

Муниципальное казённое общеобразовательное учреждение
Джогинская средняя общеобразовательная школа

Семинар - практикум

«Задачи на прогрессии в задании № 14»

ОГЭ по математике

Учитель математики: Васильева В. М.

Апрель 2023г.

Спецификация КИМ ОГЭ 2023 г.

№	Основные проверяемые требования к математической подготовке	Коды проверяемых элементов содержания	Коды разделов элементов требований	Уровень сложности	Максимальный балл за выполнение задания
14	Уметь строить и читать графики функций, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели	4	4,7	Б	1

Кодификатор КИМ ОГЭ 2023 г.

Код контролируемого требования	Требования к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования, проверяемые заданиями экзаменационной работы	
	Федеральный компонент государственного стандарта основного общего образования	ФГОС ООО
4.5	Решать элементарные задачи, связанные с числовыми последовательностями	Овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей
4.6	Распознавать арифметические и геометрические прогрессии, решать задачи с применением формулы общего члена и суммы нескольких первых членов прогрессий	Овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей

№	Содержание задания в КИМ ОГЭ	Содержательные ошибки
№ 14.	Задание с практическим содержанием, направленное на проверку умения применять знания об арифметической и геометрической прогрессиях в прикладных задачах.	неверное установление вида прогрессии, вычислительные ошибки, непонимание прочитанного текста

Задание № 14
ОГЭ по математике
«Задачи на прогрессии»

Виды заданий на данной позиции в КИМах (по [кодификатору](#)):

- - Арифметическая прогрессия. Формула общего члена арифметической прогрессии;
- Формула суммы первых нескольких членов арифметической прогрессии;
- Геометрическая прогрессия. Формула общего члена геометрической прогрессии;
- Формула суммы первых нескольких членов геометрической прогрессии.

Арифметические прогрессии

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом

d – разность арифметической прогрессии: $d = a_{n+1} - a_n$

$a_n = a_1 + d(n-1)$ Формула n -го члена арифметической прогрессии

Сумма первых n членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Геометрические прогрессии

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и тоже не равное 0 число

q – знаменатель геометрической прогрессии:

Формула n -го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{(n-1)}$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии ($q \neq 1$):

$$S_n = \frac{(q^n - 1) b_1}{q - 1}$$

Если все члены геометрической прогрессии положительны, то каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов.

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Справочный материал КИМ ОГЭ

- Формула n -го члена арифметической прогрессии (a_n) , первый член которой равен a_1 и разность равна d :

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

- Формула n -го члена геометрической прогрессии b_n , первый член которой равен b_1 , а знаменатель равен q :

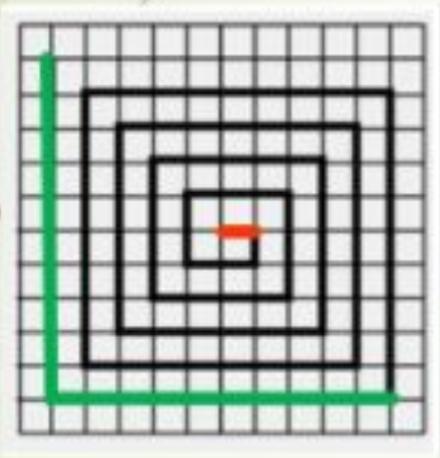
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{(q^n - 1)b_1}{q - 1}.$$

Задача мониторинга

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 нарисована «змейка», представляющая из себя ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину **110**.



$$a_1 = 1 \quad a_{110} = 110$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 110}{2} \cdot 110 = 111 \cdot 55 = 6105$$

Умножаем полученное число на 2

$$6105 \cdot 2 = 12210$$

Ответ: **12210**

Задача № 14 мониторинга

В ходе бета-распада радиоактивного изотопа А каждые 8 минут половина его атомов без потери массы преобразуются в атомы стабильного изотопа Б. В начальный момент масса изотопа А составляла 320 мг. Найдите массу образовавшегося изотопа Б через 40 минут. Ответ дайте в миллиграммах.

Время	Масса изотопа А	Масса изотопа Б
Старт	320	0
8 мин	160	$0+160=160$
16 мин	80	$160+80=240$
24 мин	40	$240+40=280$
32 мин	20	$280+20=300$
40мин	10	$300+10=310$

Ответ:
310

Задача 1.

