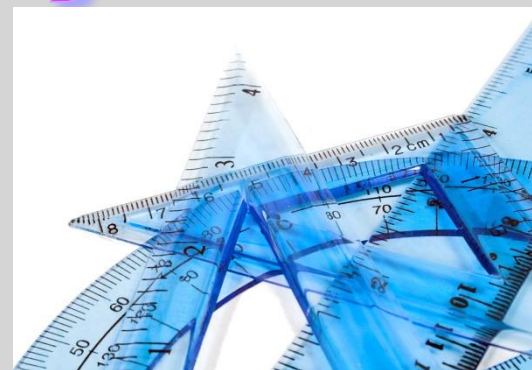


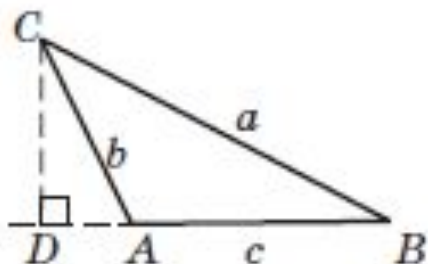
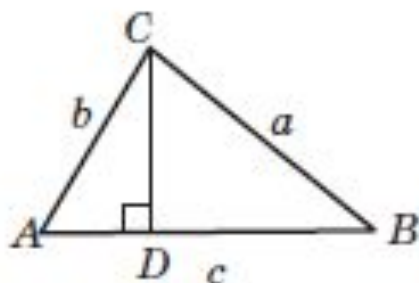
Теорема синусів



Бутар Т.Б.
вчителя математики
Черкаської гімназії № 31
Черкаської міської ради



Теорема синусів



Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

де a, b, c — сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C відповідно.

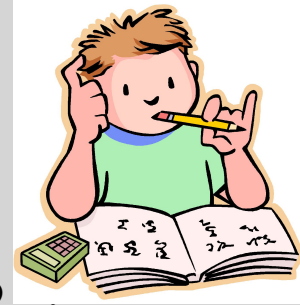
Доведення

1. Провести висоту CD .
2. Виразити CD через b і кут A .
3. Виразити CD через a і кут B .
4. Порівняти здобуті для CD вирази.

! **Зауваження:** теорему синусів можна записати у вигляді:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ або } a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$$

Наслідки з теореми синусів



Наслідок 1. У будь-якому Δ відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, опосаного навколо цього

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

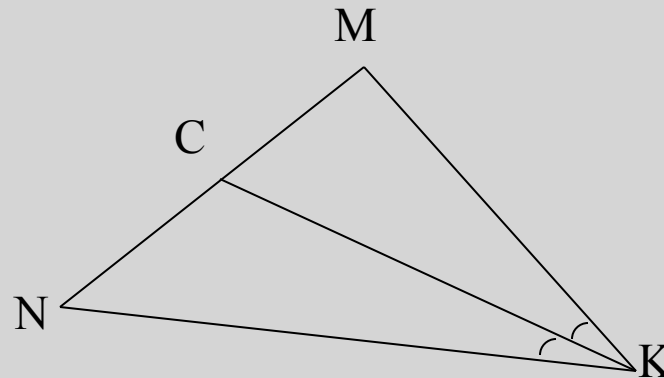
Увага! $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

Наслідок 2. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

Наслідок 3. (властивість бісектриси) Бісектриса кута Δ ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

КС – бісектриса, тоді

$$\frac{MC}{NC} = \frac{KM}{KN}$$





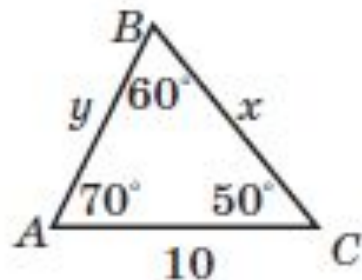
Які типи задач можна розв'язати за допомогою теорему синусів?

- I. За стороною і прилеглими до неї кутами знаходити інші сторони і кути трикутника.
- II. За двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них, знаходити інші сторони і кути трикутника.
- III. За стороною і протилежним кутом знаходити радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

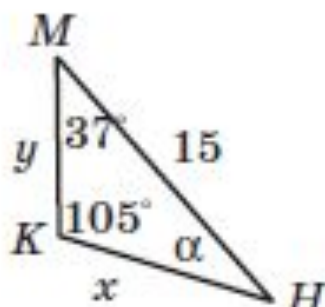
Виконання усних вправ

Застосуйте теорему синусів до трикутників на *рисунку*. Знайдіть невідомі елементи.

