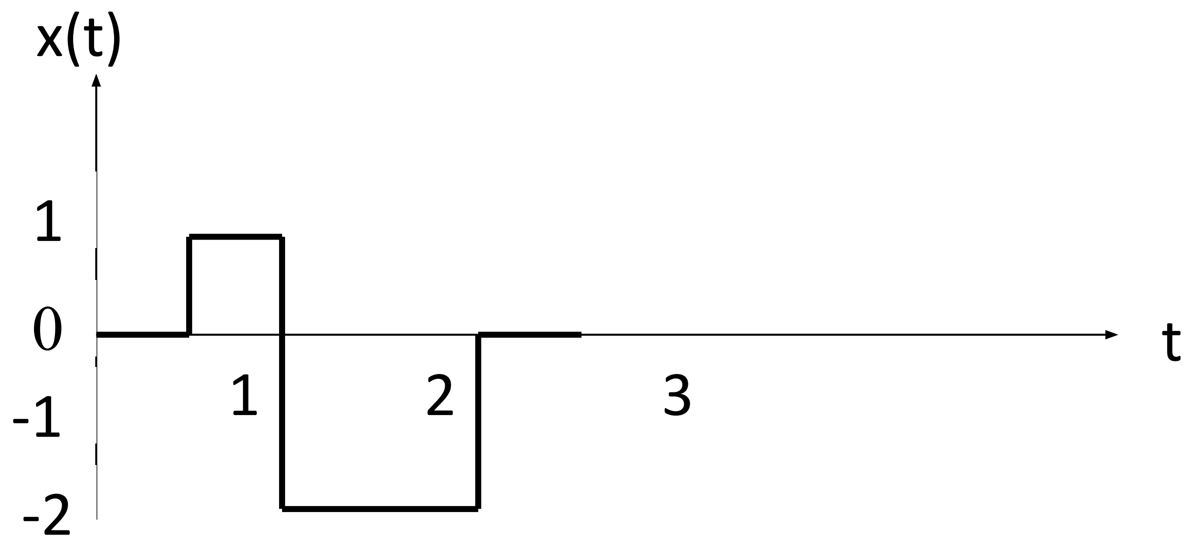


Задача № 3

Переходная функция системы имеет вид:

$$h(t) = 1 - e^{-t}$$

Определить реакцию системы в момент времени *t = 3c* на сигнал *x(t)* вида:



Решение:

Запишем аналитическое выражение для входного сигнала:

$$x(t) = 1(t - 0{,}5) - 3 \cdot 1(t - 1) + 2 \cdot 1(t - 2)$$

$x(t) = 1(t – 0,5) - 3 \cdot 1(t – 1) + 2 \cdot 1(t – 2)$ $\qquad h(t) = 1 – e^{-t}$

Если вход системы есть единичная ступенчатая функция, то , по определению, выход – переходная функция.

$y(t) = h(t – 0,5) – 3h(t – 1) + 2h(t – 2) =1 – e^{-(t-0,5)}- 3 + 3 \cdot e^{-(t-1)}+ 2 - 2 \cdot e^{-(t-2)}=$

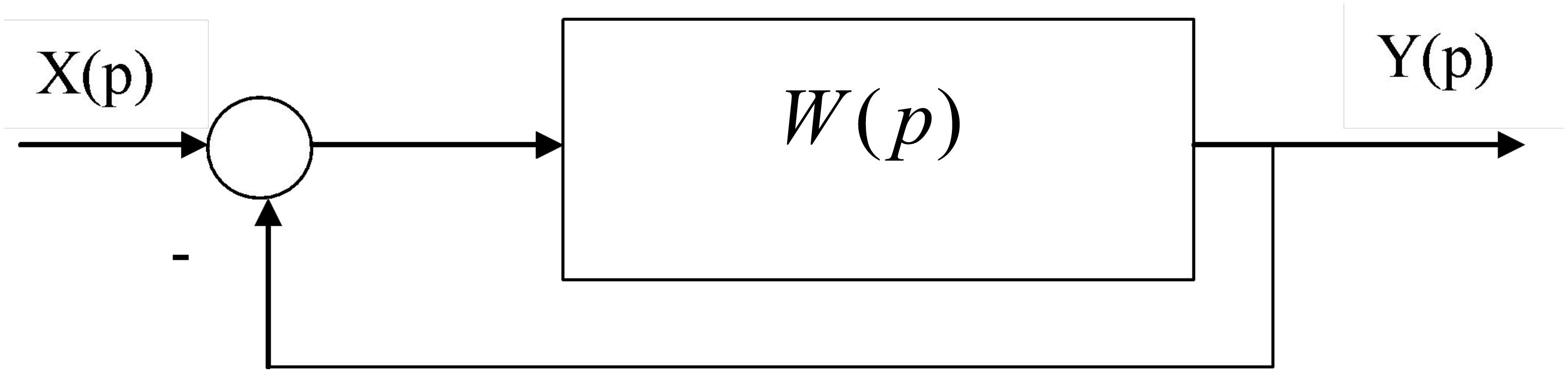
$= 3 \cdot e^{-(t-1)}- 2 \cdot e^{-(t-2)}- e^{-(t-0,5)}$

$y(3) = 3 \cdot e^{-2}- 2e^{-1}- e^{-2,5}.$

$$H(p) = \frac{1}{p}\Phi(p) = \frac{2(p+1)^2}{p(p+3)^3}$$

$$h(0) = \lim_{p\to\infty} p \cdot H(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{p \cdot 2(p+1)^2}{p(p+3)^3} = \lim_{p\to\infty} \frac{\frac{2}{p}(1+\frac{1}{p})^2}{(1+\frac{3}{p})^3} = 0$$

4. Структурная схема АС имеет вид



Определить весовую функцию g(t), переходную функцию h(t).

1 $$W(p) = \frac{1}{(10p+10)(0{,}1p+1)}$$

2 $$W(p) = \frac{p(p+2)}{(2p+2)(p+1)}$$

3 $$W(p) = \frac{2}{(p+3)(5p+1)}$$

4 $$W(p) = \frac{5p}{(p+5)(0{,}5p+2)}$$