Приложение производной к исследованию функции

План

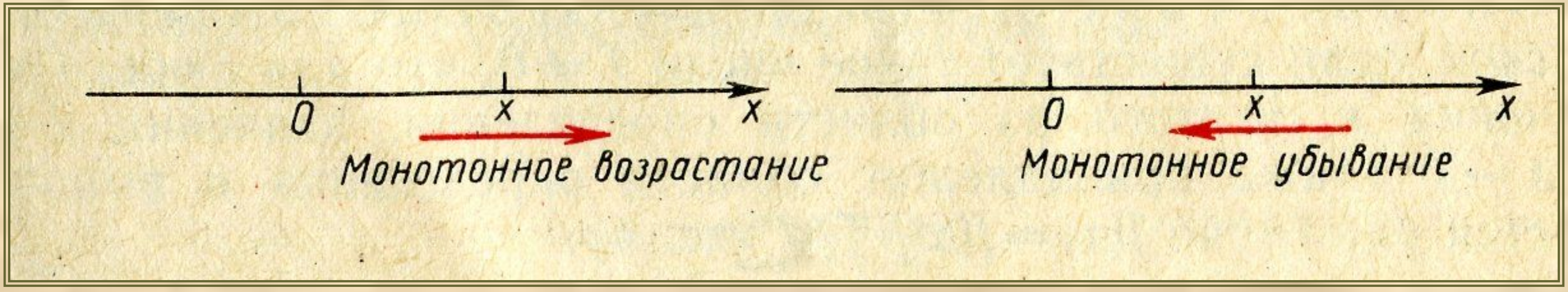
I. **Исследование функции на монотонность:**
   1. Определение монотонности
   2. Необходимый и достаточный признаки возрастания, убывания функции
   3. Экстремумы функции
   4. Алгоритм исследования функции на экстремумы и промежутки монотонности

II. **Исследования функции на выпуклость, вогнутость:**
   1. Определение выпуклости функции вверх и вниз
   2. Достаточное условие выпуклости функции на интервале
   3. Точка перегиба
   4. Достаточный признак существования точки перегиба