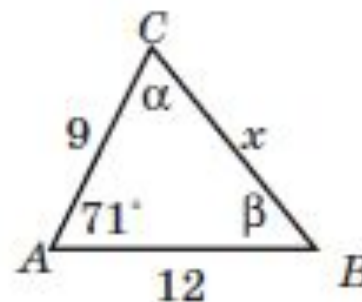
а)



б)



в)



Виконання вправ

Приклад. У трикутнику ABC дано $b = 9\text{ см}$, $c = 11\text{ см}$, $\angle B = 50^\circ$. Знайти $\angle C$, $\angle A$.

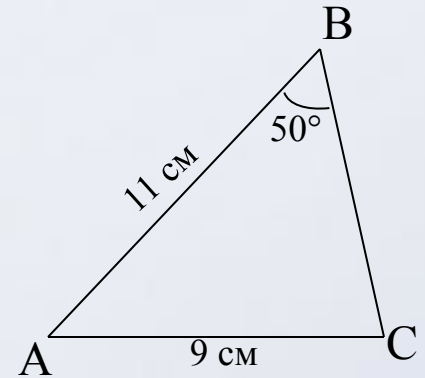
Дано: $\triangle ABC$ (див рис.), $AC = 9\text{ см}$, $AB = 11\text{ см}$, $\angle B = 50^\circ$.

Знайти: $\angle A$, $\angle C$.

Розв'язання

За теоремою синусів
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Звідси
$$\sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{11 \cdot \sin 50^\circ}{9} \approx \frac{11 \cdot 0,766}{9} \approx 0,936$$



Цьому значенню синуса відповідає два кути $\approx 69^\circ$ і $\approx 111^\circ$.

Тоді $\angle A = 180^\circ - (\angle C + \angle B)$, $\angle A = 180^\circ - (50^\circ + 69^\circ) = 61^\circ$ або $\angle A = 180^\circ - (50^\circ + 111^\circ) = 19^\circ$.

Відповідь. $\approx 69^\circ$, $\approx 61^\circ$ або $\approx 111^\circ$, $\approx 19^\circ$.

Виконання вправ

Приклад. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 8 см і 10 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

Дано: $\triangle ABC$ - прямокутний ($\angle C = 90^\circ$) $CK = 8$ см, $BK = 10$ см.

Знайти: AB .

Розв'язання

За властивістю бісектриси $CK:BK = AC:AB = 8:10 = 4:5$.

Отже, AC становить 4 частини, AB - 5 таких частин. Нехай одна частина дорівнює x см, тоді $AC = 4x$ см, $AB = 5x$ см.

$CB = 8 + 10 = 18$ (см).

За теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Маємо:

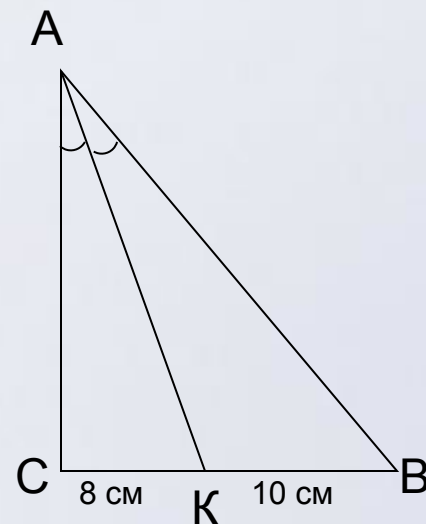
$$(4x)^2 + 18^2 = (5x)^2; \quad 16x^2 + 324 = 25x^2;$$

$$9x^2 = 324, \quad x^2 = 36,$$

$x = \pm 6$, -6 — не задовольняє умову задачі.

Отже, $x = 6$, тоді $AB = 5 \cdot 6 = 30$ (см).

Відповідь. 30 см.



Використані джерела

1. <http://vmesteosa.blogspot.com/>
2. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полянський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. -240 с. : іл.
3. Олійник Л.І., Геометричний тренажер. 9 клас.- Тернопіль: Підручники і посібники, 2011.-160с.