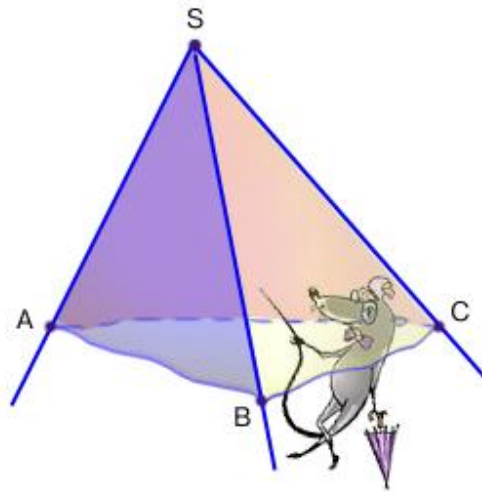


МНОГОГРАННИКИ

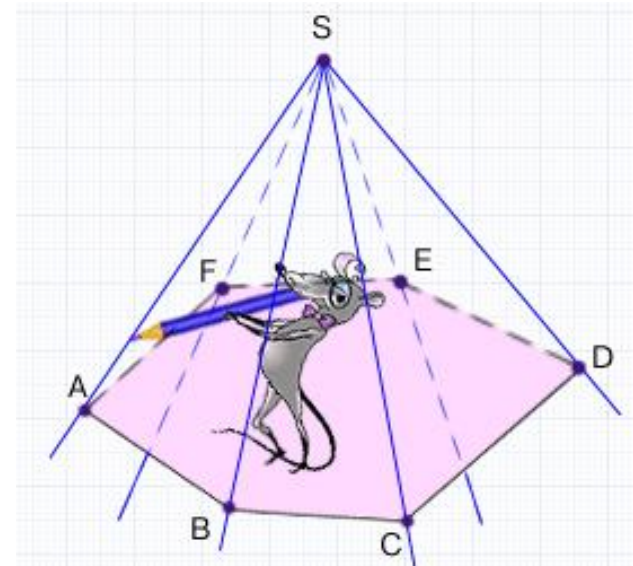
Трёхгранные и многогранные углы:

Трёхгранным углом называется фигура образованная тремя плоскостями, ограниченными тремя лучами, исходящими из одной точки и не лежащей в одной плоскости.



Трёхгранный угол

Рассмотрим какой-нибудь плоский многоугольник и точку лежащую вне плоскости этого многоугольника. Проведём из этой точки лучи, проходящие через вершины многоугольника. Мы получим фигуру, которая называется **многогранным углом**.



Трёхгранный угол — это часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости. Общая вершина О этих углов называется вершиной трёхгранного угла. Стороны углов называются рёбрами, плоские углы при вершине трёхгранного угла называются его гранями. Каждая из трёх пар граней трёхгранного угла образует двугранный угол

Основные свойства трехгранного угла

1. Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

$$\alpha + \beta > \gamma; \alpha + \gamma > \beta; \beta + \gamma > \alpha$$

α, β, γ — плоские углы,

А, В, С — двугранные углы, составленные плоскостями углов β и γ , α и γ , α и β .

2. Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360 градусов

3. Первая теорема косинусов для трёхгранного угла

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$



4. Вторая теорема косинусов для трёхгранного угла

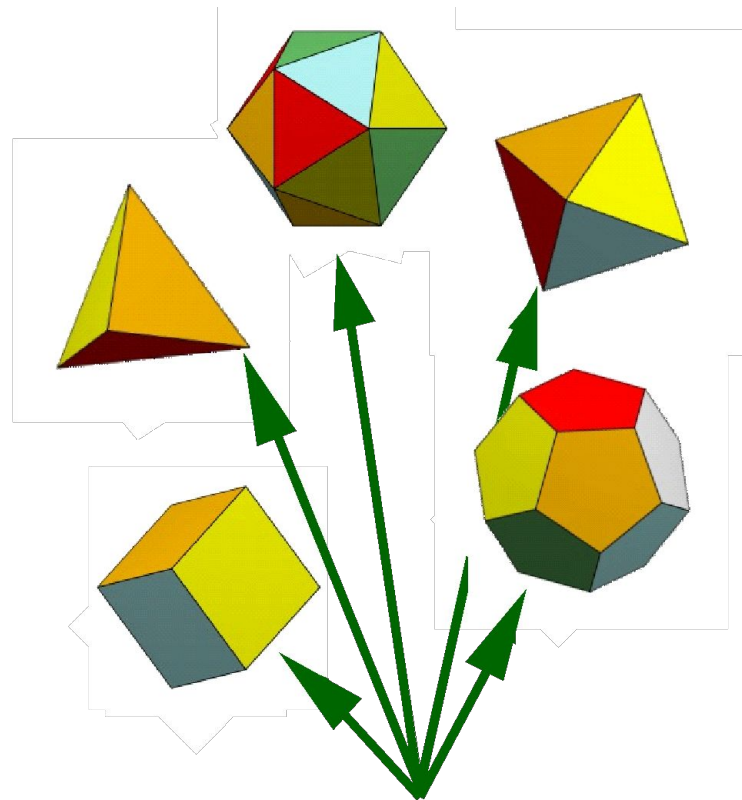
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha,$$

5. Теорема синусов

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$$

Многогранный угол, внутренняя область которого расположена по одну сторону от плоскости каждой из его граней, называется **выпуклым многогранным углом**. В противном случае многогранный угол называется **невыпуклым**.

