«Оңтүстік Қазақстан медициналық академиясы» АҚ

АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»

Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар кафедрасы

Презентация

Тақырыбы: Кеңістіктегі жазықтықтың теңдеуі. Кеңістіктегі жазықтық пен түзудің өзара орналасуы.

Орындаған: Ибрагимова Фатима
Тобы: ФӨТҚА 06-21
Қабылдаған: Байділдаева А. С.

Шымкент 2021

Жоспар

Кіріспе:

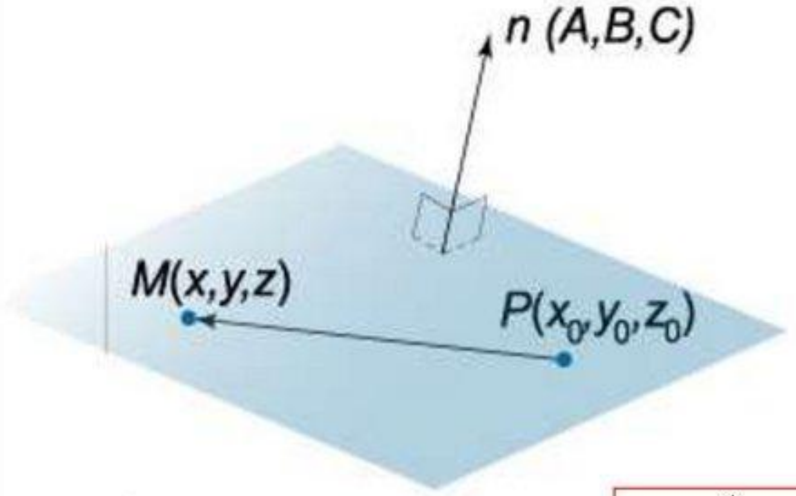
1. Жазықтықтың теңдеуі
2. Жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі
3. Үш және екі нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі
4. Кеңістіктегі түзудің канондық, параметрлік теңдеулері

Қорытынды

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Жазықтықтың теңдеуі

Жазықтықта $P(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі және жазықтыққа перпендикуляр болатын $n(A, B, C)$ векторы берілсін.



$M(x, y, z)$ жазықтықтың кез келген нүктесі

$$\overrightarrow{PM} \perp n \;=>\; \overrightarrow{PM} \cdot n = 0$$

$$\overrightarrow{PM}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$n(A, B, C)$$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \qquad (1)$$

(1) – берілген $P(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін $n(A, B, C)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі.

Мысал. $M_0(1;2;1)$ нүктесінен өтетін және $n(2;3;-4)$ векторына перпендикуляр болып өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: (1) теңдеуді пайдалансақ

$$2(x-1)+3(y-2)-4(z-1)=0$$

$$2x+3y-4z-4=0$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

теңдеуін түрлендіріп

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \qquad \textbf{(2)}$$

(2) – жазықтықтың жалпы теңдеуі, мұндағы

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Жалпы теңдеуінің кейбір дербес жағдайлары:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- $D = 0$ => $Ax + By + Cz = 0$ жазықтығы координата жүйесінің бас нүктесінен өтеді.

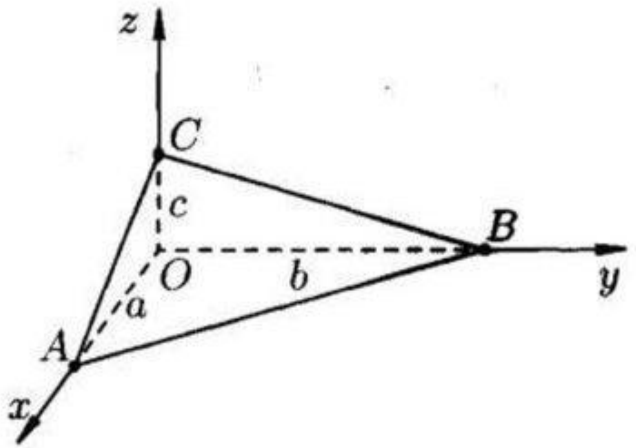
- $C = 0$ => $Ax + By + D = 0$ жазықтығы Oz осіне параллель болады.

- $B = 0, C = 0$ => $Ax + D = 0$ немесе $x = -\dfrac{D}{A}$ жазықтығы OYZ координаталық жазықтығына параллель болады.

