

# Скалярное произведение векторов

## Угол между векторами

A

$\vec{a}$

B

$\vec{b}$

$\vec{b}$

$\vec{a} \ \vec{b} = \alpha$

$\alpha$

O

Лучи OA и OB образуют угол AOB.

Градусную меру этого угла  
обозначим буквой  $\alpha$

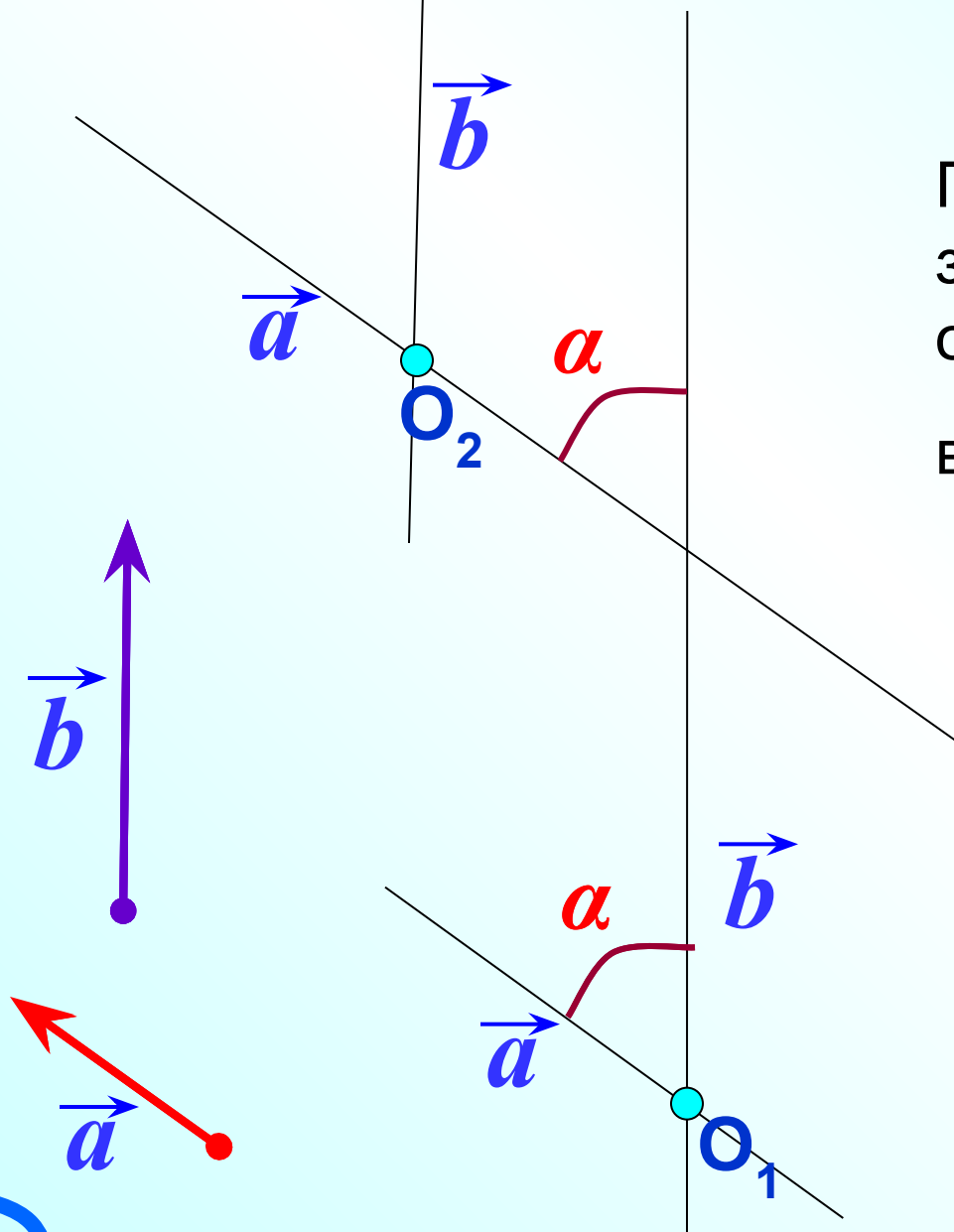
Угол между векторами  
равен  $\alpha$

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$

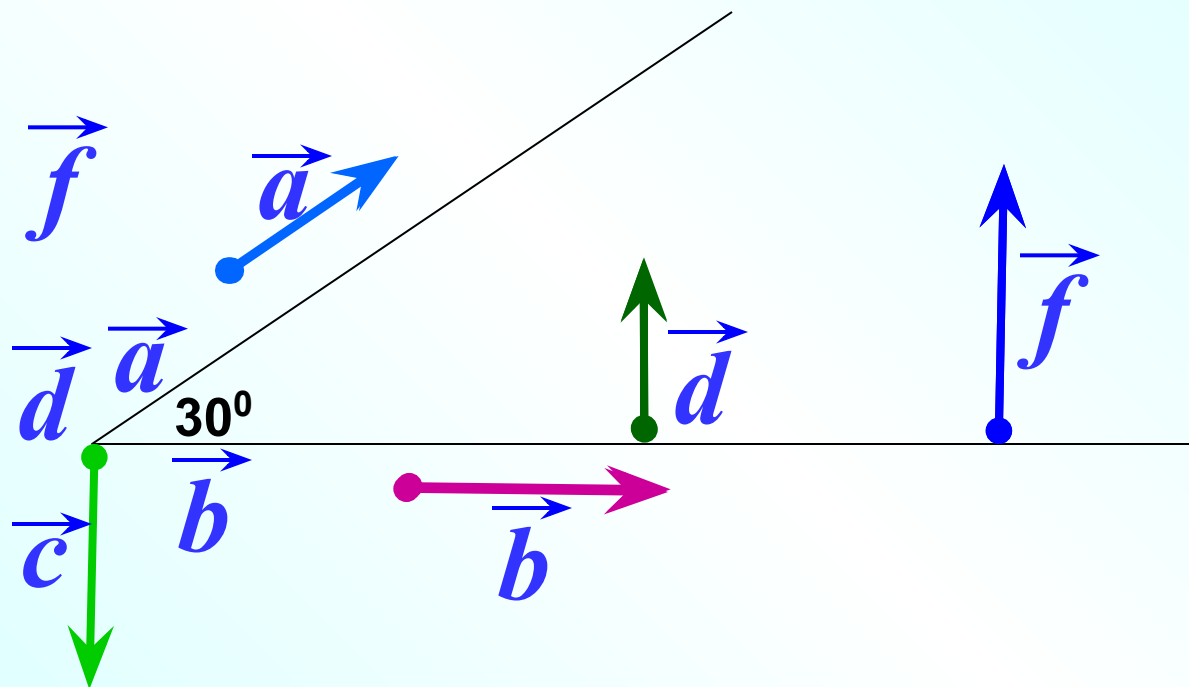
