

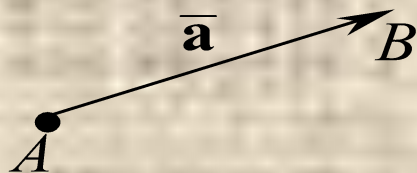
Элементы векторной алгебры

Векторы

- Понятие вектора. Операции с векторами.
- Линейная независимость системы векторов. Понятие базиса.
- Декартова система координат.
- Проекция вектора на ось
- Длина вектора
- Направляющие косинусы вектора
- Действия над векторами в координатной форме
- Координаты вектора
- Скалярное произведение
- Векторное произведение
- Смешанное произведение

Понятие вектора. Операции с векторами

Вектор – это **направленный прямолинейный отрезок** (т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление).



Расстояние от начала вектора до его конца называется **длиной** или **модулем** вектора и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

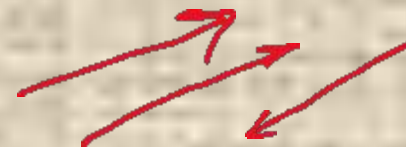
Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором** или **ортом**.

$$|\vec{a}| = 1 = |\vec{e}|$$

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым** и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90. $\vec{a} \perp \vec{b}$

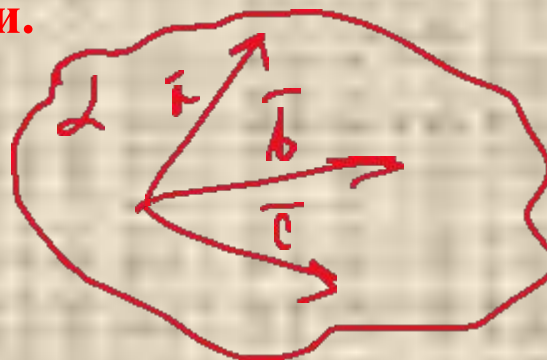
Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90. $\vec{a} \perp \vec{b}$



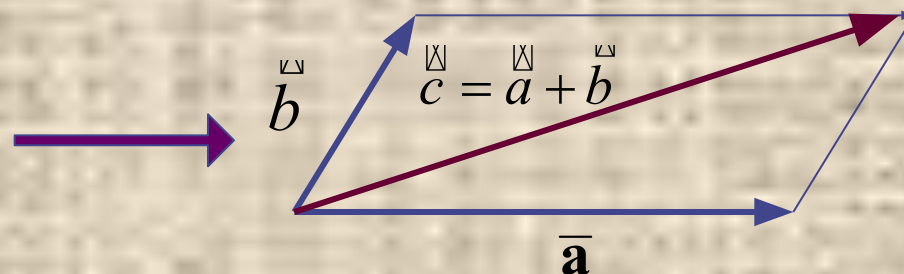
Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90. $\vec{a} \perp \vec{b}$

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются **компланарными**.

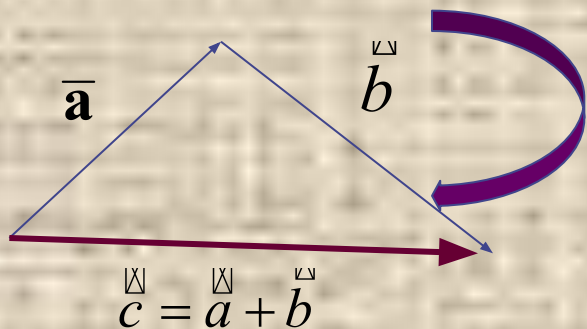
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — комп.