Вика решила начать делать зарядку каждое утро. В первый день она сделала 30 приседаний, а в каждый следующий день она делала на одно и то же количество приседаний больше, чем в предыдущий день. За 15 дней она сделала всего 975 приседаний. Сколько приседаний сделала Вика на пятый день?

$$\begin{aligned} a_1 &= 30 & S_{15} &= \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 \\ S_{15} &= 975 & a_{15} &= a_1 + 14d \\ a_5 &= ? \end{aligned}$$

$$975 = \frac{30 + (30 + 14d)}{2} \cdot 15$$

$$d = 5$$

$$a_5 = a_1 + 4d \quad a_5 = 50$$

Ответ: 50

Задача 2

При проведении химического опыта реагент равномерно охлаждали на $7,5^{\circ}\text{C}$ в минуту. Найдите температуру реагента (в градусах Цельсия) спустя 6 минут после начала проведения опыта, если начальная температура составляла $-8,7^{\circ}\text{C}$.

Дано: арифметическая прогрессия, $a_1 = -8,7$, $d = -7,5$.

Найти: a_7 .

Решение:

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_7 = -8,7 + 6 \cdot (-7,5)$$

$$a_7 = -8,7 + (-45)$$

$$a_7 = -53,7$$

Ответ: $-53,7$.

Задача 3

В амфитеатре 20 рядов. В первом ряду 56 мест, а в каждом следующем – на 2 места меньше, чем в предыдущем. Сколько мест в амфитеатре?

Дано: арифметическая прогрессия, $a_1 = 56$, $d = -2$.

Найти: S_{20} .

Решение:

$$S = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20$$

$$S = \frac{2 \cdot 56 + 19 \cdot (-2)}{2} \cdot 20 = \frac{112 - 38}{2} \cdot 20 = \frac{74}{2} \cdot 20 = 37 \cdot 20 = 740$$

Ответ: 740.

Задача 4

В течение 20 банковских дней акции компании дорожали ежедневно на одну и ту же сумму. Сколько стоила акция компании в последний день этого периода, если в 9-й день акция стоила 888 рублей, а в 13-й день – 940 рублей?

Дано: арифметическая прогрессия, $a_9 = 888$, $a_{13} = 940$.

Найти: a_{20} .

Решение:

$$\begin{array}{l} 1) a_9 = a_1 + 8d \\ a_{13} = a_1 + 12d \end{array} \quad \begin{array}{l} 2) a_1 + 12d = 940 \\ \underline{a_1 + 8d = 888} \\ 4d = 52 \\ d = 52 : 4 \\ d = 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3) a_1 + 8d = a_9 \\ a_1 = 888 - 8 \cdot 13 \\ a_1 = 888 - 104 \\ a_1 = 784 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4) a_{20} = a_1 + 19d \\ a_{20} = 784 + 19 \cdot 13 \\ a_{20} = 784 + 247 \\ a_{20} = 1031 \end{array}$$

Ответ: 1031.

Задача 5

В 11:00 часы сломались и за каждый следующий час отставали на одно и то же количество минут по сравнению с предыдущим часом. В 21:00 того же дня часы отставали на 20 минут. На сколько минут отставали часы спустя 24 часа после того, как они сломались?

Дано: арифметическая прогрессия, $10d = 20$.

Найти: $24d$.

Решение:

$$d = 20 : 10 = 2$$

$$24d = 24 \cdot 2 = 48$$

Ответ: 48.

Задача 6

Каждое простейшее одноклеточное животное инфузория – туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 1280?

Дано: геометрическая прогрессия, $b_7 = 1280$, $q = 2$.

Найти: b_1 .

Решение:

$$b_7 = b_1 \cdot q^6$$

$$1280 = b_1 \cdot 2^6$$

$$b_1 = 1280 : 64$$

$$b_1 = 20$$

Ответ: 20.

Задача 7

Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

Задача 7

Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$q = 4 \quad b_1 = 5000 \quad b_4 = ?$$

$$\begin{aligned} b_4 &= 5000 \cdot 4^3 = 5000 \cdot 64 = 5000 \cdot (60 + 4) = \\ &= 300000 + 20000 = 320000 \end{aligned}$$

Ответ: 320000

Задача 8

К концу 2009 года в городе проживало 53 100 человек. Каждый год число жителей города возрастало на одну и ту же величину. В конце 2018 года в городе проживало 60 390 человек. Какова была численность населения этого города к концу 2015 года?

Задача 8

К концу 2009 года в городе проживало 53 100 человек. Каждый год число жителей города возрастало на одну и ту же величину. В конце 2018 года в городе проживало 60 390 человек. Какова была численность населения этого города к концу 2015 года?

Дано: арифметическая прогрессия, $a_1 = 53\,100$, $a_{10} = 60\,390$.

Найти: a_7 .

Решение:

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

$$60390 = 53100 + 9d$$

$$9d = 60390 - 53100$$

$$9d = 7290$$

$$d = 810$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_7 = 53100 + 6 \cdot 810$$

$$a_7 = 53100 + 4860$$

$$a_7 = 57960$$

Ответ: 57960.