$\vec{a}$

## Угол между векторами

Градусная мера угла  $\alpha$  не зависит от выбора точки  $O$ , от которой откладывают векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$



Найти углы между векторами.



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

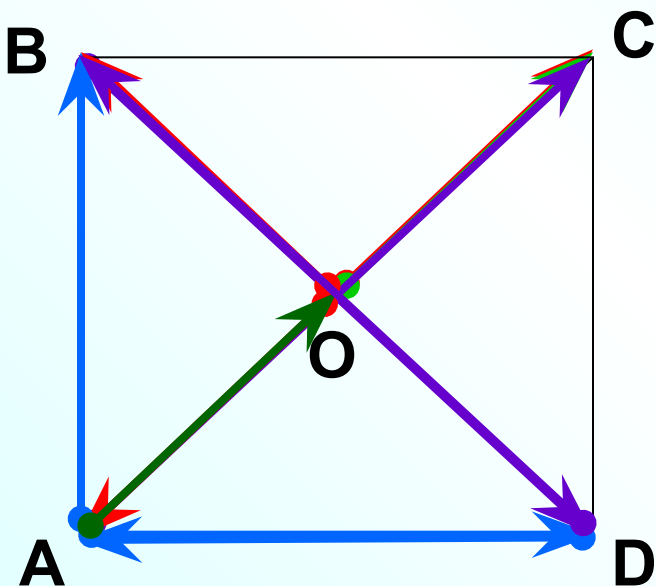
Два вектора называются  
**перпендикулярными**,  
если угол между ними равен  $90^\circ$ .