Сложение векторов **(правило параллелограмма)**

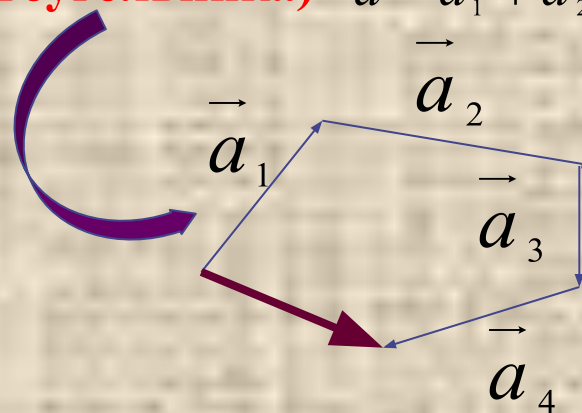


Сложение векторов **(правило треугольника)**

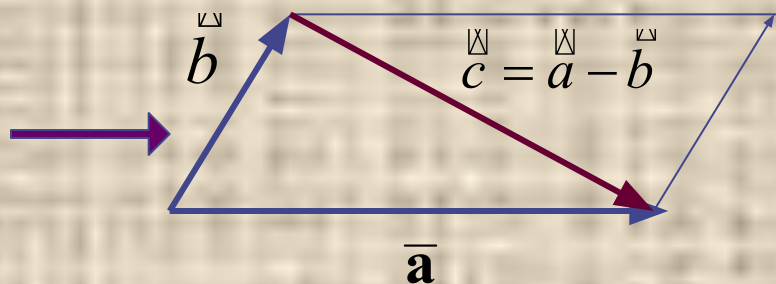


Сложение векторов **(правило многоугольника)**

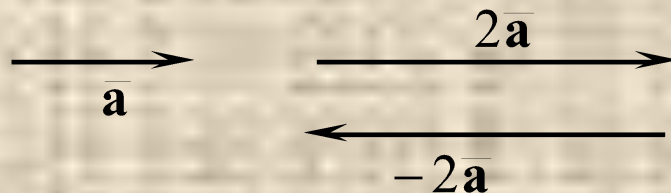
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$$



Вычитание векторов



Произведением вектора $\bar{a}$ на число $\alpha \neq 0$ называется вектор, длина которого $|\alpha| \cdot |\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$.



При умножении вектора на (-1) получается **противоположный** вектор

$$-\bar{a} = (-1) \cdot \bar{a}$$

Если два ненулевых вектора коллинеарны то один из них можно выразить через другой

$$\bar{a} = \alpha \cdot \bar{b}$$

Линейная независимость системы векторов.

Понятие базиса

Совокупность векторов называется **линейно зависимой**, если линейная комбинация этих векторов равна нулю, причем не все коэффициенты линейной комбинации равны нулю одновременно.

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0$$

Совокупность векторов называется **линейно независимой**, если линейная комбинация этих векторов не равна нулю, причем равенство нулю возможно только в том случае, если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю одновременно.

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n \neq 0$$

Если векторы линейно зависимы, то один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Три ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны. В этом случае третий вектор является линейной комбинацией двух других .

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

Два ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$$

Базисом векторного пространства называется совокупность линейно независимых векторов, количество которых определяется размерностью пространства. Любой небазисный вектор является линейной комбинацией базисных.

В одномерном пространстве - один базисный вектор $\vec{a}$, остальные векторы можно записать в виде $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$

Все такие векторы будут лежать на одной прямой с вектором $\vec{a}$.

Таким образом, одномерное пространство – это пространство коллинеарных векторов.

В двумерном пространстве на плоскости будет два базисных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а любой третий вектор равен их линейной комбинации

Такой вектор является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\alpha \cdot \vec{a}$ и $\beta \cdot \vec{b}$. Т.е. все три вектора будут компланарны.

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

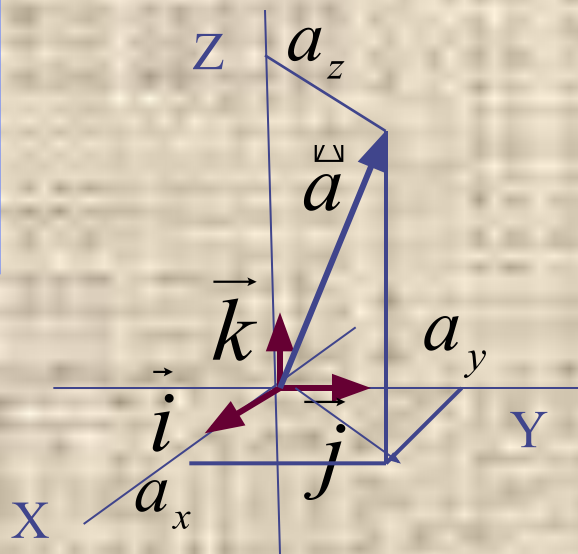
В трехмерном пространстве – три базисных вектора, а любой четвертый можно представить в виде $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$

Выражения вида $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$, $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$

называются **разложениями вектора по базису**, а коэффициенты разложения - **координатами** вектора в данном базисе.

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называют систему координат, базисом в которой являются единичные векторы, попарно ортогональные друг с другом.