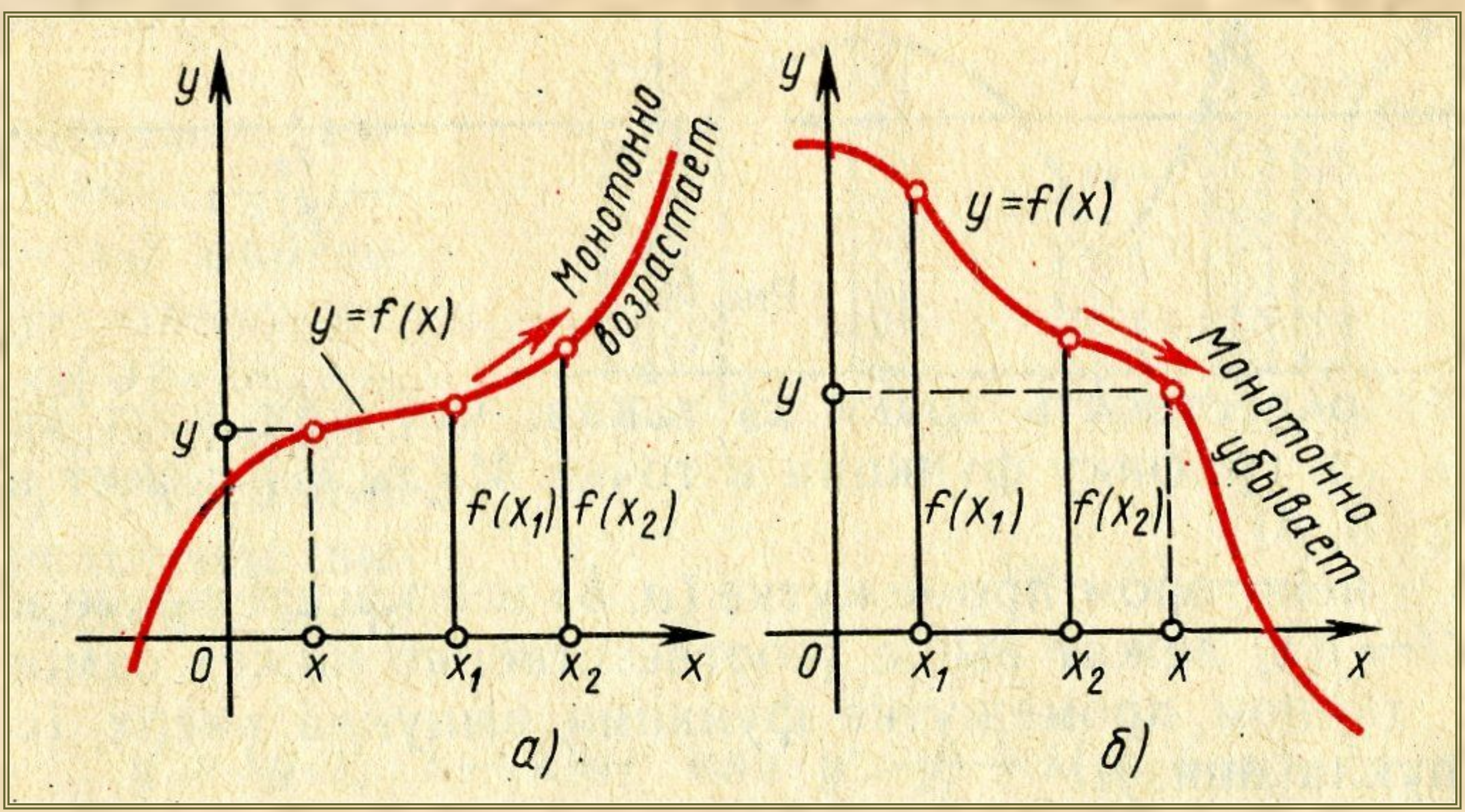
III. **Асимптоты**

1. Монотонность

Переменную величину называют **монотонной**, если она изменяется только в одном направлении, т.е. либо только возрастает, либо только убывает. Очевидно, что движение точки *x* в сторону положительного направления оси абсцисс является монотонно возрастающим, а в противоположную сторону - монотонно убывающим



Приведем теперь строгое определение монотонности:
Функция $y = f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = f(x)$ называется ***монотонно убывающей*** на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Естественно, что интервал (a,b) предполагается взятым из области определения функции.