- $B = 0, C = 0, D = 0$ => $Ax = 0,\ x = 0$ теңдеуі OYZ координаталық жазықтығының теңдеуі болады.

Жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі

$$Ax+By+Cz+D=0$$



Егер $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0$ болса,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

түріне келтіруге болады. Мұнда $a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}$

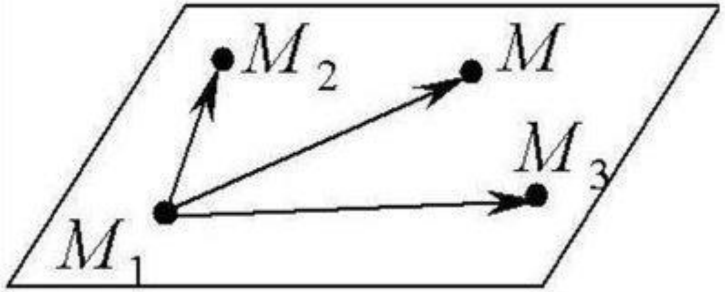
деп белгілесе,

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1} \quad \textbf{(3)}$$

(3) –жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі.

Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

Кеңістікте $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нүктелері берілсін. Осы нүктелер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін табу үшін жазықтықта жатқан кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алайық. Онда $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ векторлары компланар векторлар.



$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0} \qquad \textbf{(4)}$$

(4) - үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

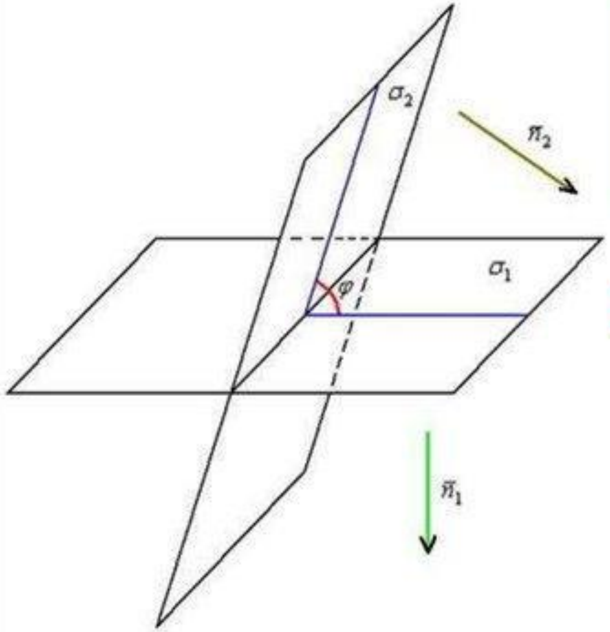
Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық

Кеңістікте $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығына дейінгі арақашықтығын келесі формуламен табылады:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad (5)$$

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

Кеңістікте $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ теңдеулерімен берілген жазықтықтарының арасындағы бұрыш келесі формуладан анықталады:



$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \quad (6)$$

Екі жазықтықтың параллельдік шарты

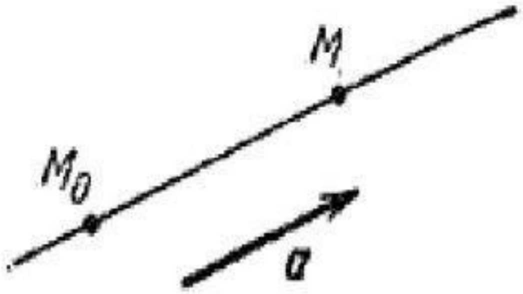
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

Екі жазықтықтың перпендикулярлық шарты

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі

Айталық , түзуде $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте және осы түзуге параллель $\vec{a}(m, n, p)$ векторы берілсін. $\vec{a}$ - түзудің **бағыттаушы векторы** деп аталады. Түзуден кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алайық. Онда



$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad \vec{a}(m, n, p)$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \qquad \textbf{(7)}$$

(7) - кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі.