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \perp \vec{f}$$

**№ 1039** Диагонали квадрата пересекаются в точке O. Найдите углы между векторами.



$$\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} = 45^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DA}} = 90^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}} = 90^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{OA}, \vec{OC}} = 180^{\circ}$$

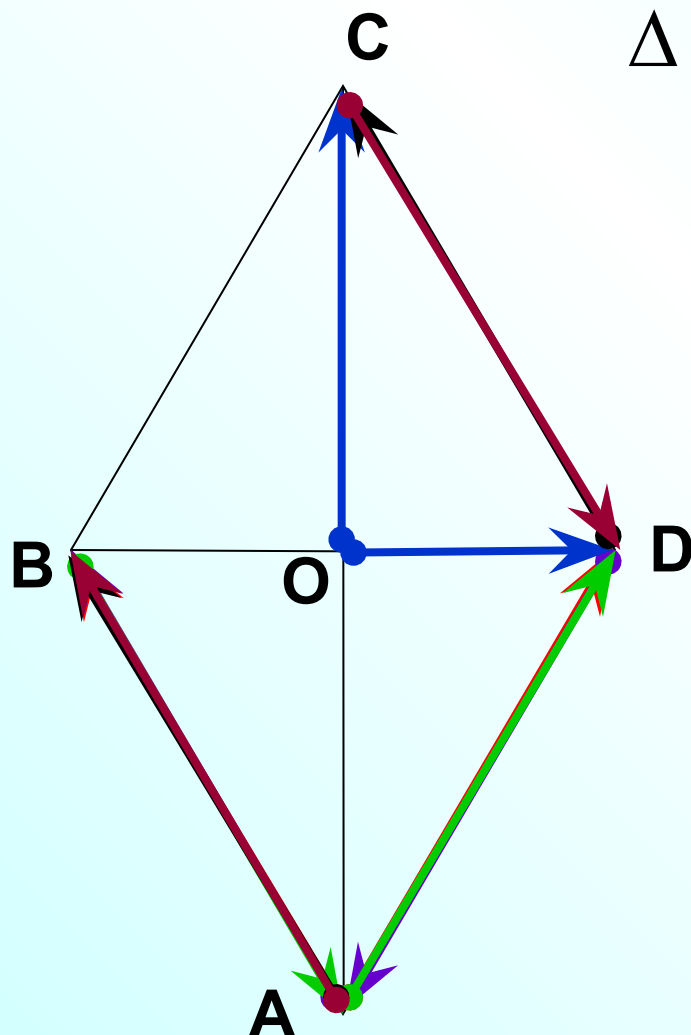
$$\widehat{\vec{AC}, \vec{BD}} = 90^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{AD}, \vec{DB}} = 135^{\circ}$$

$$\widehat{\vec{AO}, \vec{OC}} = 0^{\circ}$$

**№ 1040** Диагонали ромба пересекаются в точке  $O$ ,  
 диагональ  $BD$  равна стороне ромба.  
 Найдите углы между векторами.

$\triangle BDC - p / cm$



$$\angle(\vec{AB}, \vec{AD}) = 60^\circ$$

$$\angle(\vec{AB}, \vec{DA}) = 120^\circ$$

$$\angle(\vec{BA}, \vec{AD}) = 120^\circ$$

$$\angle(\vec{OC}, \vec{OD}) = 90^\circ$$

$$\angle(\vec{AB}, \vec{DC}) = 0^\circ$$

$$\angle(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$$

Сумма векторов – вектор.

