

Методы решения тригонометрических уравнений

101001010100111101000010010111010010 11010101010111010000410001010010100
0041000010100101001001010000101101001010140000111101001010100111101000010010111010010
110101010101110100004100001010010100100101000010110100101014000011110100101

Содержание

- *Метод замены переменной*
- *Метод разложения на множители*
- *Однородные тригонометрические уравнения*



Метод замены переменной

С помощью замены $t = \sin x$ или $t = \cos x$, где $t \in [-1; 1]$, $t = \operatorname{tg} x$ решение исходного уравнения сводится к решению квадратного или другого алгебраического уравнения



Пример 1

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

Пусть $\sin x = t \in [-1; 1]$, тогда

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 2 \in [-1; 1] \\ t_2 = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

Ответ : $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Пример 2

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

Поскольку $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Пусть $\cos x = t$, где $t \in [-1; 1]$ тогда

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$$

Ответ : $2\pi k, k \in Z; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в том, что произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другие при этом не теряют смысл:

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 0 \text{ или } g(x) = 0 \text{ или } h(x) = 0$$

и т.д. при условии существования каждого из сомножителей

Пример 3

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{3} = 0, \\ \cos x + \frac{2}{5} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{3}, \\ \cos x = -\frac{2}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z \\ x = \pm \arccos \left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

Пример 4

$$2 \sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$$

$$\cos 5x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2 \sin x - 1 = 0, \\ \cos 5x = 0; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos 5x = 0; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z \\ 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z \end{array} \right.$$

Ответ : $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z.$

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени.

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad | : \cos x$$
$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$
$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$
$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Замечание.

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют *однородным тригонометрическим уравнением второй степени*.

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$
$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$
$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную $\operatorname{tg} x = t$ и решаем методом замены переменной.

Замечание. Если в данном уравнении $a = 0$ или $c = 0$, то уравнение решается методом разложения на множители.



Пример 5

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0 \quad | : \cos x$$

$$\frac{2 \sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\text{Ответ} : \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Пример 6

$$\sin 2x + \cos 2x = 0 \quad | : \cos 2x$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{\cos 2x}$$

$$\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$$

$$\text{Ответ} : -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

Пример 7

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ : $\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 2 + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 8

$$\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$\cos x (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0, & | : \cos x \\ \cos x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ : $-\frac{\pi}{6} + \pi k; \quad \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad n, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 9

$$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x - 3 \cos^3 x = 0 \quad | : \cos^3 x$$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^3 x} - \frac{3 \sin x \cos^2 x}{\cos^3 x} - \frac{3 \cos^3 x}{\cos^3 x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1) - 3(\operatorname{tg} x + 1) = 0$$

$$(\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 3, \\ \operatorname{tg} x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ} : -\frac{\pi}{4} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 10

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2 \quad | \times (\cos^2 3x + \sin^2 3x)$$

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2(\cos^2 3x + \sin^2 3x)$$

$$\underline{3 \sin^2 3x} - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + \underline{5 \cos^2 3x} - \underline{2 \cos^2 3x} - \underline{2 \sin^2 3x} = 0$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 3 \cos^2 3x = 0 \quad | : \cos^2 3x$$

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - \frac{2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x}{\cos^2 3x} + \frac{3 \cos^2 3x}{\cos^2 3x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 3x + 3 = 0$$

Пусть $\operatorname{tg} 3x = t$, тогда

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(t - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$t - \sqrt{3} = 0$$

$$t = \sqrt{3}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$$

$$3x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, n \in Z$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$$

$$\text{Ответ} : \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

С помощью тригонометрических формул

1. Формулы сложения:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y - 1}{\operatorname{ctg}y + \operatorname{ctg}x}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y + 1}{\operatorname{ctg}y - \operatorname{ctg}x}$$

Пример 12

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}$$

Заметим, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, тогда

$$\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ : $\pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 13

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sqrt{3}\cos x\end{aligned}$$

$$\sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ : $2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

С помощью тригонометрических формул

2. Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t$$

$$\sin(\pi \pm t) = \mp \sin t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t$$

$$\sin(2\pi \pm t) = \pm \sin t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t$$

$$\cos(\pi \pm t) = -\cos t$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$$

$$\cos(2\pi \pm t) = \cos t$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{tg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{tg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t$$