y
y = f(x)
Монотонно
возрастает
y
f(x1)
f(x2)
0
x
x1
x2
x
a)
y
y = f(x)
y
Монотонно
убывает
f(x1)
f(x2)
0
x1
x2
x
x
б)

2. Необходимый и достаточный признаки возрастания, убывания функции

Th: Если дифференцируемая функция возрастает (убывает) на некотором интервале, то ее производная неотрицательная (неположительная) на этом интервале.

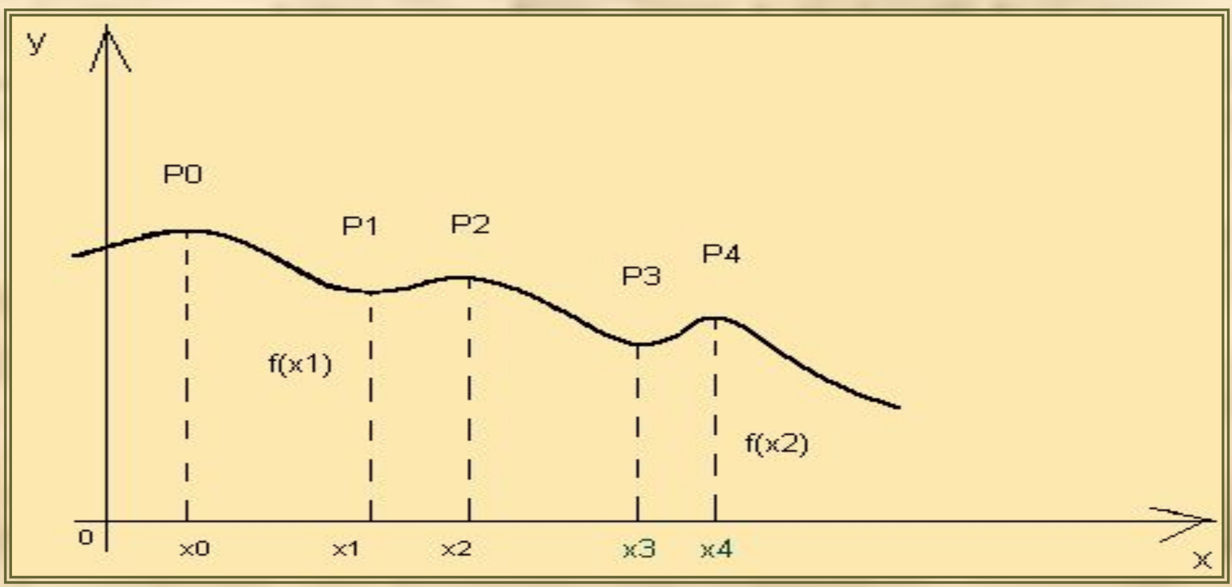
Th: Если производная функции на некотором интервале положительна (отрицательна), то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