- **Многогранник** - это тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

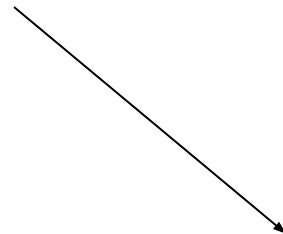
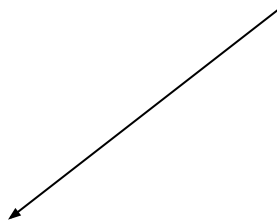


Элементы многогранника

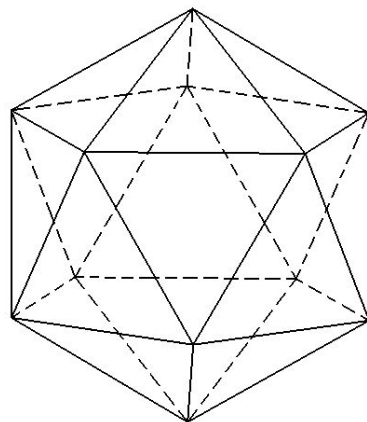
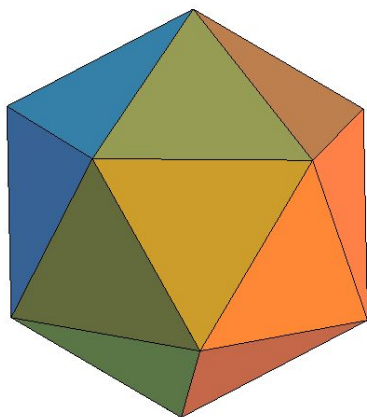
- **Грани многогранника** - это многоугольники, которые его образуют.
- **Ребра многогранника** - это стороны многоугольников.
- **Вершины многогранника** - это вершины многоугольника.
- **Диагональ многогранника** - это отрезок, соединяющий 2 вершины, не принадлежащие одной грани.



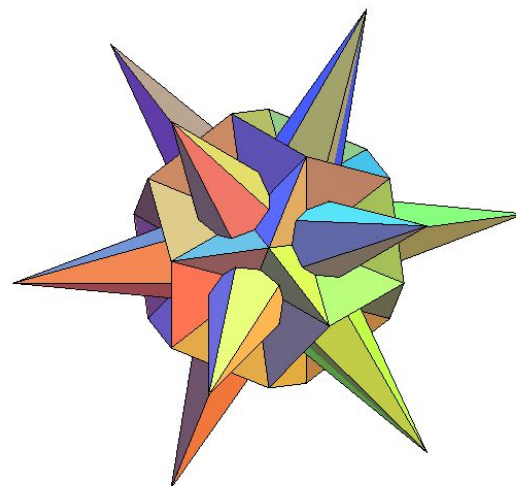
Многогранники



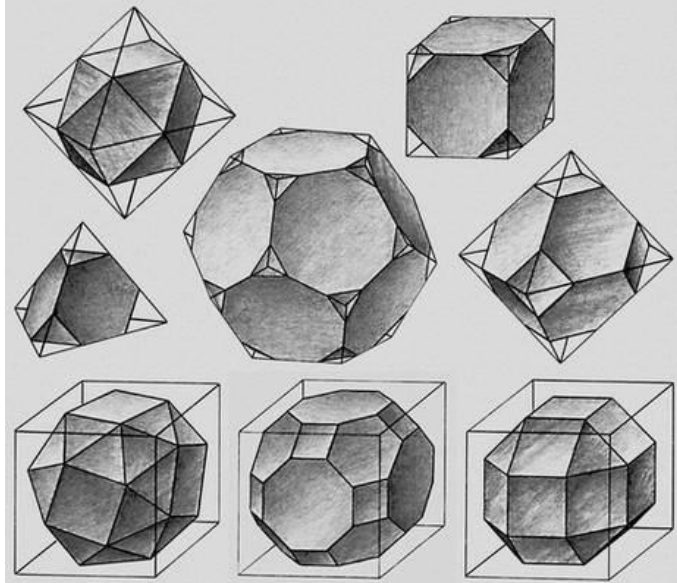
выпуклый



невыпуклый



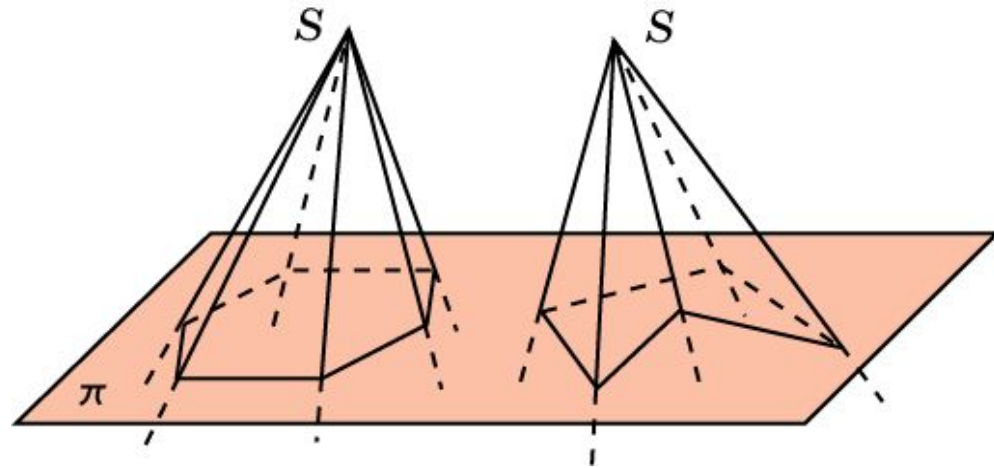
- Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону плоскости каждого многоугольника на его поверхности.



