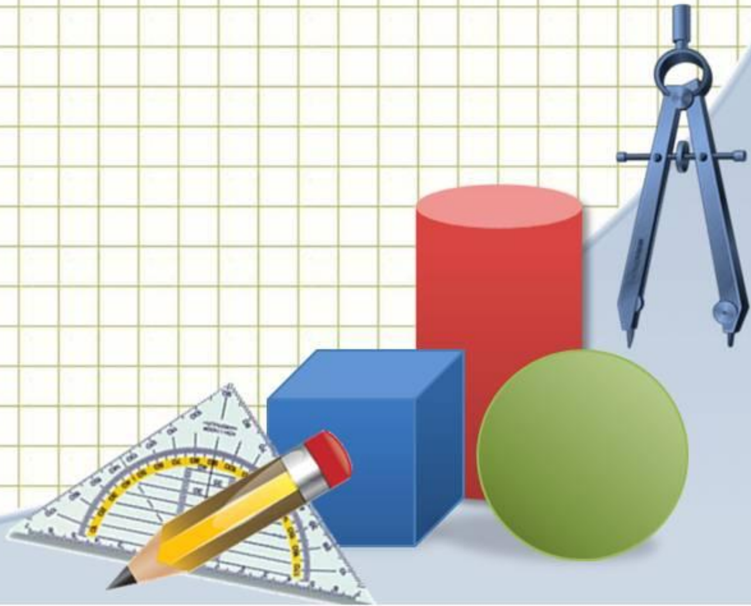
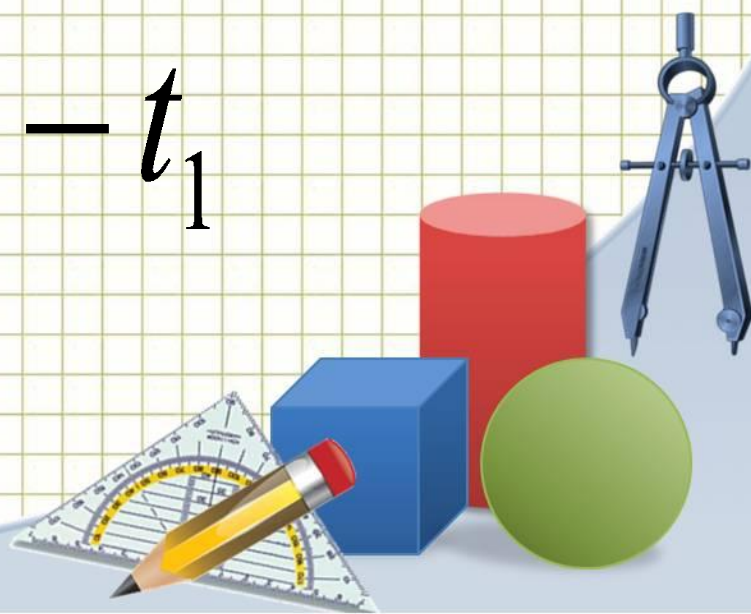
# Производная



# Происхождение производной.

Первую задачу: о связи скорости и пути прямолинейно и неравномерно движущейся точки впервые решил **Ньютон**. Он пришел к формуле :

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$



**Производной** функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a;b)$, в некоторой точке **$x$** этого интервала называют **предел** отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

**Нахождение производной называют *дифференцированием***

$$(kx+b)'=k$$

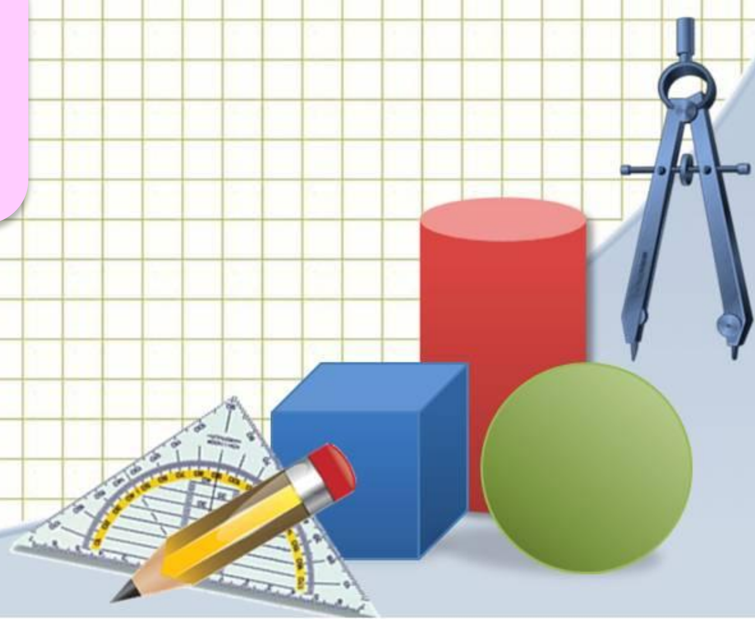
$$(C)'=0$$

$$\left(x^2\right)'=2x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$$



# Таблица производных

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $C$ | $0$ | $\sqrt{x}$ | $1/(2\sqrt{x})$ |
| $kx + b$ | $k$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $x^2$ | $2x$ | $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $tg\, x$ | $1/\cos^2 x$ |
| $1/x$ | $-1/x^2$ | $ctg\, x$ | $-1/\sin^2 x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\ln x$ | $1/x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\log_a x$ | $1/(x \ln a)$ |

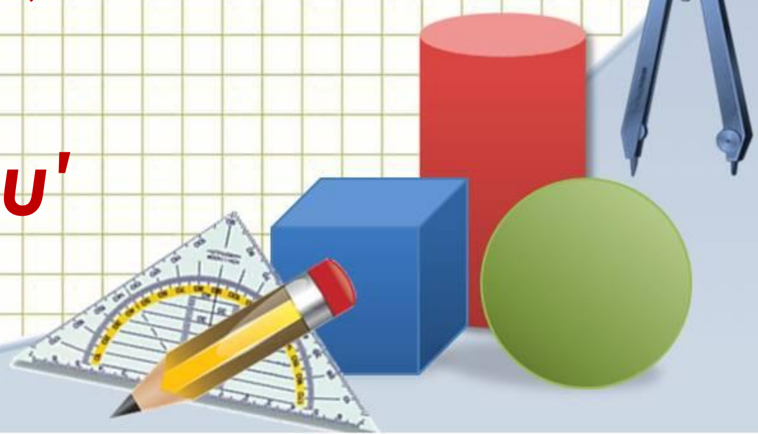
# Правила нахождения производной

***1.*** ***Если функции*** $u(x)$ ***и*** $v(x)$ ***имеют в точке*** $x$ ***производные, то их сумма*** $u(x) + v(x)$ ***также имеет в этой точке производную, причем***