3. DEF: Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ строгий максимум (минимум), если $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) для всех x, достаточно близких к x_0 ; x_0 – точка максимума (минимума).

Максимум и минимум функции называется экстремумами функции, а точка x_0 – точка экстремума

По определению максимума и минимума функции имеют локальный характер: зная функцию сравниваются только в точках, достаточно близких к точкам экстремума.

Отдельные минимумы м.б. больше максимумов функции.



Необходимое и достаточное условия существования экстремума

Th: Если функция y=f(x) имеет экстремум в некоторой точке, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Th: Пусть функция f(x) непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируемая во всех точках этого интервала, кроме б.м., самой точки x_0.

Если при переходе аргумента слева направо через точку x_0 производная $f`(x_0)$ меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет **максимум**; если знак меняется с минуса на плюс, то функция имеет **минимум.**

4. Алгоритм исследования функции на экстремумы и промежутки монотонности

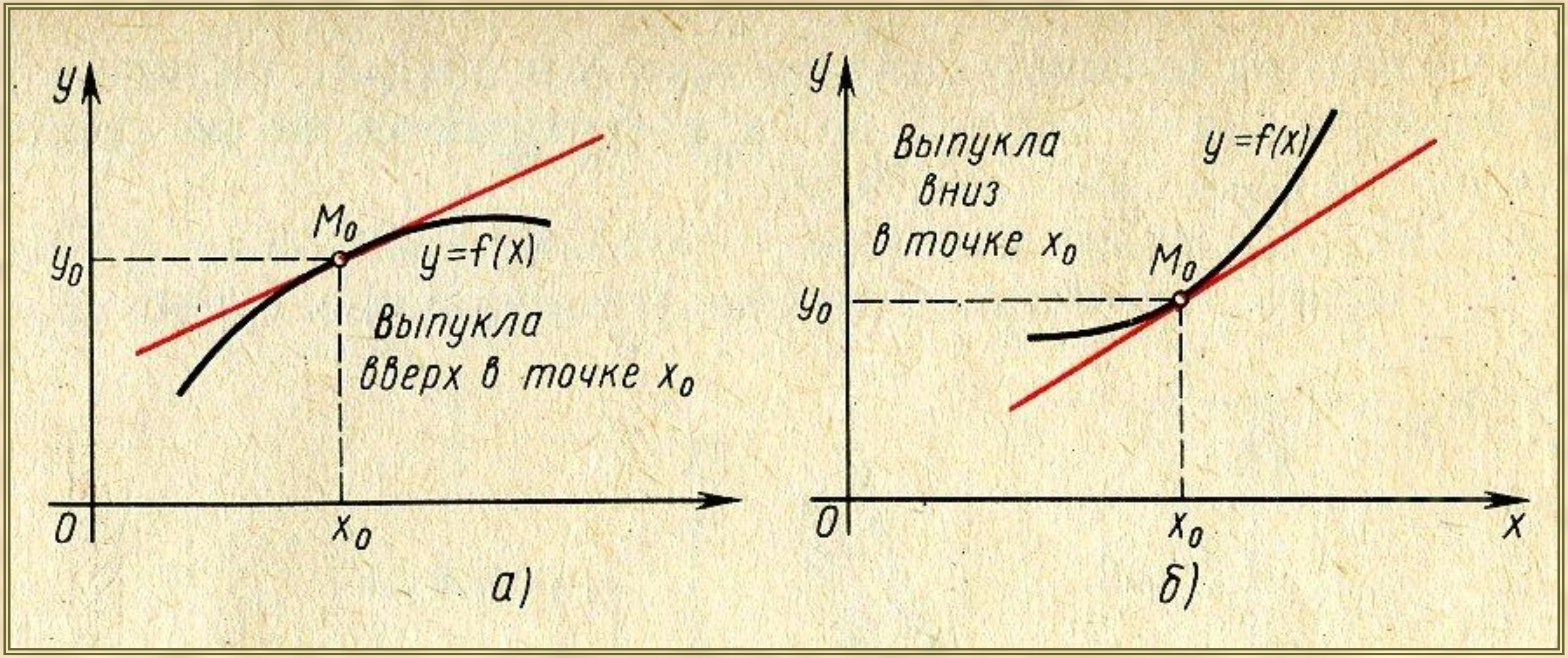
1. Находимпроизводную *f ’(x)*
2. Находим точки, в которых *f ’(x)*=0 или *f’(x)* не существует
3. Разбиваем этими точками область определения f(x) на промежутки
4. Методом проб определяем знак f ’(x) в этих промежутках и находим интервалы монотонности
5. Применяем достаточное условие экстремума.