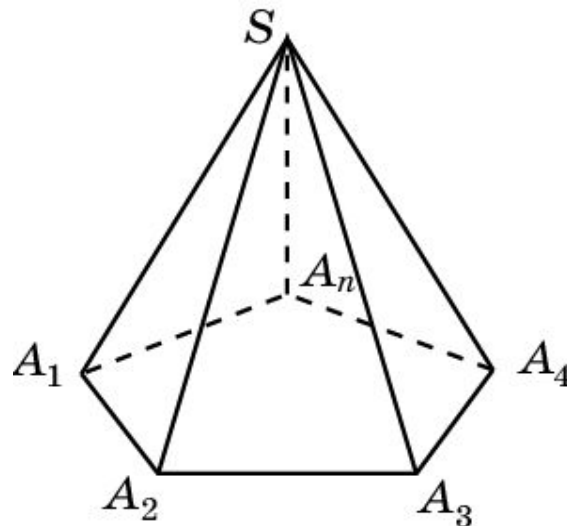
ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Многогранный угол называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке приведены примеры выпуклого и невыпуклого многогранных углов.



Теорема. Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

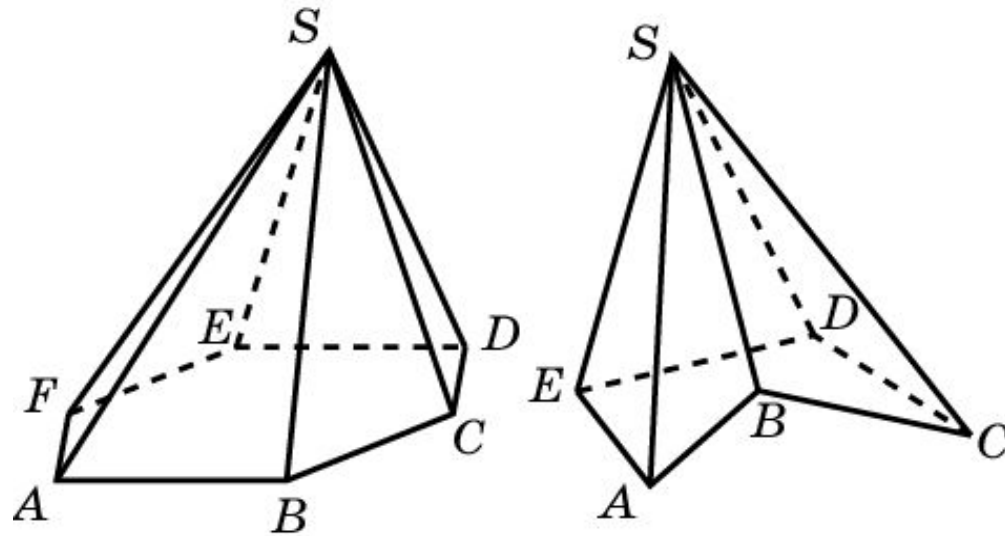


ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник угол называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Куб, параллелепипед, треугольные призма и пирамида являются выпуклыми многогранниками.

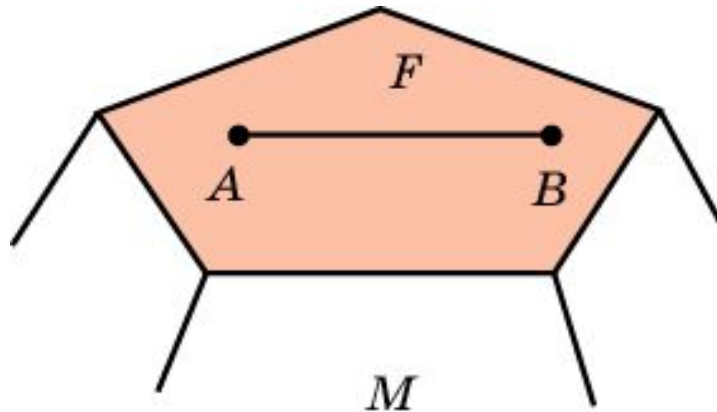
На рисунке приведены примеры выпуклой и невыпуклой пирамиды.



СВОЙСТВО 1

Свойство 1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Действительно, пусть F - какая-нибудь грань многогранника M , и точки A , B принадлежат грани F . Из условия выпуклости многогранника M , следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M . Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F , он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. F - выпуклый многоугольник.



СВОЙСТВО 2

Свойство 2. Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Действительно, пусть M - выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M , т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M . Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками. Заметим, что в силу выпуклости многогранника M , все эти отрезки содержатся в M . Рассмотрим пирамиды с вершиной S , основаниями которых являются грани многогранника M . Эти пирамиды целиком содержатся в M , и все вместе составляют многогранник M .