$$(u + v)' = u' + v'$$

***2. Если функция*** $u(x)$ ***имеет в точке*** $x$ ***производную и*** $C$ ***– данное число, то функция*** $C \cdot u(x)$ ***также имеет в этой точке производную, причем***

$$(Cu)' = C \cdot u'$$



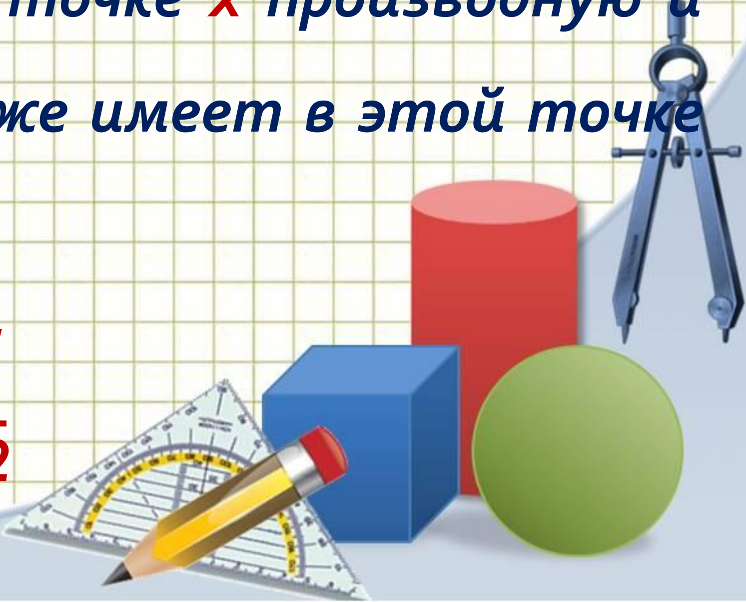
# Правила нахождения производной

***3. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные, то их произведение u(x) · v(x) также имеет в этой точке производную, причем***

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

***4. Если функция v(x) имеет в точке x производную и v(x) ≠ 0, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем***

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$



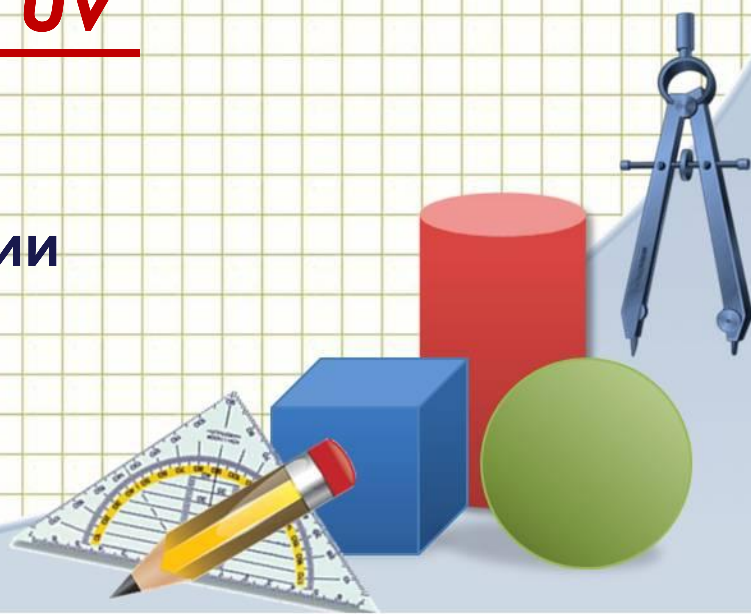
# Правила нахождения производной

***5. Если функции*** $u(x)$ ***и*** $v(x)$ ***имеют в точке*** $x$ ***производные и*** $v(x) \neq 0$***, то функция*** $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ ***также имеет в этой точке производную, причем***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