II. Исследование функции на выпуклость, вогнутость

1. Выпуклость вверх и вниз

Говорят, что функция $y = f(x)$ **выпукла вверх** в точке x_0, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех ее точек x касательная к графику функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ лежит выше графика.

Говорят, что функция $y = f(x)$ **выпукла вниз** в точке x_0, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех ее точек x касательная к графику функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ лежит ниже графика.


y
M_0
y_0
$y=f(x)$
Выпукла
вверх в точке x_0
0
x_0
а)
y
Выпукла
вниз
в точке x_0
$y=f(x)$
M_0
y_0
0
x_0
x
б)

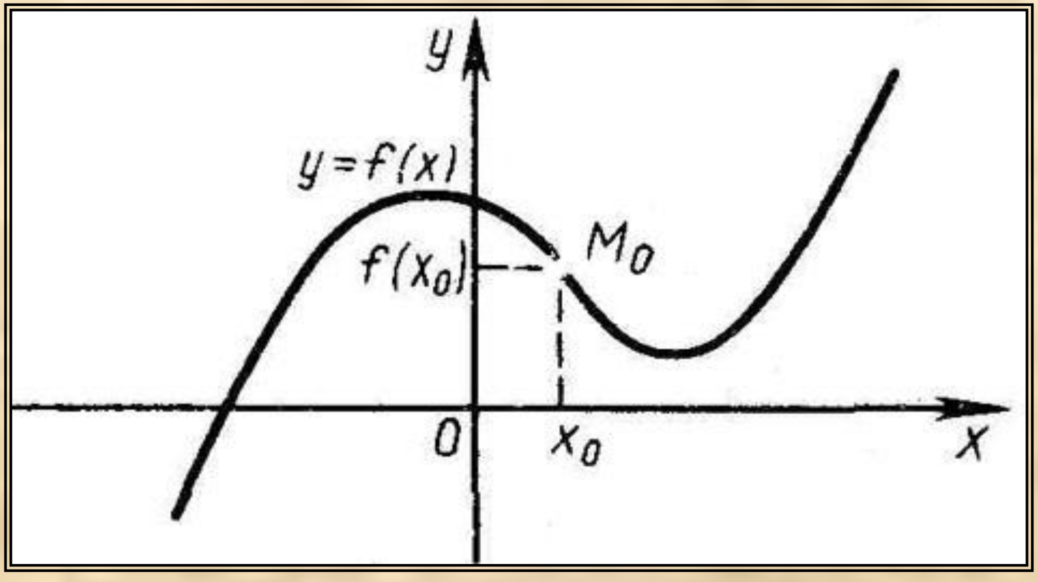
2. Достаточное условие выпуклости функции на интервале.