Правую систему координат, в которой векторы базиса образуют правую тройку, обозначают $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор.

Тогда $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

или $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$

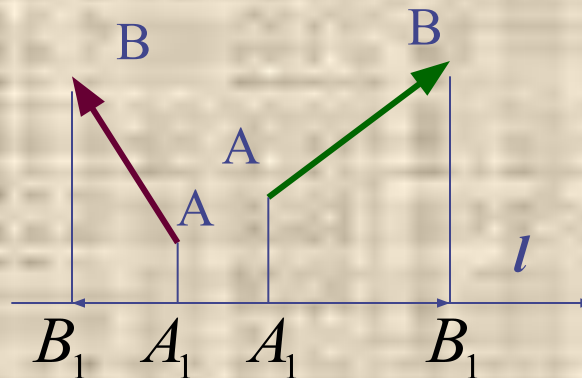
$$\vec{a} = (2; 3; 4)$$
$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l , то есть направленная прямая, $\overline{AB}$ - произвольный вектор.

Обозначим через A_1 и B_1 - проекции на ось l точек A и B соответственно.



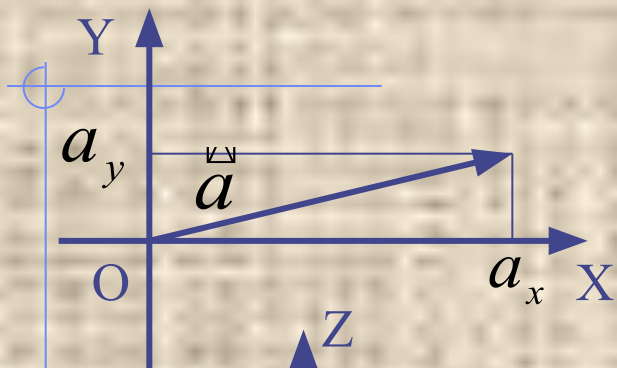
Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|A_1B_1|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены, и отрицательное число $-|A_1B_1|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Свойства проекций:

- **Проекция вектора $\vec{a}$** на ось l равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус φ угла между вектором и осью: $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$
- Проекция суммы нескольких векторов на ось l равна сумме их проекций на эту ось.
- При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось l также умножается на это число: $\text{пр}_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \vec{a}$
- Вектор можно представить в виде $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, где
координата a_x - это проекция вектора $\vec{a}$ на ось Ox ,
координата a_y - это проекция вектора $\vec{a}$ на ось Oy ,
координата a_z - это проекция вектора $\vec{a}$ на ось Oz .

Длина вектора



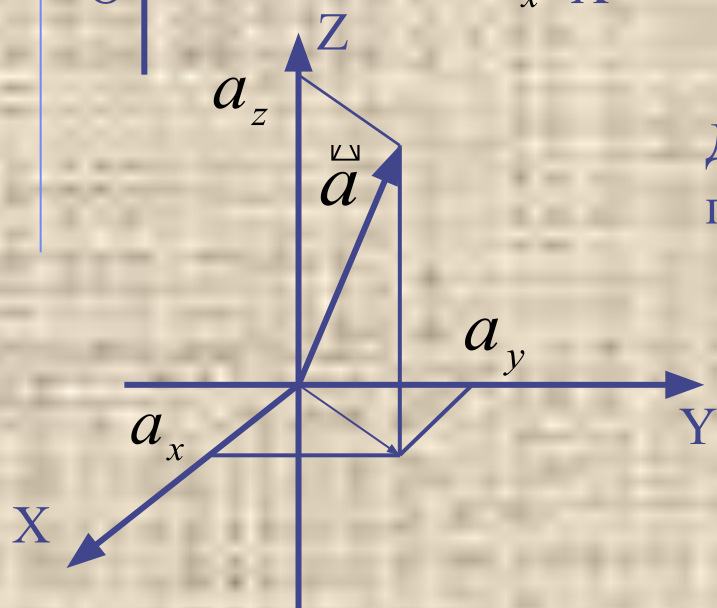
Длина вектора в декартовом базисе на плоскости находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Длина вектора в декартовом базисе в пространстве находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

(под корнем – сумма квадратов координат вектора)