**6.Производная сложной функции**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$



# Примеры

$$1)\ g(x) = x^2 - 3x + 4$$

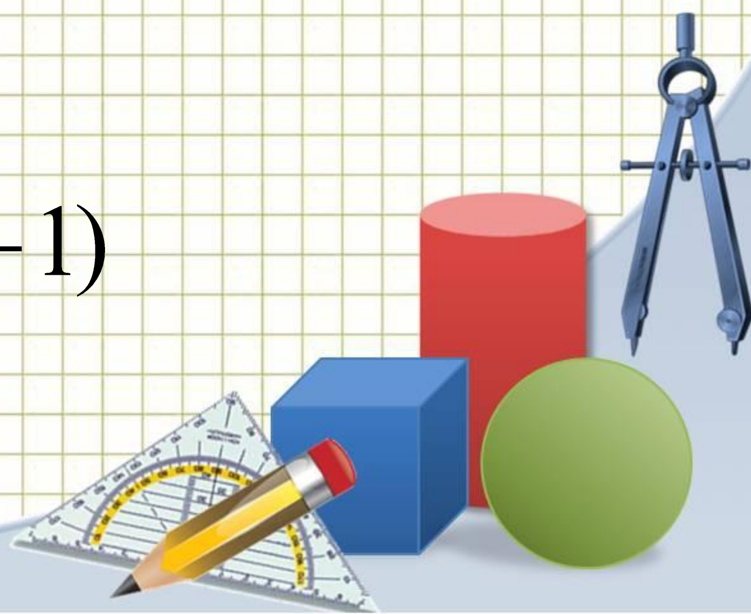
*Ответ:* $g'(x) = 2x - 3$

$$2)\ f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \pi$$

*Ответ:* $f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + 4x$

$$3)\ h(x) = (2x+1)^2$$

*Ответ:* $h'(x) = 4(2x+1)$



# Примеры

$$4)\ y = \sin 2x$$

$$Ответ:\quad y' = 2\cos 2x$$

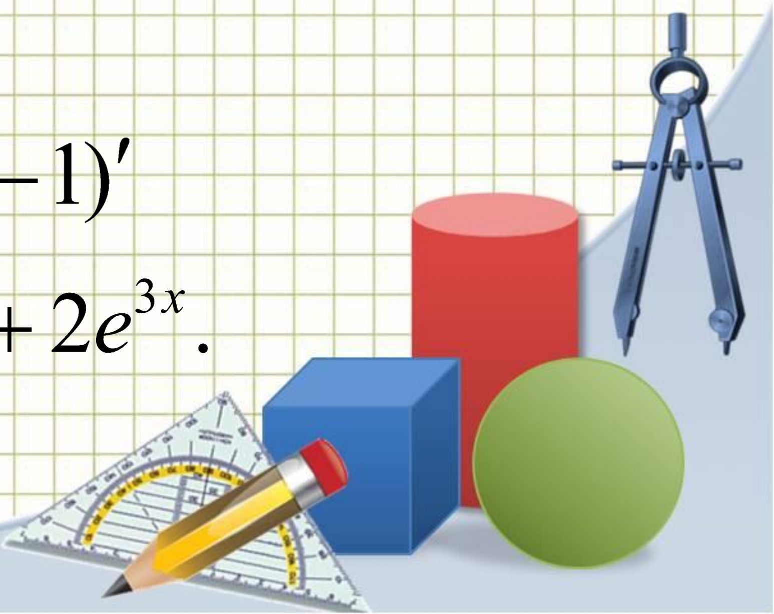
$$5)\ y = 3x^2 + \cos x.$$

$$Ответ:\quad y' = 6x - \sin x$$

$$6)\ y = e^{3x}(2x-1).$$

$$y' = (e^{3x})'(2x-1) + e^{3x}(2x-1)'$$

$$Ответ:\quad y' = 3e^{3x}(2x-1) + 2e^{3x}.$$



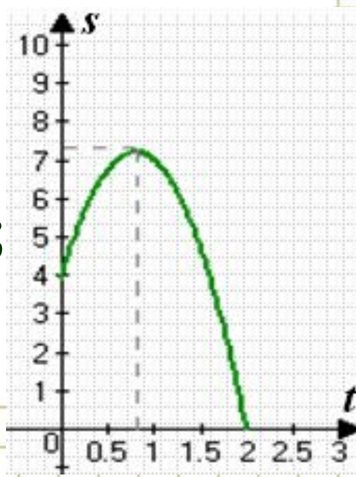
# ЗАДАЧА №1

**Тело, подброшенное вверх движется по закону**

**$s(t) = 4 + 8t - 5t^2$ . Найдите:**

**1) Скорость тела в начальный момент времени;**

**2) Наибольшую высоту подъёма тела.**




**РЕШЕНИЕ.**

$$v(t) = S'(t)$$

1) $v(t) = s`(t) = 8 - 10t$ - скорость тела;

2) $t = 0$, $v(0) = s`(0) = 8$ м/с – скорость тела в начальный момент времени

3) $s(0{,}8) = 4 + 8\cdot 0{,}8 - 5\cdot 0{,}64 = 7{,}2$ м – максимальная высота броска тела.

**подсказка**

**Ответ: 8 м/с ; 7,2 м .**

# ЗАДАЧА №2

При каких значениях x значение производной функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ равно 0

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \qquad f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot 3x^{2-1} - 12$$

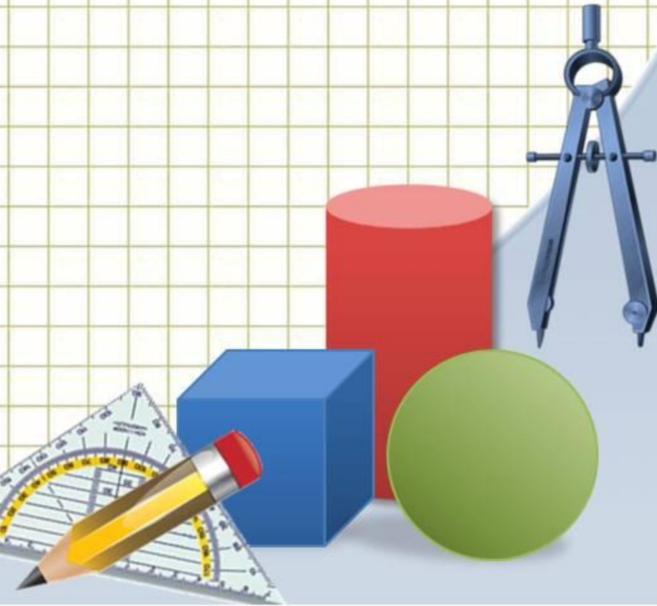
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \qquad f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0(:6) \qquad x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$\textit{Ответ}: x_1 = 2, x_2 = -1$$



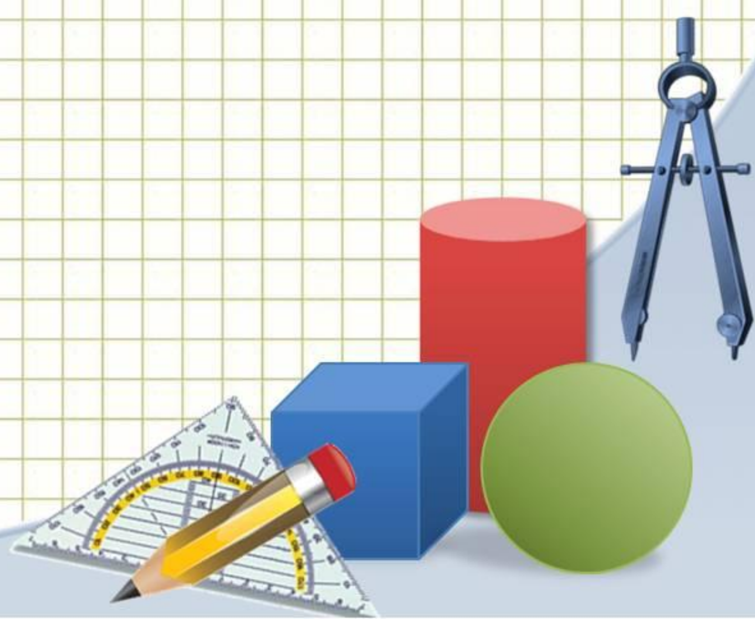
# Примеры

$$a)\ f(x) = x^2 + x^3$$

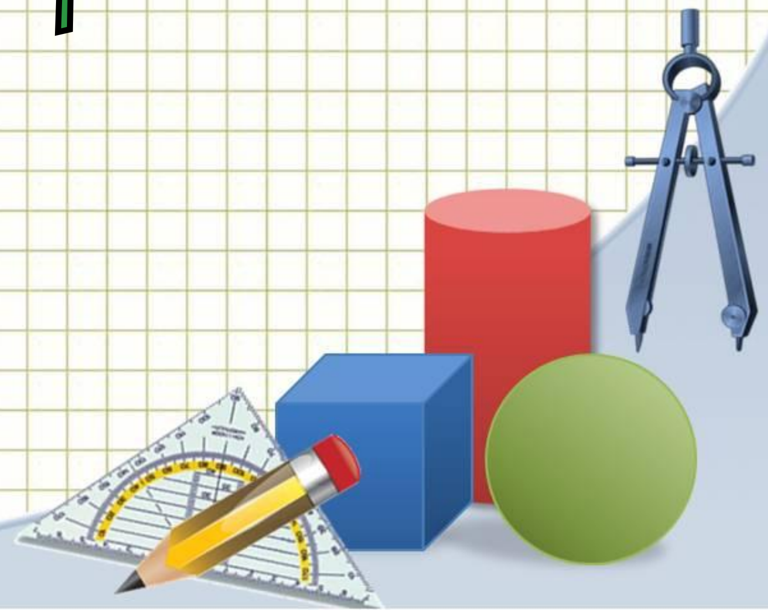
$$б)\ f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$$

$$в)\ f(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$г)\ f(x) = x^3 + \sqrt{x}$$