Правильные многогранники

- Если грани многогранника являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер, то выпуклый многогранник называется **правильным**.

Названия многогранников

пришли из Древней Греции,
в них указывается число граней:

«эдра» – грань;

«тетра» – 4;

«гекса» – 6;

«окта» – 8;

«икоса» – 20;

«додека» – 12.

Правильный тетраэдр

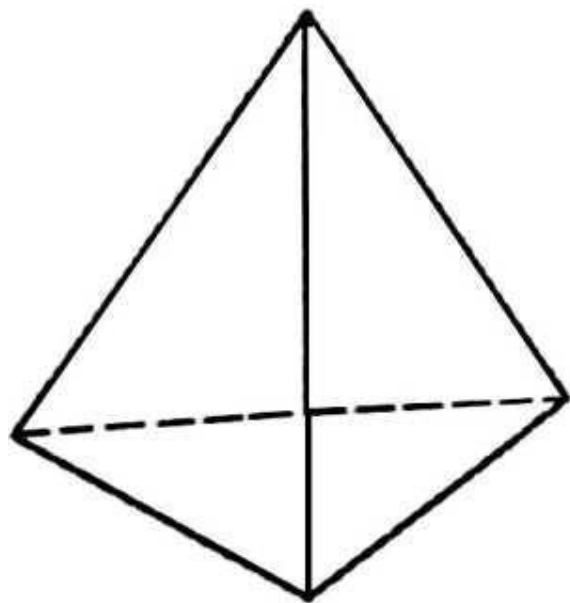


Рис. 1

**Составлен из четырёх
равносторонних
треугольников. Каждая его
вершина является
вершиной трёх
треугольников.
Следовательно, сумма
плоских углов при каждой
вершине равна 180° .**

Правильный октаэдр

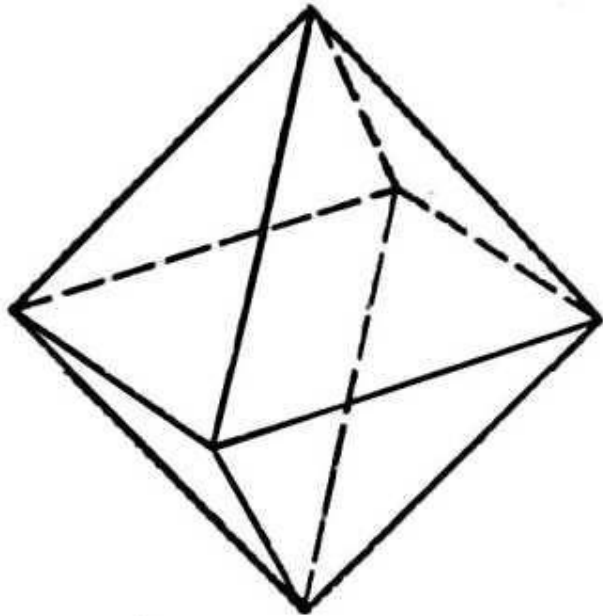


Рис. 2

**Составлен из восьми
равносторонних
треугольников. Каждая
вершина октаэдра является
вершиной четырёх
треугольников.
Следовательно, сумма
плоских углов при каждой
вершине 240° .**

Правильный икосаэдр

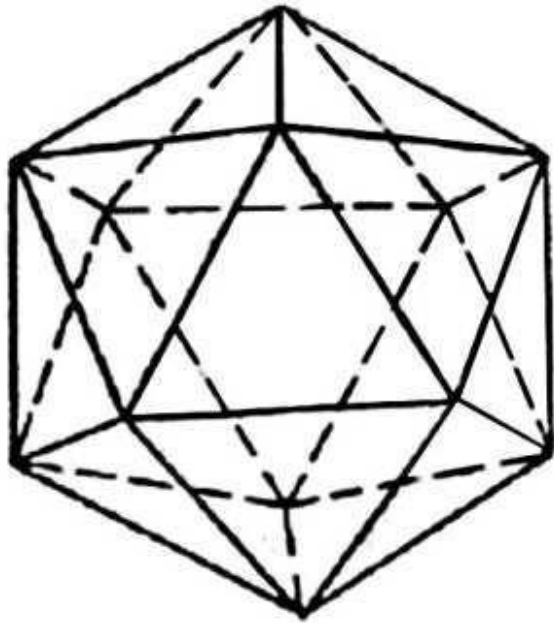
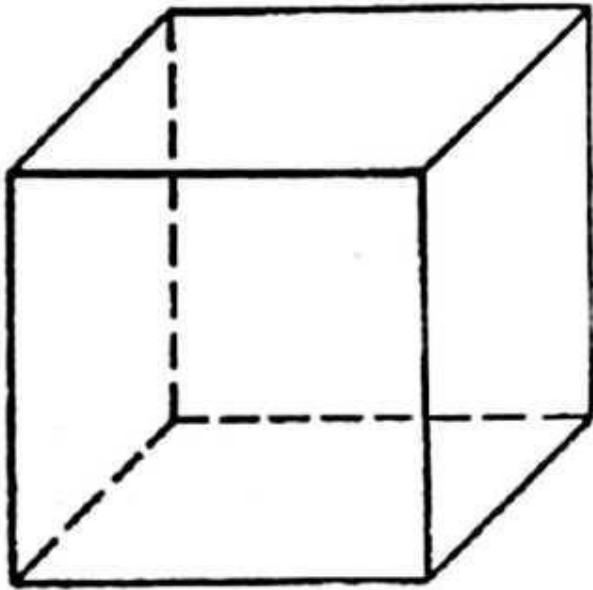


Рис. 3

**Составлен из двадцати
равносторонних
треугольников. Каждая
вершина икосаэдра является
вершиной пяти
треугольников.
Следовательно, сумма
плоских углов при каждой
вершине равна 300° .**

Куб (гексаэдр)



Составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трёх квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 270° .