Если вторая производная $f''(x)$ существуют на интервале (a, b) и не меняет знак на этом интервале, то:

1) при $f''(x) > 0$ (знак +) функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b);

2) при $f''(x) < 0$ (знак -) функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале (a, b).

3. **Определение:** Точка $M_0(x_0;\ f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется **точкой перегиба** этого графика, если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от M_0 имеет разные направления выпуклости.



4. Достаточный признак существования точки перегиба

Точки, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует, называется критическими точками **2-го рода**. В этих точках перегиб может быть, а может и не быть.

Если для функции $y=f(x)$ вторая производная ее $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль и при переходе через точку меняет свой знак на обратный, то точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба функции.

III. Асимптоты

Определение 1: Если расстояние δ от точки *M* кривой $y = f(x)$ до некоторой определенной прямой при $x \to x_0$ и неограниченном удалении точки *M* от начала координат стремится к нулю, то эта прямая называется **асимптотой** кривой.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Если в определении асимптоты x_0 – конечное число, то соответствующую асимптоту называют **вертикальной**.

Определение: Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен + ∞ или - ∞.

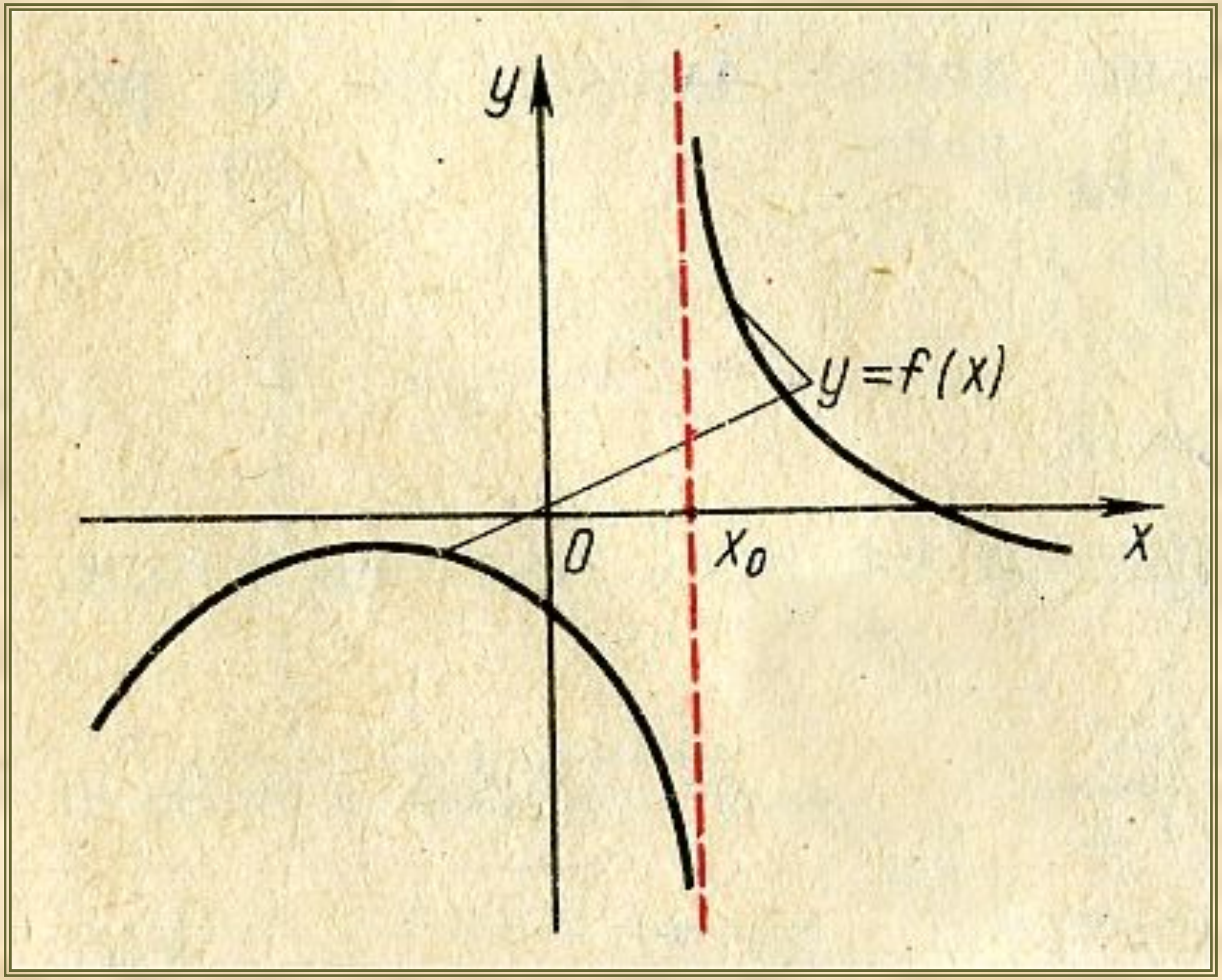


График с вертикальной асимптотой

Если в определении асимптоты x_0 есть + ∞ или - ∞, то соответствующая асимптота является либо горизонтальной, либо наклонной.

Говорят, что прямая

y = b служит **горизонтальной асимптотой** для графика функции *y = f(x)*, если

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Если же равен числу *b* только один из этих пределов, то прямая *y = b* является горизонтальной асимптотой соответствующей части графика функции *y = f (x)*, т.е. при *x* = + ∞ или при *x* = - ∞.