# Производная и ее применение



# Найдите производные функций:

$$\left(\left(x+1\right)^2\right)' =$$

**Правильный ответ**

$$\left(2x-8\right)' =$$

**Правильный ответ**

$$\left(\sqrt{2x}\right)' =$$

**Правильный ответ**

$$\left(4\cos x\right)' =$$

**Правильный ответ**

$$\left(x\cdot\sin x\right)' =$$

**Правильный ответ**

# Найдите производную функции(устно):

а) $y = 6x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 5$,

***Правильный ответ***

б) $y = (4 - 5x)^7$,

***Правильный ответ***

в) $y = 8 + 3\cos x$,

***Правильный ответ***

г) $y = 4\sin x - 6 \ln x$,

***Правильный ответ***

# Найдите производную функции(устно):

д) $y = 7x^3 - 5e^{4x+1}$,

***Правильный ответ***

е) $f(x)=2x^2+\sin x$,

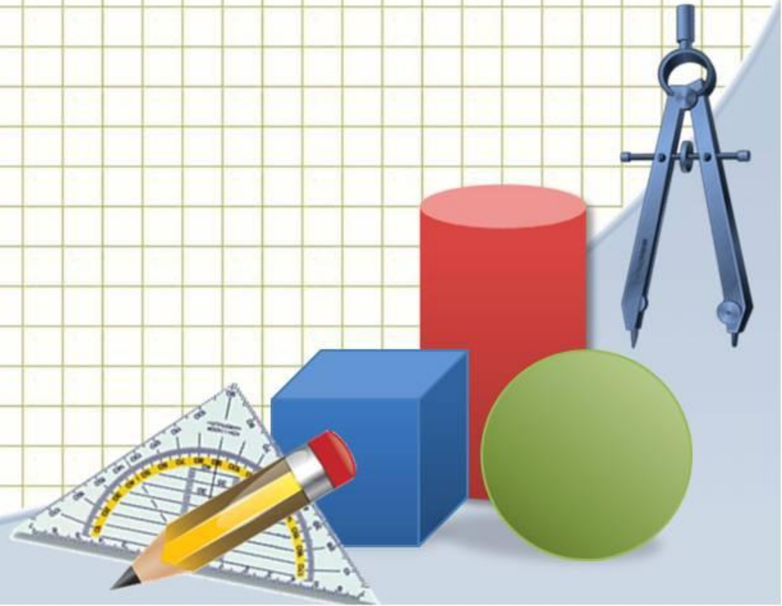
***Правильный ответ***

ж) $f(x)=2x^2 + \mathrm{tg}\, x$,

***Правильный ответ***

з) $f(x)=4x^5 - \cos 3x$,

***Правильный ответ***



**Задание №1.** Найдите производную функции $y = x^5 + 0,25x^4 + 3$

1) $y' = x^4 + 0,25x^3 + 3$;

2) $y' = x^4 + 0,25x^3$;

3) $y' = 5x^4 + x^3 + 3$;

4) $y' = 5x^4 + x^3$.

**Задание №2.** Найдите производную функции $y = x^6 + 0,25x^4 + 4$

1) $y' = 6x^5 + x^3 + 4$;

2) $y' = x^5 + 0,25x^3$;

3) $y' = x^5 + 0,25x^3 + 4$;

4) $y' = 6x^5 + x^3$.

3. Найдите производную функции $y = x^6 - 4\sin x$

1) $y' = 6x^5 + 4\cos x$;

2) $y' = 6x^5 - 4\cos x$;

3) $y' = \frac{x^7}{7} + 4\cos x$;

4) $y' = x^5 - 4\cos x$.

4. Найдите производную функции $y = 9x^9 + \cos x$

1) $y' = 81x^8 + \sin x$;

2) $y' = 81x^8 - \sin x$;

3) $y' = \frac{x^{10}}{10} + \sin x$;

4) $y' = x^8 - \sin x$.

5. Найдите производную функции $y = 3\cos x + x^2$

1) $y' = 3\sin x - 2x$;

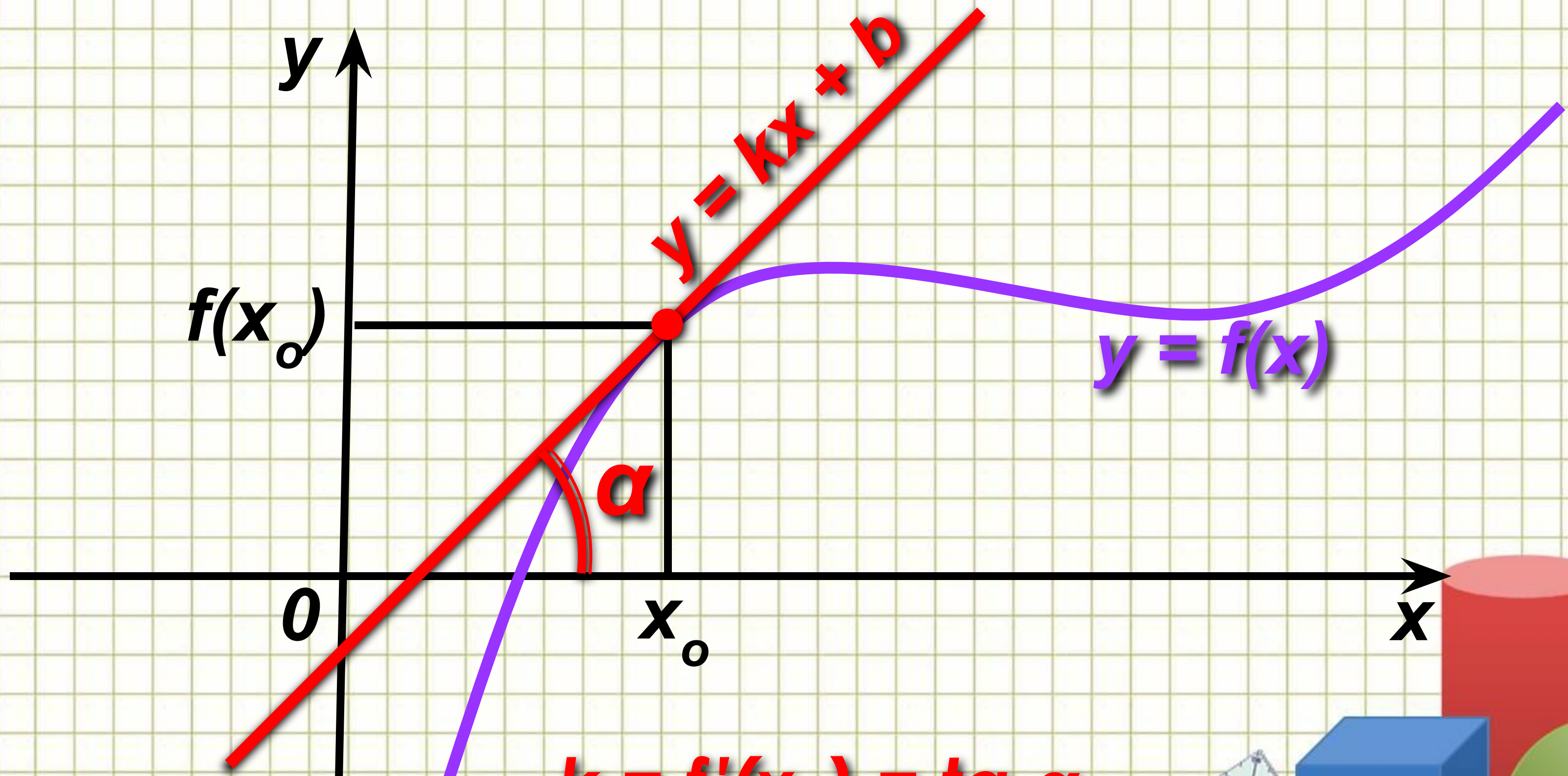
2) $y' = 2x + 3\sin x$;