**Рис.
4**

Правильный додекаэдр

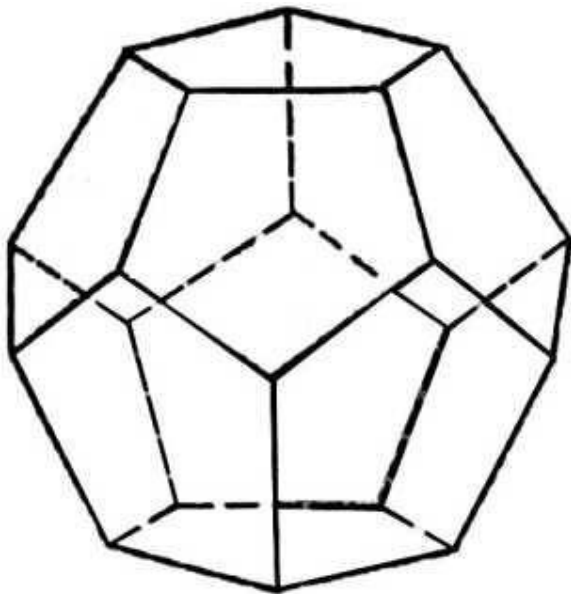


Рис. 5

**Составлен из двенадцати
правильных пятиугольников.
Каждая вершина додекаэдра
является вершиной трёх
правильных пятиугольников.
Следовательно, сумма
плоских углов при каждой
вершине равна 324° .**

Таблица № 1

Правильный многогранник	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Формула Эйлера

Сумма числа граней и вершин любого многогранника

равна числу рёбер, увеличенному на 2.

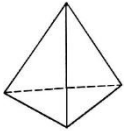
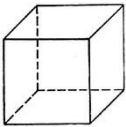
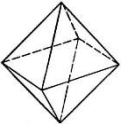
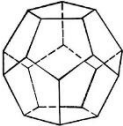
$$\Gamma + B = P + 2$$

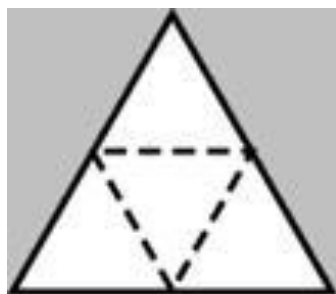
Число граней плюс число вершин минус число рёбер

в любом многограннике равно 2.

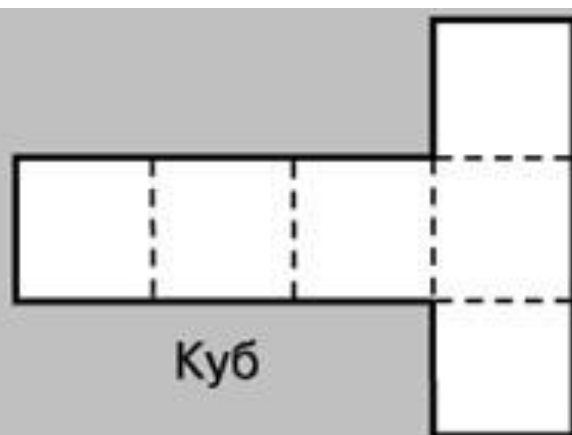
$$\Gamma + B - P = 2$$

Таблица № 2

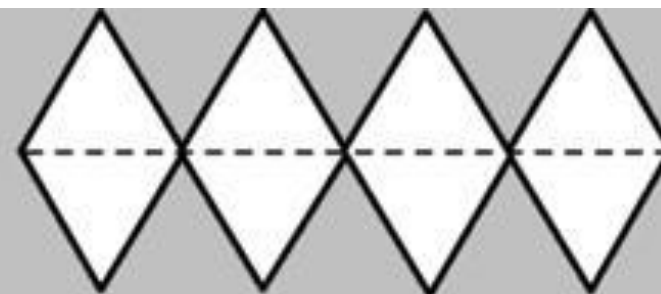
Правильный многогранник		Число		
		граней и вершин (Г + В)	рёбер (Р)	
Тетраэдр		$4 + 4 = 8$	6	«тетра» – 4;
Куб		$6 + 8 = 14$	12	«гекса» – 6;
Октаэдр		$8 + 6 = 14$	12	«окта» – 8
Додекаэдр		$12 + 20 = 32$	30	додека» – 12.
Икосаэдр		$20 + 12 = 32$	30	«икоса» – 20