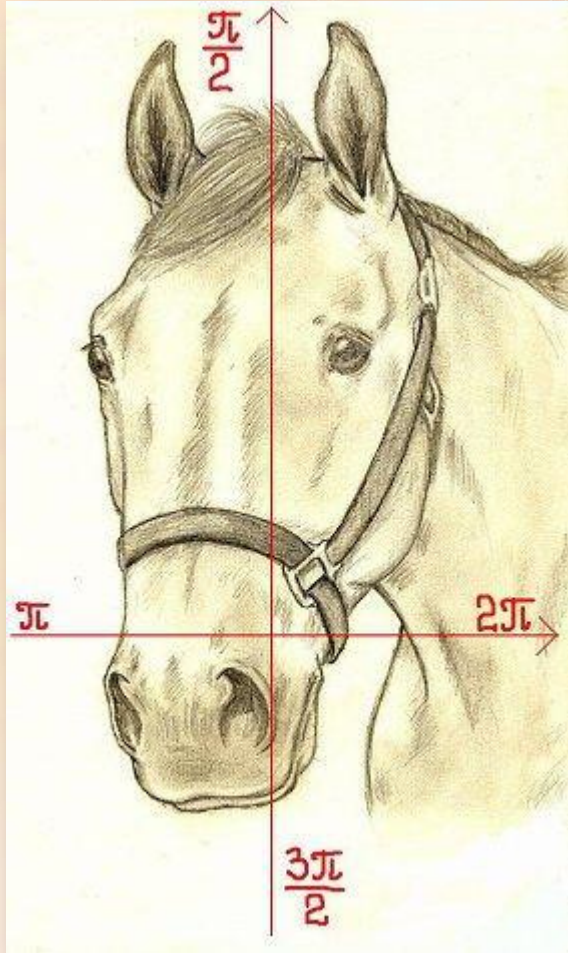
$$\operatorname{ctg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t$$



Лошадиное правило



В старые добрые времена жил рассеянный математик, который при поиске ответа менять или не менять название функции (*синус* на *косинус*), смотрел на свою умную лошадь, а она кивала головой вдоль той оси координат, которой принадлежала точка, соответствующая первому слагаемому аргумента $\pi/2 + a$ или $\pi + a$. Если лошадь кивала головой вдоль оси **ОУ**, то математик считал, что получен ответ «**да, менять**», если вдоль оси **ОХ**, то «**нет, не менять**».



С помощью тригонометрических формул

3. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \begin{cases} \rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \\ \rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$



Пример 14

$$\sin 4x - \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 2 \sin 2x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ 2x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \end{cases}$$

Ответ : $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z; (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

С помощью тригонометрических формул

4. Формулы понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$$

5. Формулы половинного угла:

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

С помощью тригонометрических формул

б. Формулы суммы и разности:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

С помощью тригонометрических формул

7. Формулы произведения:

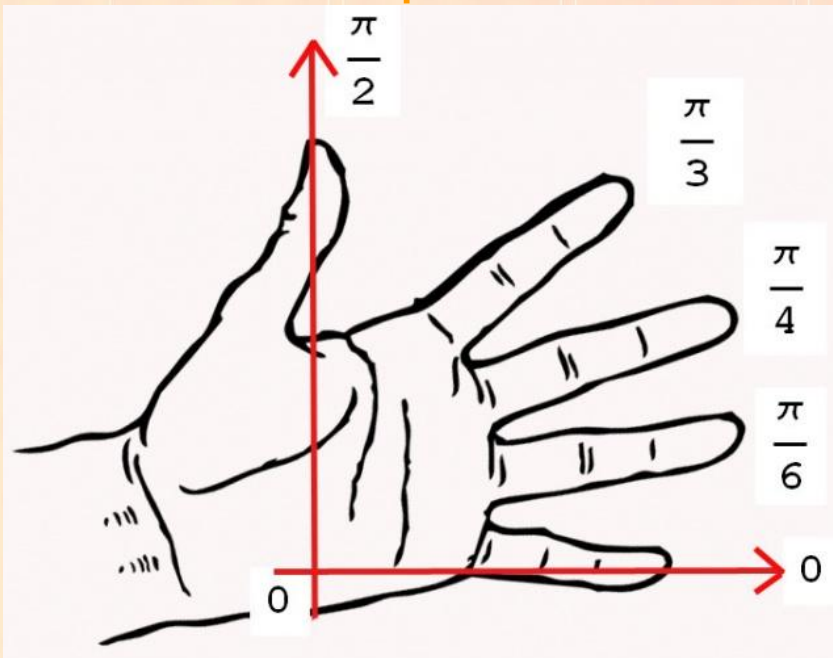
$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$



Мнемоническое правило “Тригонометрия на ладони”



Очень часто требуется знать наизусть значения **cos**, **sin**, **tg**, **ctg** для углов **0°**, **30°**, **45°**, **60°**, **90°**.

Но если вдруг какое-либо значение забудется, то можно воспользоваться правилом руки.

Правило: Если провести линии через мизинец и большой палец, то они пересекутся в точке, называемой “лунный бугор”.

Образуется угол **90°**. Линия мизинца образует угол **0°**.

Проведя лучи из “лунного бугра” через безымянный, средний, указательный пальцы, получаем углы соответственно **30°**, **45°**, **60°**.

Подставляя вместо **n**: **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, получаем значения **sin**, для углов **0°**, **30°**, **45°**, **60°**, **90°**.

Для **cos** отсчет происходит в обратном порядке.