3) $y' = 2x - 3\sin x$;

4) $y' = x^2 + 2\cos x$.

# Касательная

**к графику дифференцируемой в точке $x_0$ функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_o; f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.**




**$k = f'(x_o) = tg\ \alpha$ –**

**это угловой коэффициент касательной.**

# Общий вид уравнения касател

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

## Алгоритм составления уравнения касате

1° Находим значение функции в точке $x_o$: $f(x_o)$.

2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

3° Находим значение производной в точке $x_o$: $f'(x_o)$.

4° Подставляем эти данные в общее уравнения касательной: $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

- ***Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков её возрастания и убывания.***

***Признак возрастания функции:***

***Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I.***

***Признак убывания функции:***

***Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.***

# Алгоритм решения неравенств методом интервалов:

*Выделить функцию y=f(x).*

1. **Найти *область определения функции D(f)*. Указать промежутки непрерывности.**
2. **Найти *нули функции*, решив уравнение f(x)=0.**
3. **Определить *знак функции* между**

**её нулями в области определения.**

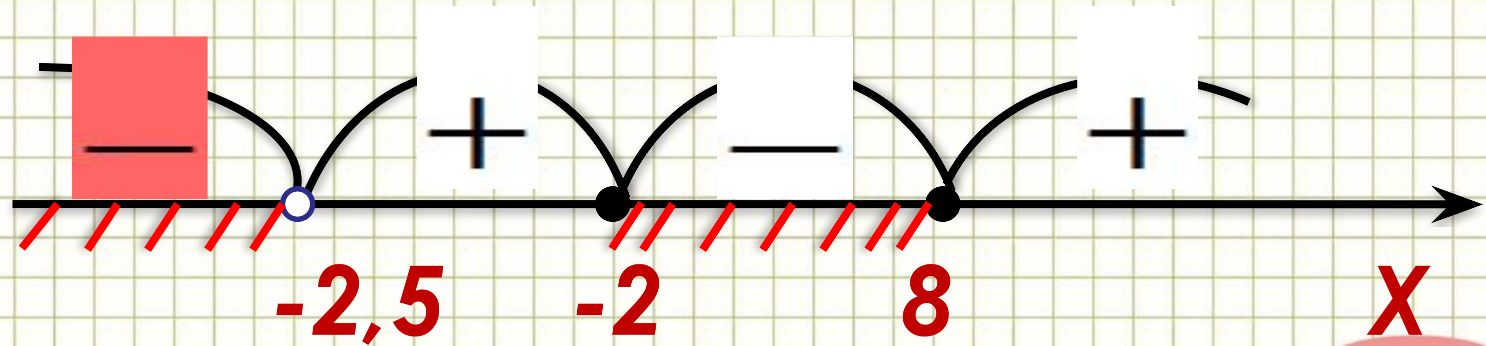
***Решите неравенство:*** $\dfrac{x^2-6x-16}{2x+5}\le 0$

*1.* $f(x)=\dfrac{x^2-6x-16}{2x+5}=0$ $2x+5\neq 0,\ x\neq -2{,}5$

*2. f(x)=0, если* $x^2-6x-16=0$

$x_1=8,\ x_2=-2$

*3.*

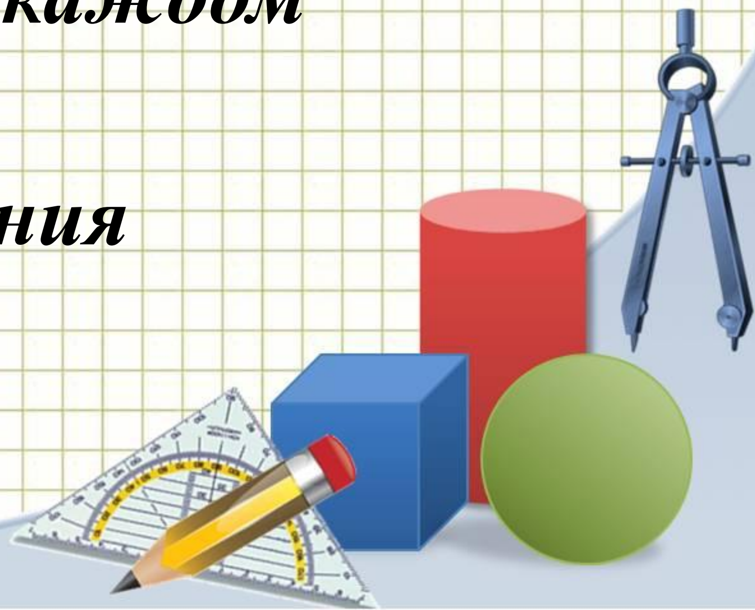



$f(10)=\dfrac{(10)^2-6\cdot 10-16}{2\cdot 10+5}=" + "$

***Ответ:*** $x\in(-\infty;-2{,}5)\cup[-2;8]$

# Алгоритм нахождения промежутков возрастания (убывания) функции $y=f(x)$:

1. Найти **производную функции $f'(x)$**.
2. Решить уравнение $f'(x)=0$.
3. Найти **знак производной** на каждом интервале.
4. Согласно признаку возрастания (убывания) функции, найти **промежутки возрастания и убывания.**