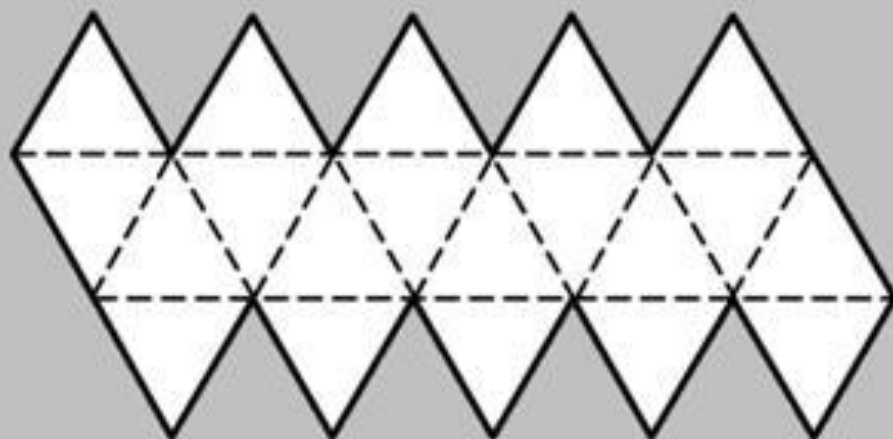
Тетраэдр



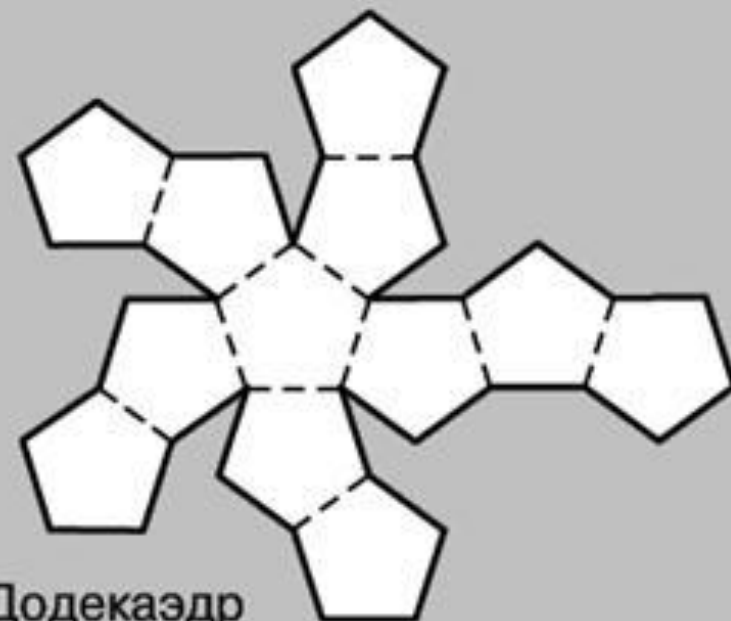
Куб



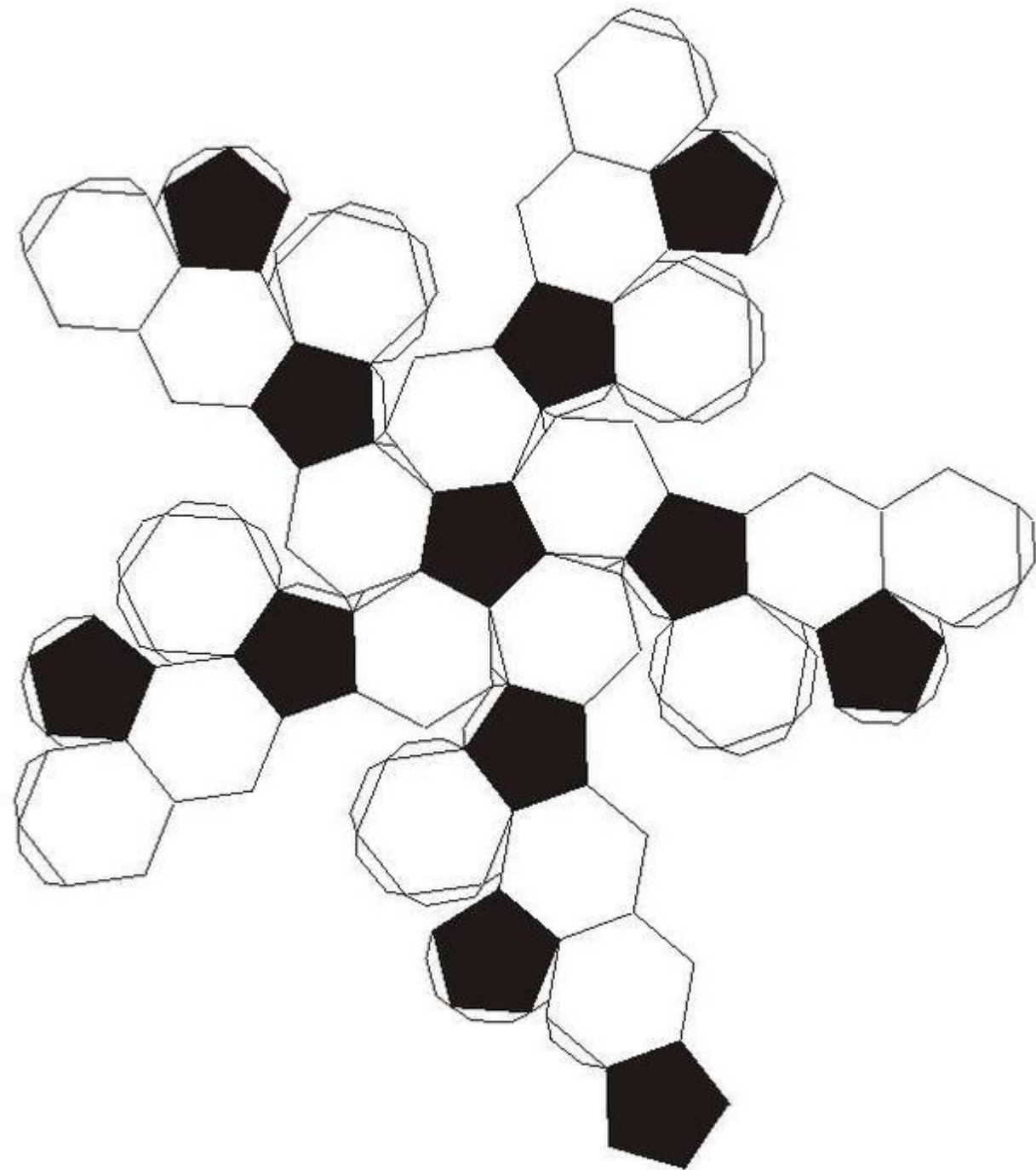
Октаэдр