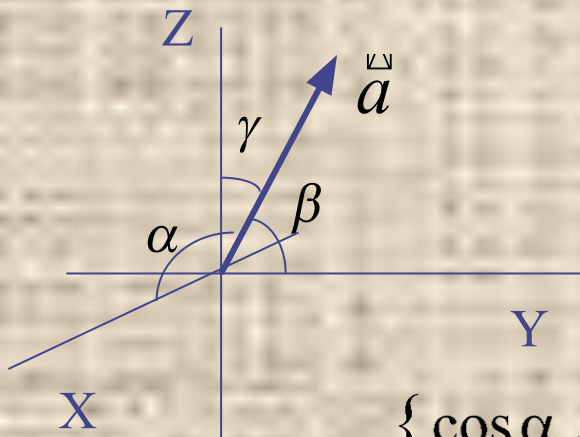


Найти длину вектора $\vec{a} = \{2; -7; 5\}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 49 + 25} = \sqrt{78}$$

Направляющие косинусы вектора

Пусть задан вектор $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$.
Рассмотрим вектор $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$



По свойству проекций

$$a_x = \text{пр}_{Ox} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \alpha,$$

$$a_y = \text{пр}_{Oy} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \beta,$$

$$a_z = \text{пр}_{Oz} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \gamma \Rightarrow$$

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{a_x}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{i} + \frac{a_y}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{j} + \frac{a_z}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{k} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{a}}|} \bar{\mathbf{a}},$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - **направляющие косинусы** вектора $\bar{\mathbf{a}}$.

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ - свойство направляющих косинусов, то есть вектор $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ - **единичный** и направлен также, как и $\bar{\mathbf{a}}$.

Вектор $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ называют **ортом вектора** $\bar{\mathbf{a}}$.

Действия над векторами в координатной форме

Пусть, $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$.

1. Сложение векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$$

2. Вычитание векторов

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$$

3. Умножение вектора на число

$$\alpha \vec{a} = \{\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z\}$$

4. Линейная комбинация векторов

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \{\alpha \cdot a_x + \beta \cdot b_x; \alpha \cdot a_y + \beta \cdot b_y; \alpha \cdot a_z + \beta \cdot b_z\}$$

Условие коллинеарности векторов в координатной форме

Если два вектора коллинеарны, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$

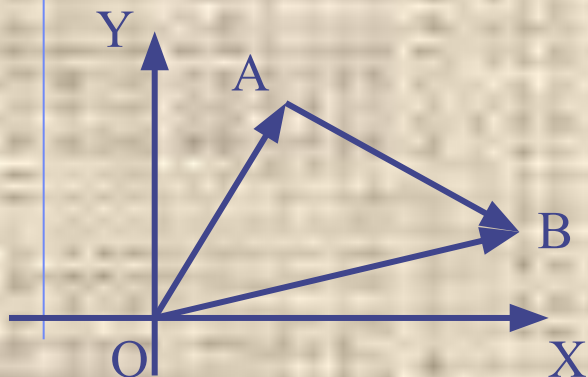
тогда
$$\begin{cases} b_x = \alpha \cdot a_x \\ b_y = \alpha \cdot a_y \\ b_z = \alpha \cdot a_z \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \alpha$$

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Координаты вектора, заданного начальной и конечной точками

Пусть известны координаты начала и конца вектора $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.



Найдем координаты $\overline{AB}$.

Вектор $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

Векторы, выходящие из начала координат в какую-либо точку, называются **радиус-векторами** этой точки.

Координаты радиуса-вектора точки совпадают с координатами самой точки, поэтому

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \{x_2, y_2, z_2\}, \\ \overline{OA} &= \{x_1, y_1, z_1\},\end{aligned}$$

И тогда $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$

Координаты вектора равны разности соответствующих координат конечной и начальной точек.

Расстояние между двумя точками

Если требуется найти расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то можно образовать вектор

$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и найти его длину по формуле

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Найти расстояние между точками $A(5; -3; 1)$ и $B(3; 6; -2)$

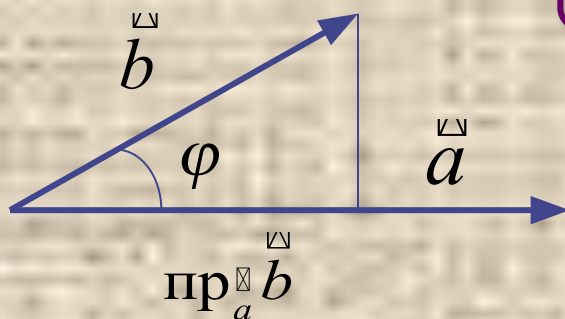
Два вектора и называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90° . $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 9^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 81 + 9} = \sqrt{94}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Записывают $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90° . $\vec{a} \perp \vec{b}$



$$\text{пр}_b \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_a \vec{b}$$

$$\text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_b \vec{a}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_b \vec{a}$$