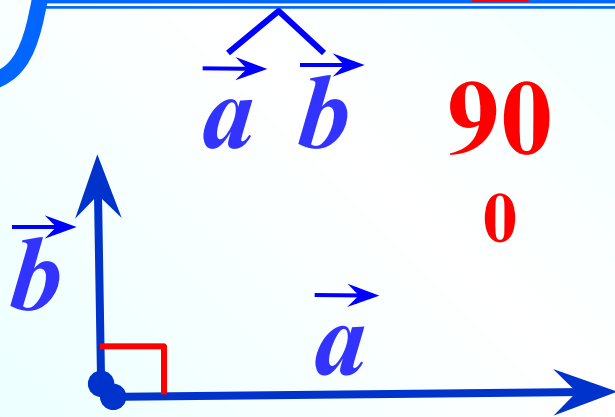
Разность векторов – вектор.

Произведение вектора на число – вектор.

**Скалярное произведение векторов – число.**

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

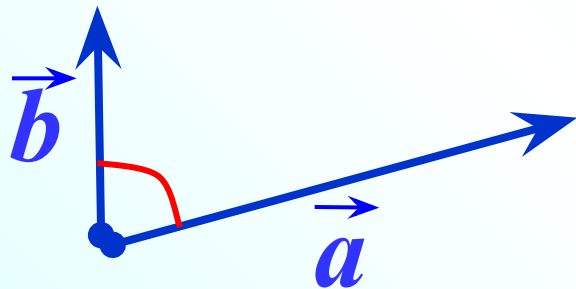
Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$





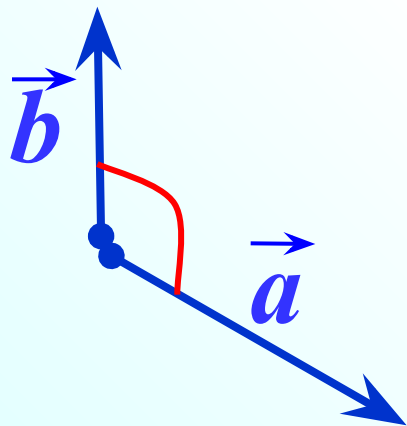
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

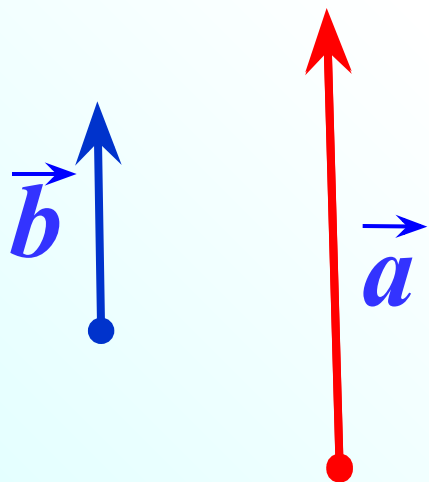
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{при } 90^\circ$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0 \quad \text{при } \alpha > 90^\circ$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

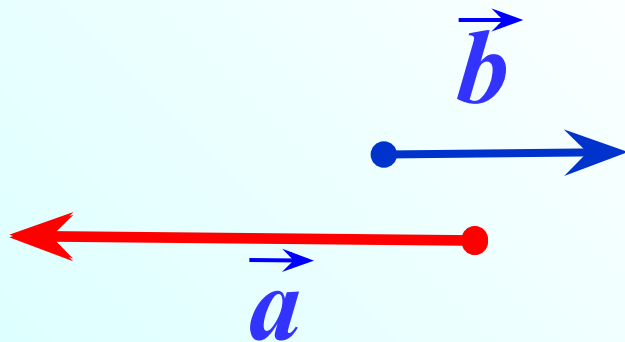
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \text{при } \alpha > 90^\circ$$