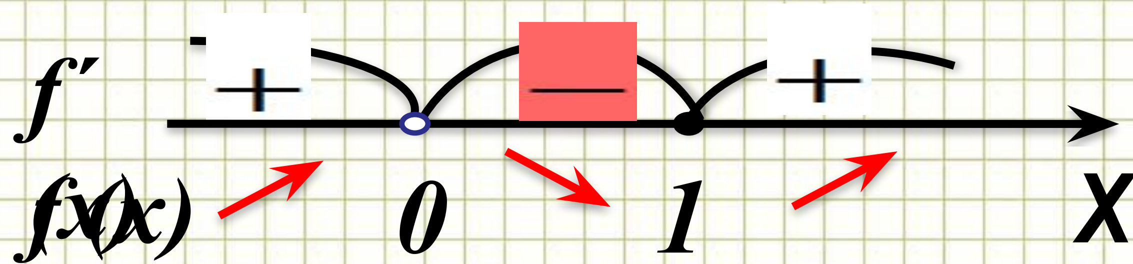
***Найдите промежутки возрастания … я функции:***

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

***1.*** $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

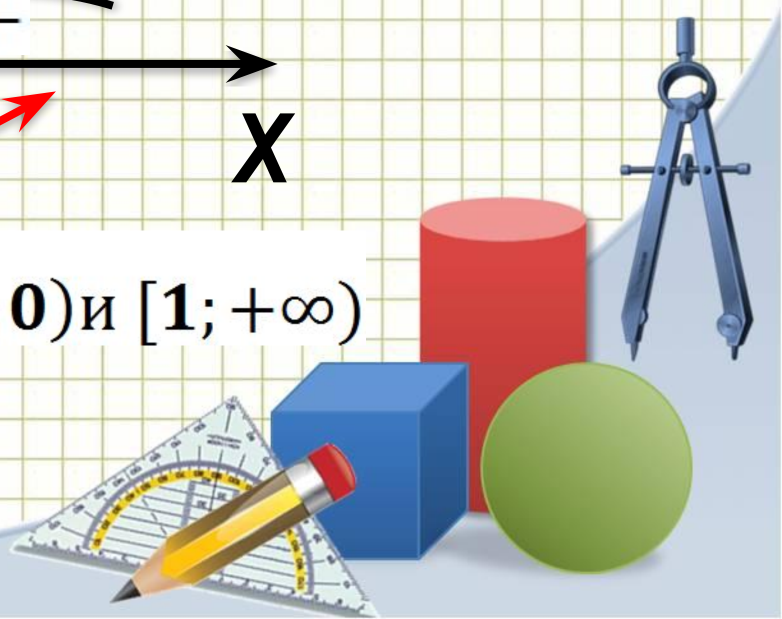
***2. f′(x)=0, если*** $2 - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

***3.***




***Ответ:*** $f(x)$возрастает на $(-\infty; 0)$и $[1; +\infty)$

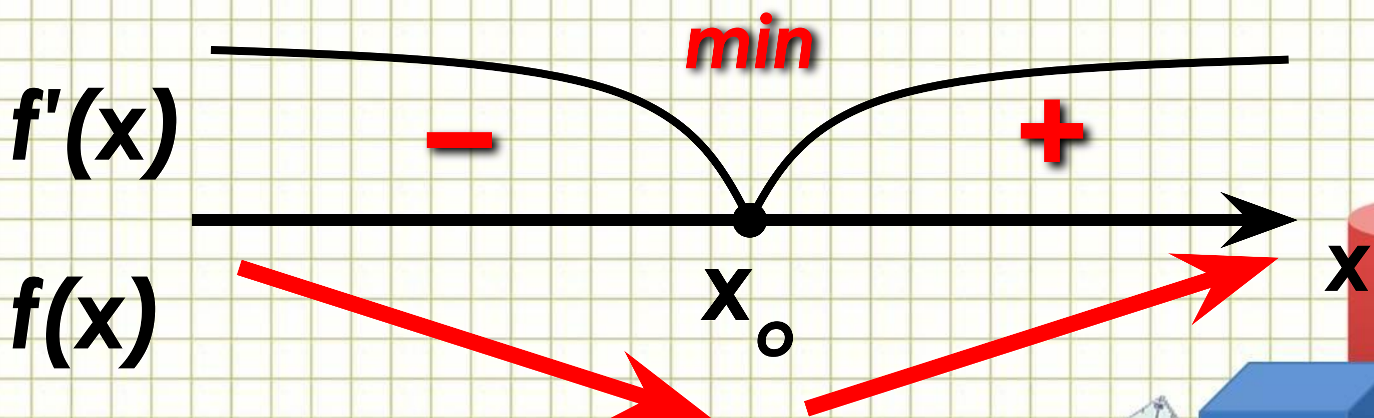
$f(x)$убывает на $(0; 1]$



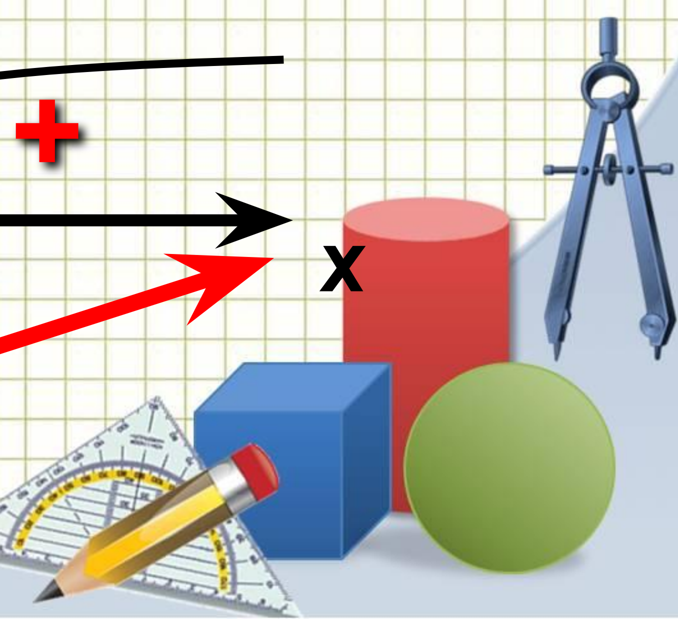
# Минимум функции

Точка $x_o$ называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_o$, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.

Если в точке $x_o$ производная функции $f(x)$ меняет знак с «–» на «+», то $x_o$ – **точка локального минимума** функции $f(x)$.