Найти скалярное произведение векторов, если известно:

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 4, \quad \varphi = 120^\circ$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 12 \cdot (-0,5) = -6$$

Свойства скалярного произведения

1. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90° . $\vec{a} \perp \vec{b}$
2. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90° . $\vec{a} \perp \vec{b}$
3. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90° . $\vec{a} \perp \vec{b}$
4. Если два вектора перпендикулярны, то есть $\vec{a} \perp \vec{b}$, то их скалярное произведение равно нулю. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90° . $\vec{a} \perp \vec{b}$
5. Если два вектора коллинеарны, то их скалярное произведение равно произведению длин векторов. При этом произведение положительно, если векторы сонаправлены, и отрицательно, если направления противоположные $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

В частности, скалярное произведение вектора самого на себя равняется скалярному квадрату вектора и равняется квадрату его длины

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение в координатной форме

Скалярное произведение в координатной форме равно сумме произведений соответствующих координат

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{2; -7; 5\}$ и $\vec{b} = \{-3; 0; -4\}$
 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 2 \cdot (-3) + (-7) \cdot 0 + 5 \cdot (-4) = -6 + 0 - 20 = -26$

Применение скалярного произведения

Скалярное произведение применяется для нахождения:

1. Длины вектора
2. Проекции вектора на вектор
3. Косинуса угла между векторами
4. Проверки условия перпендикулярности векторов
5. Работы силы по перемещению точки

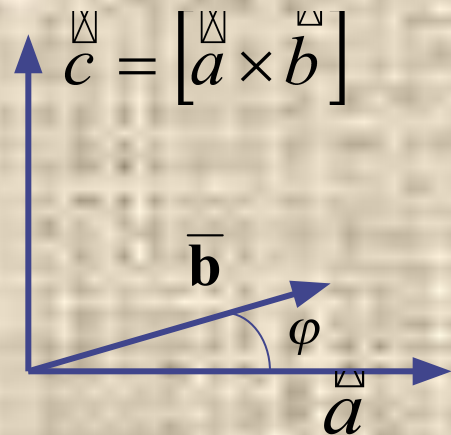
Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, для которого выполняются следующие условия:

- Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$, т.е. перпендикулярен плоскости, в которой лежат эти векторы.
- Длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов на синус угла между векторами

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

- Вектор $\vec{c}$ направлен так, что из его конца кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки



Обозначения векторного произведения

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{или} \quad [\vec{a}, \vec{b}]$$

Векторные произведения векторов декартового базиса

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k} \quad [\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$$

$$[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i} \quad [\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}$$

$$[\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j} \quad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$$

Свойства векторного произведения

1. $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}]$
2. $[\alpha \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \alpha \bar{\mathbf{b}}] = \alpha [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$
3. $[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}]$
4. Векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю.
В частности, если векторным образом перемножать вектор сам на себя, получится $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] = \bar{\mathbf{0}}$

Векторное произведение в координатной форме

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Векторное произведение в координатной форме представляет собой определитель третьего порядка, в первой строке которого стоят базисные векторы декартовой системы координат, а во второй и третьей строках – координаты перемножаемых векторов.

Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = \{2; -7; 5\}$ и $\vec{b} = \{-3; 0; -4\}$

Составляем определитель и раскладываем его по элементам первой строки

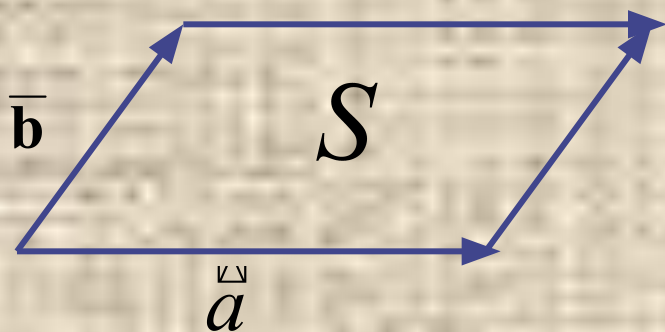
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -7 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot ((-7) \cdot (-4) - 5 \cdot 0) - \vec{j} \cdot (2 \cdot (-4) - 5 \cdot (-3)) + \vec{k} \cdot (2 \cdot 0 - (-7) \cdot (-3)) = 28 \cdot \vec{i} - 7 \cdot \vec{j} - 21 \cdot \vec{k}$$