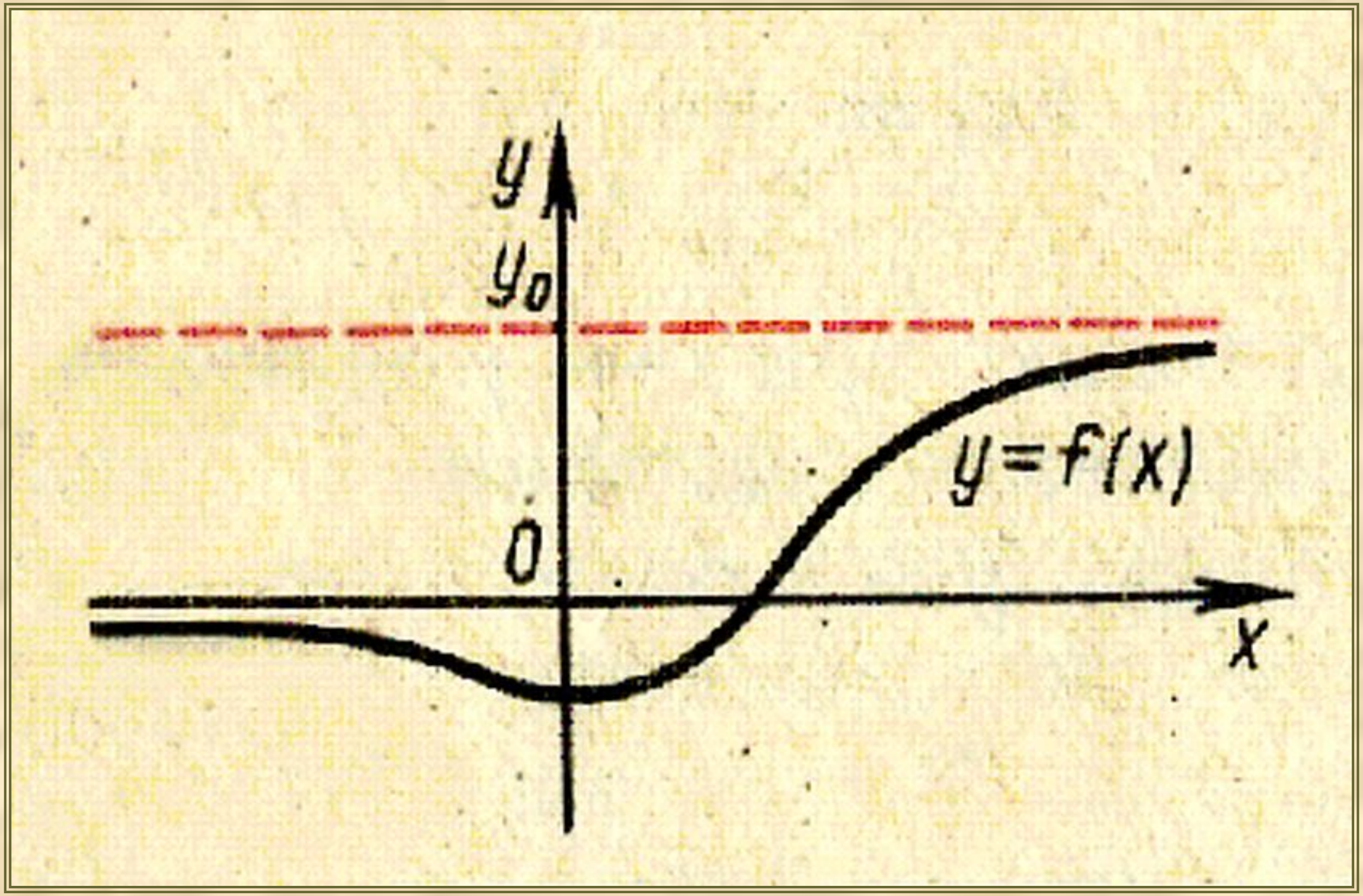


График с горизонтальной асимптотой

Определение: Прямая $Y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$), если $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$ (соответственно $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0$)