Икосаэдр



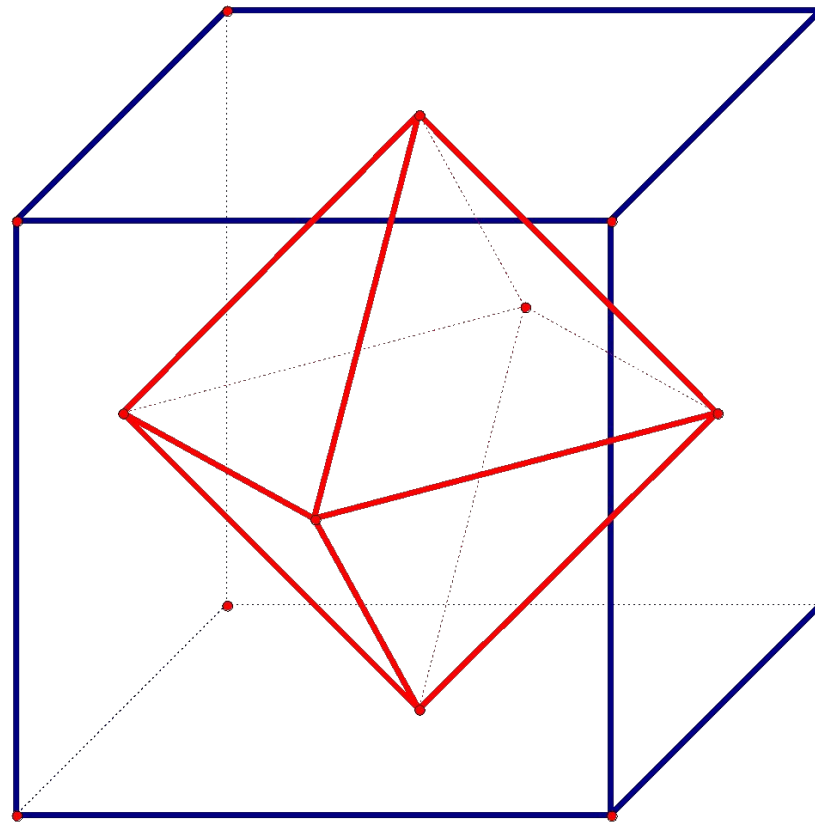
Додекаэдр



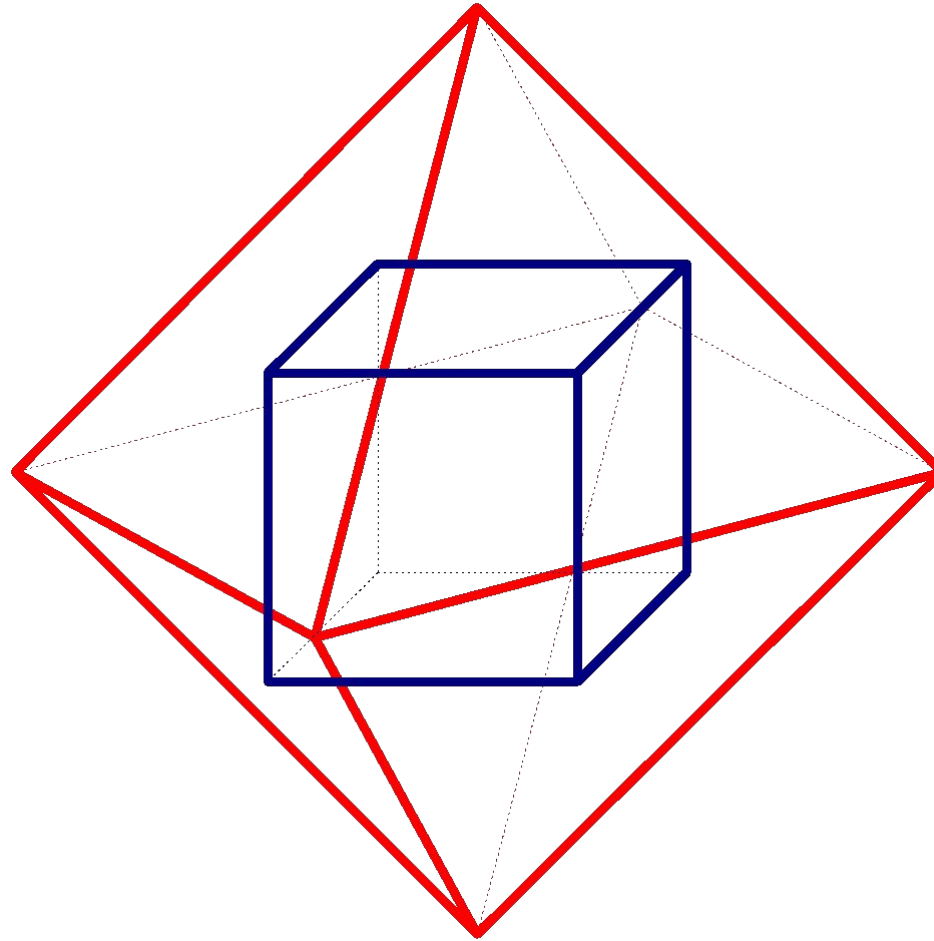
Двойственность правильных многогранников