Применение векторного произведения

Основные приложения векторного произведения:

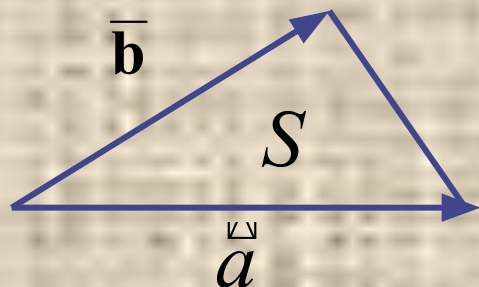
1. Нахождение площадей параллелограмма и треугольника.
2. Нахождение вектора, перпендикулярного двум векторам.

Площадь параллелограмма, построенного на двух векторах, равна модулю векторного произведения этих векторов



$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$



Площадь треугольника

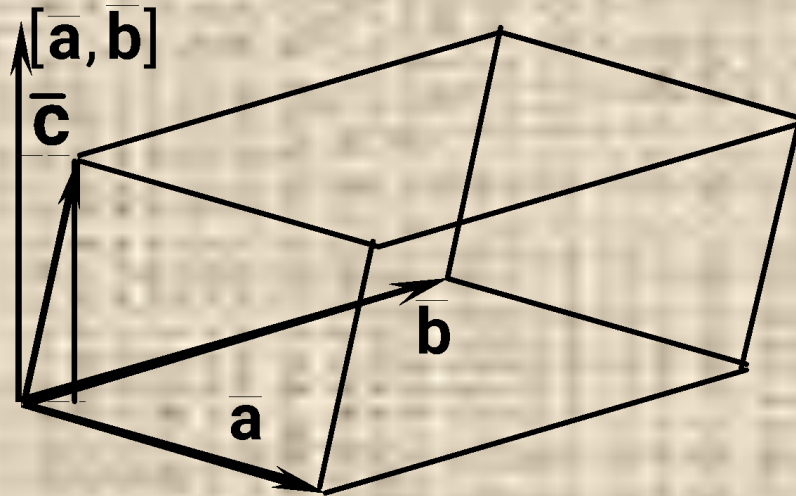
$$S = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ умножается скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

Геометрически смешанное произведение по абсолютной величине равняется **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах.



$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Объем треугольной пирамиды

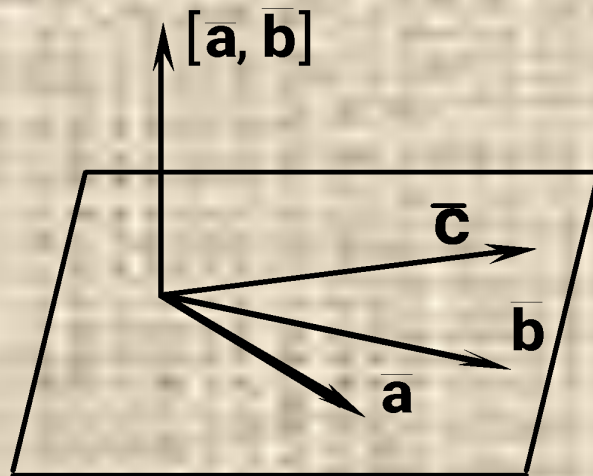
$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Свойства смешанного произведения

1. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = -([\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}], \bar{\mathbf{c}})$
2. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}], \bar{\mathbf{a}}) = ([\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}], \bar{\mathbf{b}})$
3. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}])$

Условие компланарности векторов.

Если три вектора компланарны, то их смешенное произведение равняется нулю.



$$([\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}] \cdot \bar{\mathbf{c}}) = 0$$

Смешанное произведение в координатной форме

Смешанное произведение в координатной форме равняется определителю третьего порядка, строками которого являются координаты векторов

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Применение смешанного произведения:

1. Нахождение объемов параллелепипеда и пирамиды.
2. Проверка условия компланарности трех векторов.
3. Проверка линейной независимости векторов или проверка условия, образуют ли три вектора базис в трехмерном пространстве.

Если векторы некопланарны, то они линейно независимы и образуют базис. Их смешанное произведение отлично от нуля

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$