Если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{1}{\cos} 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

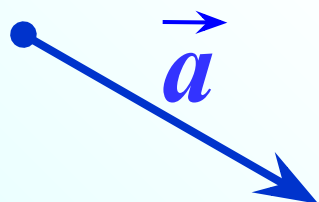


Если  $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{-1}{\cos} 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\begin{matrix} \nearrow \\ \vec{a} & \vec{a} \\ \searrow \end{matrix} = 0^0$$



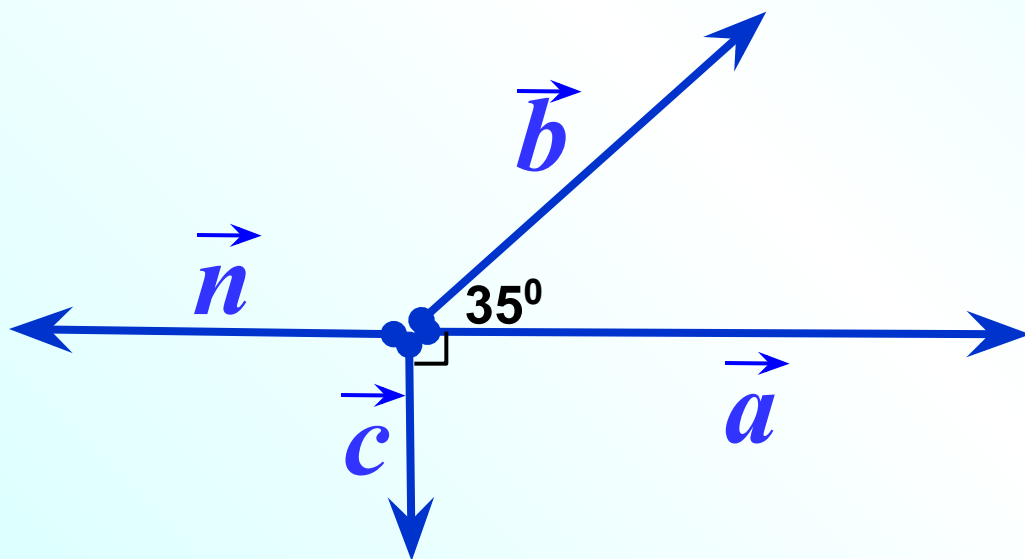
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \overset{1}{\cos 0^0} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется  
**скалярным квадратом** вектора  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{a}^2$

Таким образом,  
**скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Определите знак  
скалярного произведения.