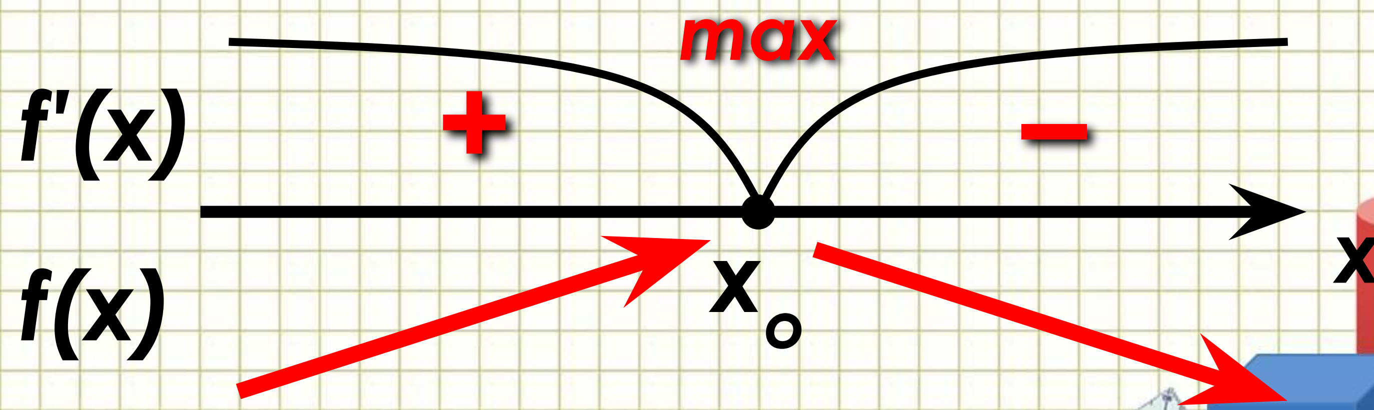

$f(x_o)$ – минимум функции



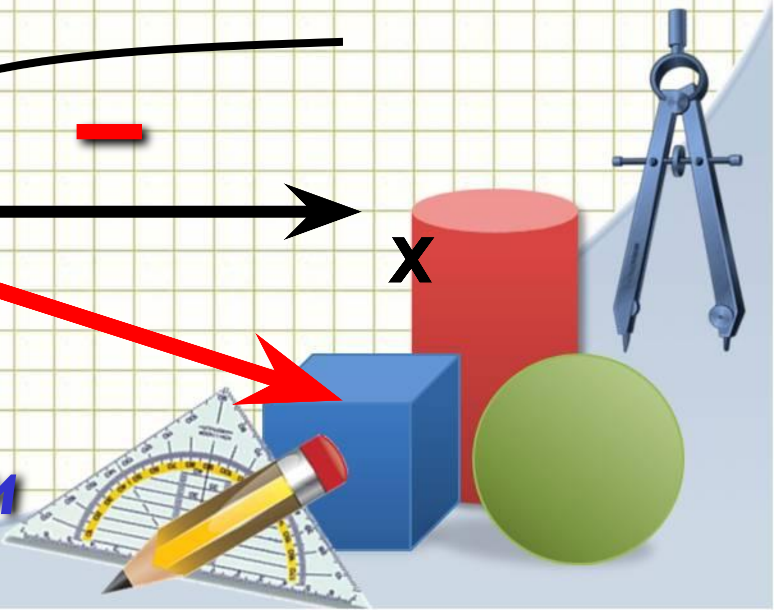
# Максимум функции

Точка $x_o$ называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_o$, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.

Если в точке $x_o$ производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «–», то $x_o$ – **точка локального максимума** функции $f(x)$.




$f(x_o)$ – максимум функции



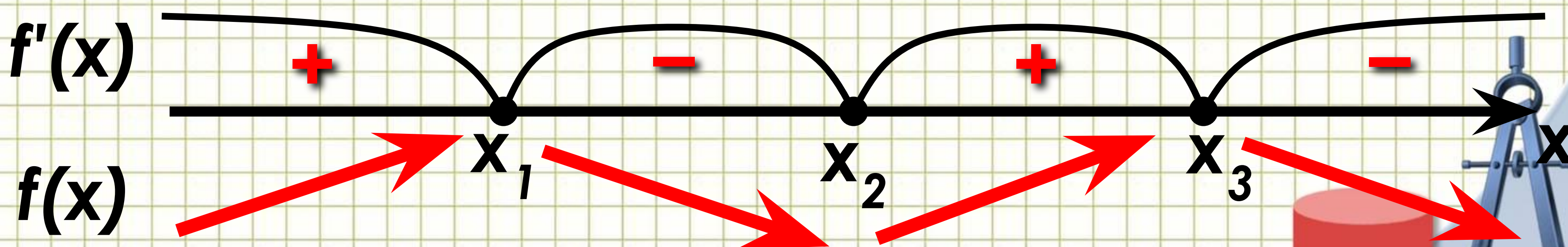
# Алгоритм исследования функции на монотоннос

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:




5° а) Промежутки возрастания: $(-\infty; x_1]$; $[x_2; x_3]$.

б) Промежутки убывания: $[x_1; x_2]$; $[x_3; +\infty)$.

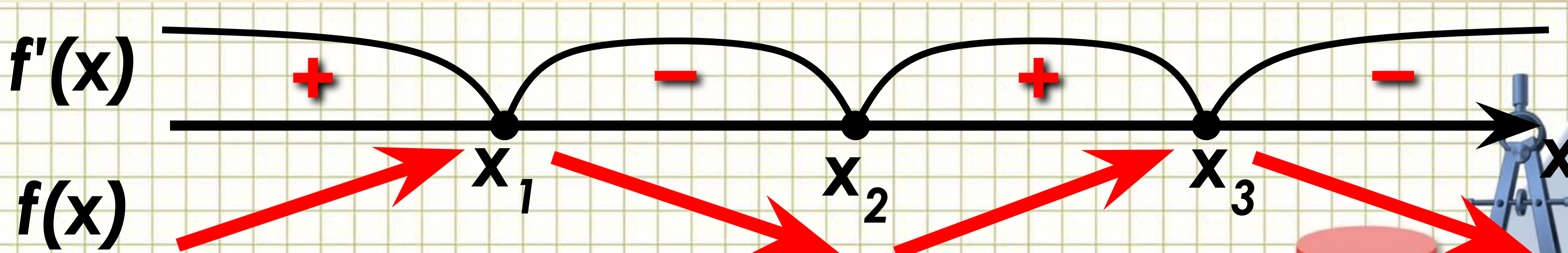
# Алгоритм исследования функции на экстрему

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:




5° а) $x_1$; $x_3$ – точки максимума; $x_2$ – точка минимума.

б) $f(x_1)$; $f(x_3)$ – максимумы функции;

$f(x_2)$ – минимум функции.