Кеңістіктегі түзудің параметрлік теңдеуі

Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі берілсін

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

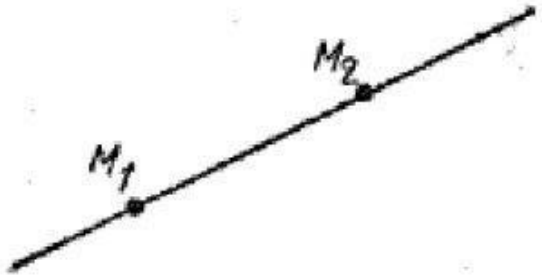
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t \\ \dfrac{z-z_0}{p}=t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}} \quad \textbf{(8)}$$

(8) - кеңістіктегі түзудің параметрлік теңдеуі

Кеңістіктегі екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі

Кеңістіктегі $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазайық.



$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

векторын осы түзудің бағыттаушы векторы деп алсақ, онда M_1 нүктесі арқылы өтетін теңдеуді (7) теңдеу арқылы

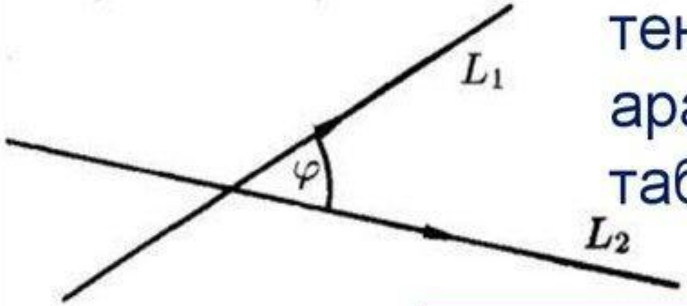
$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \qquad \mathbf{(9)}$$

аламыз. Бұл теңдеу екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі деп аталады.

Кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш

Кеңістіктегі

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{және} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$



теңдеулерімен анықталатын екі түзудің арасындағы бұрыш келесі формуладан табылады:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}} \qquad \textbf{(10)}$$

Кеңістіктегі түзулердің параллельдік шарты

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}} \qquad (11)$$

Кеңістіктегі түзулердің перпендикулярлық шарты

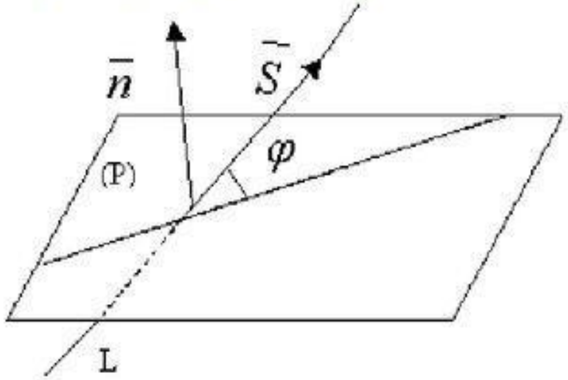
$$\boxed{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0} \qquad (12)$$

Жазықтық пен түзудің арасындағы бұрыш

Кеңістікте $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуімен берілген жазықтық пен

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

теңдеуімен берілген түзудің арасындағы бұрыш келесі формула арқылы табылады:



$$\boxed{\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}} \qquad \textbf{(13)}$$

Жазықтық пен түзудің параллельдік шарты

$$\boxed{Am + Bn + Cp = 0}$$

Жазықтық пен түзудің перпендикулярлық шарты

$$\boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

Қорытынды

Жазықтықтың жалпы теңдеуін жазбас бұрын жазықтыққа перпендикуляр түзудің анықтамасын еске түсіріңіз: егер түзу осы жазықтықта жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болса, жазықтыққа перпендикуляр болады. Осы анықтамадан жазықтықтың кез-келген қалыпты векторы осы жазықтықта жатқан нөлдік емес векторға перпендикуляр екендігі шығады.

Пайдаланылған әдебиеттер

1.Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1.Алматы, 2016.

2.Математика. І-бөлім: оқулық/ Қ.Ж.Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014.-144 б.

3.Э.Крофт. Математика негіздері. 1-бөлім: оқулық/ алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2013.- 391б.

4.Қ.И.Қаңлыбаев, О.С.Сатыбалдиев, С.А.Джанбердиева. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ ҚР БҒМ.-Алматы: Дәуір 2013.- 368бет.

5.Основы высшей математики и математической статистики: учебник/ И.В. Павлушков (и др.). -2-е изд., испр. – М.: ГЭОТАР – Медиа, 2012.- 432с.