$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

>

$$\vec{a} \cdot \vec{c}$$

= 0

$$\vec{c} \cdot \vec{b}$$

<

$$\vec{a} \cdot \vec{a}$$

>

$$\vec{a} \cdot \vec{n}$$

<

$$\vec{c} \cdot \vec{n}$$

= 0

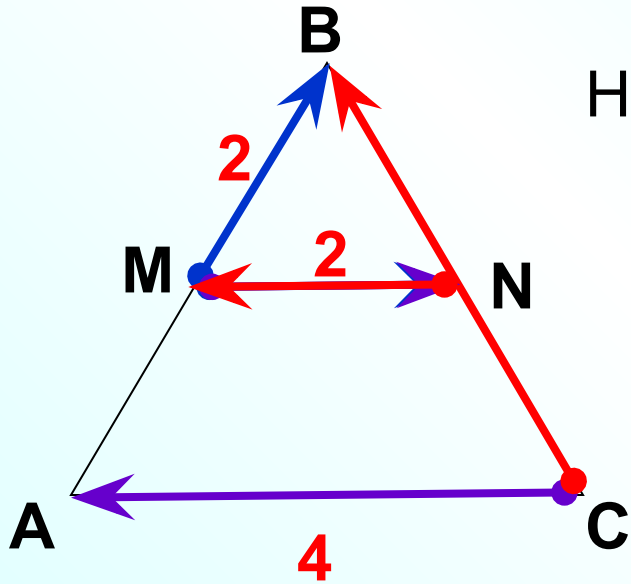
$$\vec{b} \cdot \vec{n}$$

<

0

$\Delta ABC$  –  $p / \text{см.}$ ,  $MN$  – средняя линия

Найти скалярное произведение векторов



$$\begin{aligned}\vec{MN} \cdot \vec{MB} &= |\vec{MN}| \cdot |\vec{MB}| \cos \widehat{\vec{MN}, \vec{MB}} = \\ &= 2 \cdot 2 \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{MN} \cdot \vec{CA} &= |\vec{MN}| \cdot |\vec{CA}| \cos \widehat{\vec{MN}, \vec{CA}} = \\ &= 2 \cdot 4 \cos 180^\circ = 8 \cdot (-1) = -8\end{aligned}$$

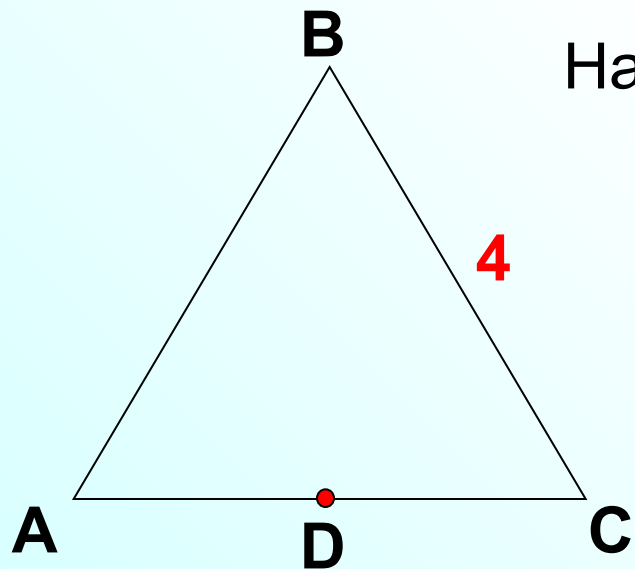
$$\begin{aligned}\vec{NM} \cdot \vec{CB} &= |\vec{NM}| \cdot |\vec{CB}| \cos \widehat{\vec{NM}, \vec{CB}} = \\ &= 2 \cdot 4 \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\end{aligned}$$

# Домашнее задание

## Задача №1

$\triangle ABC$  –  $p$  /  $ст.$ ,  $D$  – середина  $AC$

Найти скалярное произведение векторов



$$\vec{CB} \cdot \vec{CB} =$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{BC} =$$

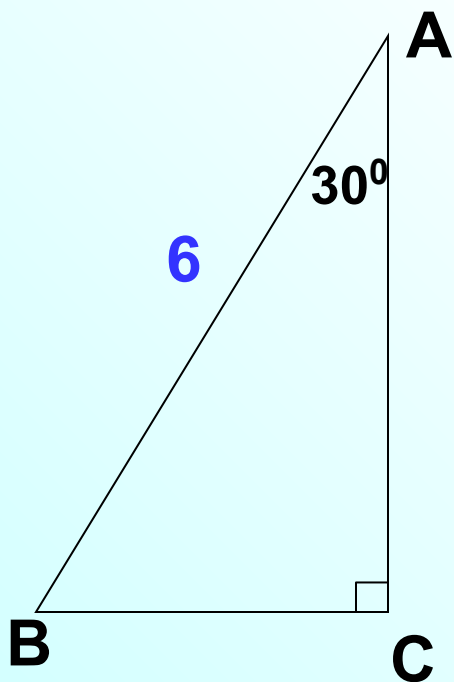
$$\vec{AC} \cdot \vec{CB} =$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} =$$

# Домашнее задание

## Задача №2

Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание



$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} =$$

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} =$$

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB} =$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} =$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} =$$