## *Примеры*

- д) $y = 7x^3 - 5e^{4x+1}$,

$y' = 21x^2 - 20e^{4x+1}$,

$(-\infty, +\infty)$.

е) $f(x)=2x^2+\sin x$,

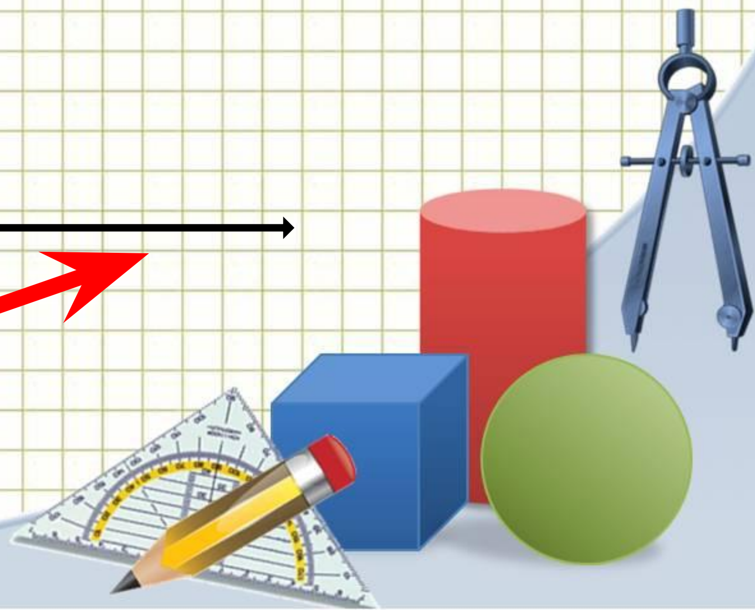
$f'(x)= 4x + \cos x$,

ж) $f(x)=2x^2 + \mathrm{tg}\, x$,

$f'(x)= 4x + 1/\cos^2 x$,

з) $f(x)=4x^5 - \cos 3x$,

$f'(x)= 20x^4 +3 \sin 3x$.



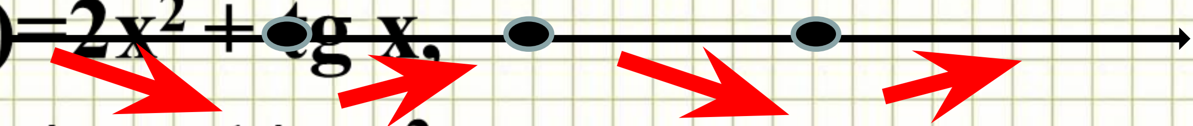
- д) $y = 7x^3 - 5e^{4x+1}$,

$y^{/} = 21x^2 - 20e^{4x+1}$,

е) $f(x)=2x^2+\sin x$,

$f^{/}(x)= 4x + \cos x$,

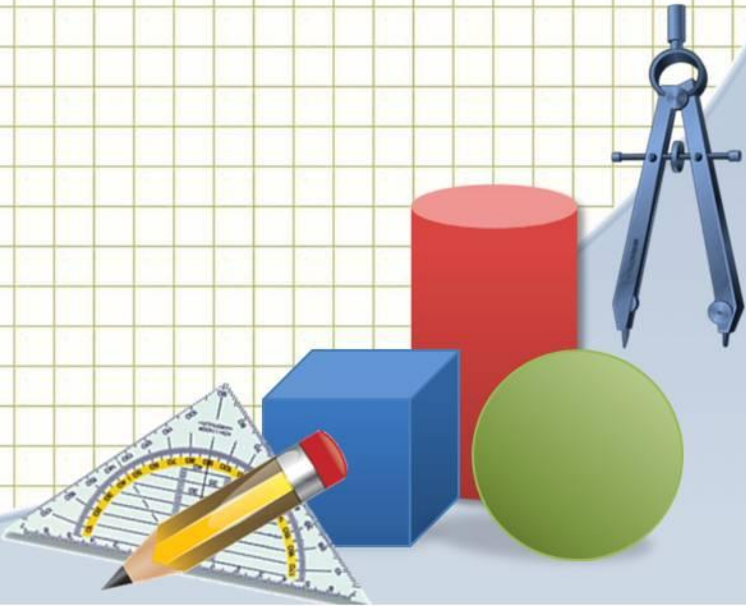
ж) $f(x)=2x^2 + \mathrm{tg}\, x$,



$f^{/}(x)= 4x + 1/\cos^2 x$,

з) $f(x)=4x^5 - \cos 3x$,

$f^{/}(x)= 20x^4 + 3\sin 3x$.



- д) $y = 7x^3 - 5e^{4x+1}$,

$y' = 21x^2 - 20e^{4x+1}$,

е) $f(x)=2x^2+\sin x$,

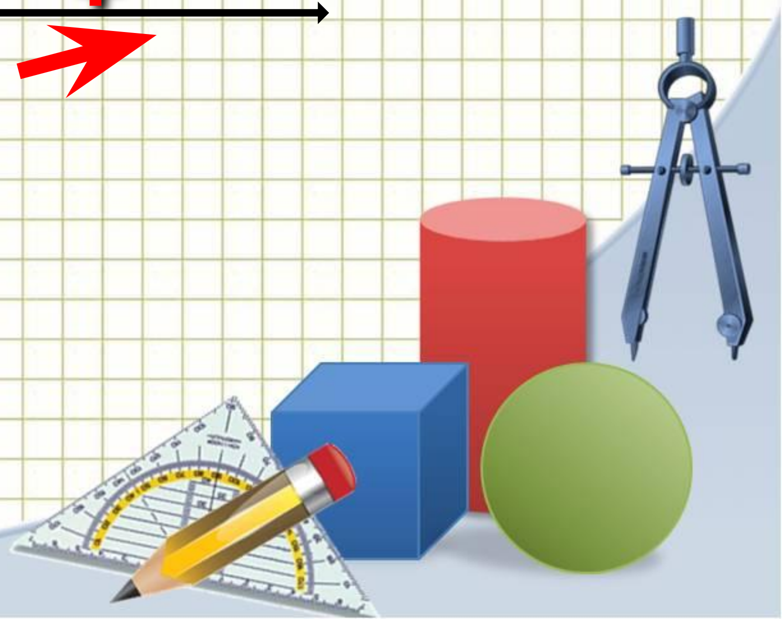
$f'(x)= 4x + \cos x$,

ж) $f(x)=2x^2+\operatorname{tg} x$,

$f'(x)= 4x + 1/\cos^2 x$,

з) $f(x)=4x^5 - \cos 3x$,

$f'(x)= 20x^4 +3 \sin 3x$.



# *Спасибо за внимание!*