Замечание: *Если k = 0, то наклонная асимптота превращается в горизонтальную.*

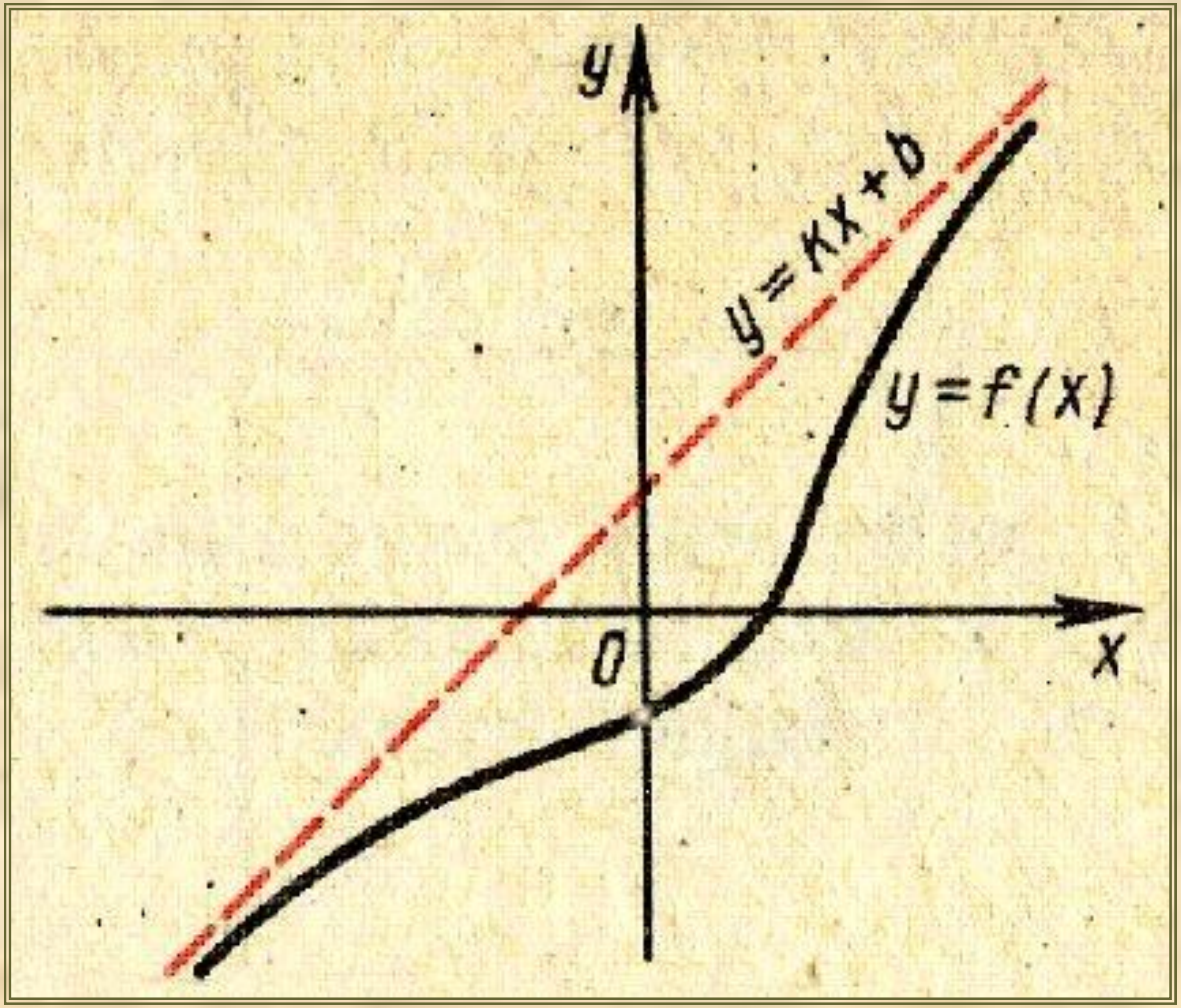


График с наклонной асимптотой

Пример: $y = \dfrac{|x|(x-1)}{x+1}$

- Вертикальная асимптота: x=-1
- Наклонная асимптота на -∞:

  y=-x+2
- Наклонная асимптота на +∞:

  y=x-2

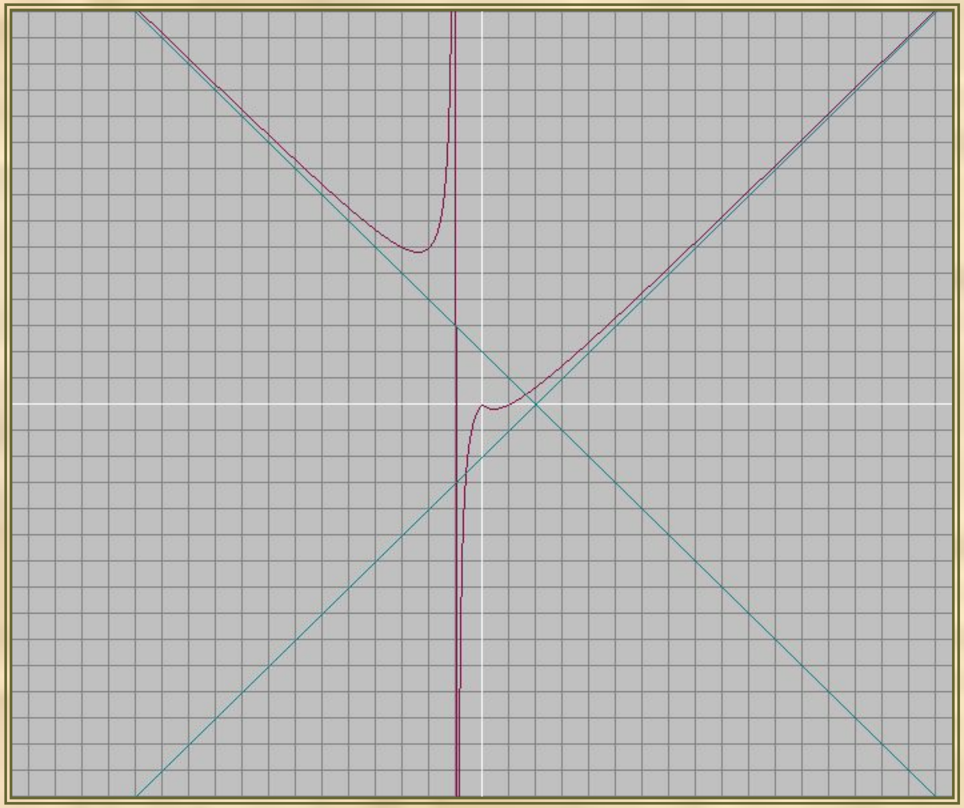


Схема исследования функции.

1. Область определения *D(y)*, область значения *E(y)* функции.
2. Четность, нечетность функции.
3. Периодичность.
4. Точки пересечения с осями координат.
5. Монотонность. Экстремумы функции.
6. Точки перегиба. Выпуклость функции.
7. Асимптоты.
8. График.