Задача 9

Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Задача 9

Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

$$a_1 = 10 \quad n = 6 \quad S_6 = 120 \quad a_3 = ?$$

$$120 = \frac{2 \cdot 10 + d \cdot 5 \cdot 6}{2}$$

$$3(20 + 5d) = 120$$

$$20 + 5d = 40$$

$$5d = 20$$

$$d = 4$$

$$a_3 = 10 + 2 \cdot 4 = 10 + 8 = 18$$

Ответ: 18

Задача 10

В течение 20 банковских дней акции компании дорожали ежедневно на одну и ту же сумму. Сколько стоила акция компании в последний день этого периода, если в 9-й день акция стоила 888 рублей, а в 13-й день — 940 рублей?

Задача 10

В течение 20 банковских дней акции компании дорожали ежедневно на одну и ту же сумму. Сколько стоила акция компании в последний день этого периода, если в 9-й день акция стоила 888 рублей, а в 13-й день — 940 рублей?

$$a_9 = 888$$

$$a_{13} = 940$$

$$a_{20} = ?$$

$$\begin{cases} a_9 = a_1 + 8d \\ a_{13} = a_1 + 12d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 888 = a_1 + 8d \\ 940 = a_1 + 12d \end{cases}$$

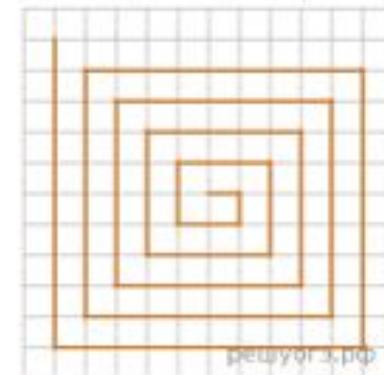
$$\begin{cases} d = 13 \\ a_1 = 784 \end{cases}$$

$$a_{20} = 1031$$

Ответ : 1031

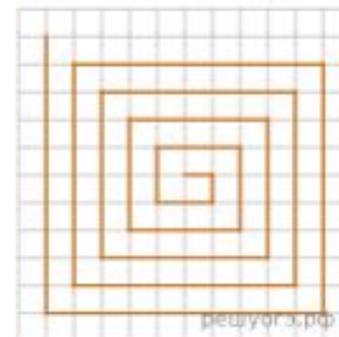
Задача 11

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 нарисована «змейка», представляющая собой ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 120.



Задача 11

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 нарисована «змейка», представляющая собой ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 120.



Решение.

Длина змейки, изображенной на рисунке, составляет $10 + 10 + 9 + 9 + 8 + \dots + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ и представляет арифметическую прогрессию, члены которой учтены два раза, первый член равен 10, а разность — 1.

Найдем сумму арифметической прогрессии для змейки, последнее звено которой 120

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{10 + 120}{2} \cdot 120 = 121 \cdot 60 = 7260.$$

Каждый член прогрессии должен быть учтен дважды, следовательно, длина змейки $S = 2S_n = 14520$.

Ответ: 14520.

Задача 12

Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Сколько бактерий окажется в организме через 4 часа, если по истечении четвертого часа в организм из окружающей среды попала еще одна бактерия?

Задача 12

Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Сколько бактерий окажется в организме через 4 часа, если по истечении четвертого часа в организм из окружающей среды попала еще одна бактерия?

Решение. В четырех часах двенадцать 20-минутных интервалов, следовательно, произойдет 12 циклов деления бактерий. Количество бактерий составляет геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем 2, поэтому через 12 циклов деления количество бактерий составит

$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 1 \cdot 2^{12} = 4096.$$

После того, как в организм попадет еще одна бактерия, их количество составит $4096 + 1 = 4097$.

Ответ: 4097 бактерий.

Задача 13

Мощности пяти различных электромоторов составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Мощность самого слабого электромотора — 5 кВт , а третьего по мощности — 20 кВт . Найдите мощность самого мощного электромотора, ответ дайте в кВт.

Задача 13

Мощности пяти различных электромоторов составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Мощность самого слабого электромотора — 5 кВт, а третьего по мощности — 20 кВт. Найдите мощность самого мощного электромотора, ответ дайте в кВт.

Решение. Исходя из условия задачи, первый член геометрической прогрессии $b_1 = 5$, третий член $b_3 = 20$. Выразим его через b_1 и q ($q > 0$):

$$\begin{cases} b_1 = 5, \\ b_1 q^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 5, \\ q^2 = 4 \end{cases} \stackrel{q > 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b_1 = 5, \\ q = 2. \end{cases}$$

Самая большая мощность у пятого электромотора, найдем её по формуле для пятого члена геометрической прогрессии:

$$b_5 = b_1 q^4 = 5 \cdot 2^4 = 80 \text{ кВт.}$$

Ответ: 80.