- Гексаэдр (куб) и октаэдр образуют двойственную пару многогранников. Число граней одного многогранника равно числу вершин другого и наоборот.

Возьмем любой куб и рассмотрим многогранник с вершинами в центрах его граней. Как нетрудно убедиться, получим октаэдр.



Центры граней октаэдра служат вершинами куба.



Многогранники в природе, химии и биологии

Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников.



Кристалл
пирита—
природная
модель
додекаэдр.



Кристаллы
поваренной
соли передают
форму **куб**.



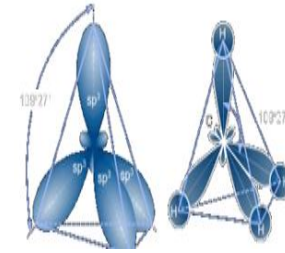
Монокристалл
алюминиево-
калиевых квасцов
имеет форму
октаэдра.



Сурьменистый
сернокислый
натрий – **тетраэдра**.

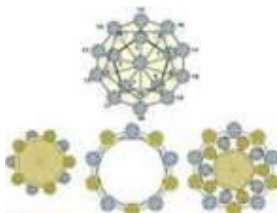


Хрусталь
(**призма**)



В молекуле
метана имеет
форму
правильного
тетраэдра.

Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - *икосаэдр*.

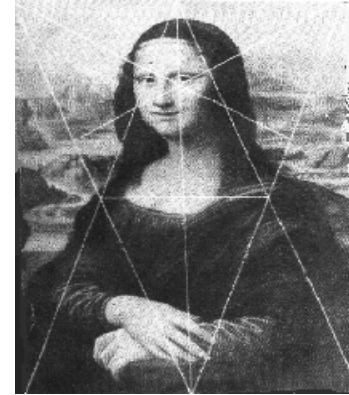


В процессе деления яйцеклетки сначала образуется тетраэдр из четырех клеток, затем октаэдр, куб и, наконец, додекаэдро-икосаэдрическая структура гастролы. И наконец, самое, пожалуй, главное – структура ДНК генетического кода жизни – представляет собой четырехмерную развертку (по оси времени) вращающегося додекаэдра!

Многогранники в искусстве

«Портрет Монны Лизы»

Композиция рисунка основана на золотых треугольниках, являющихся частями правильного звездчатого пятиугольника.



гравюра «Меланхолия»

На переднем плане картины изображен додекаэдр.



«Тайная Вечеря»

Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра.



Многогранники в архитектуре

Музеи Плодов

Музеи Плодов в Яманаши создан с помощью трехмерного моделирования.



Пирамиды

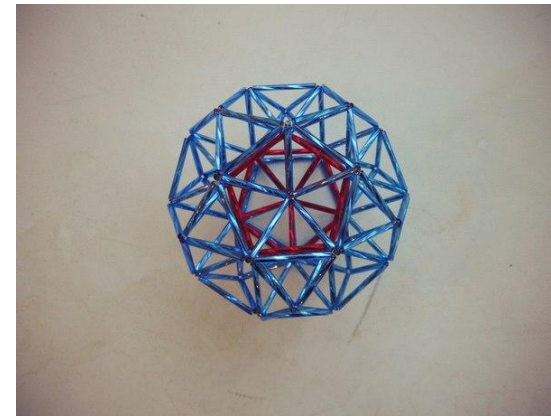
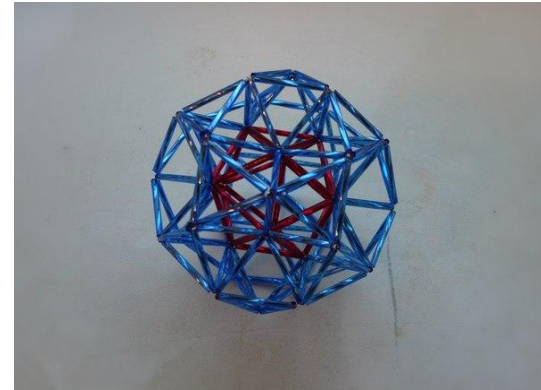
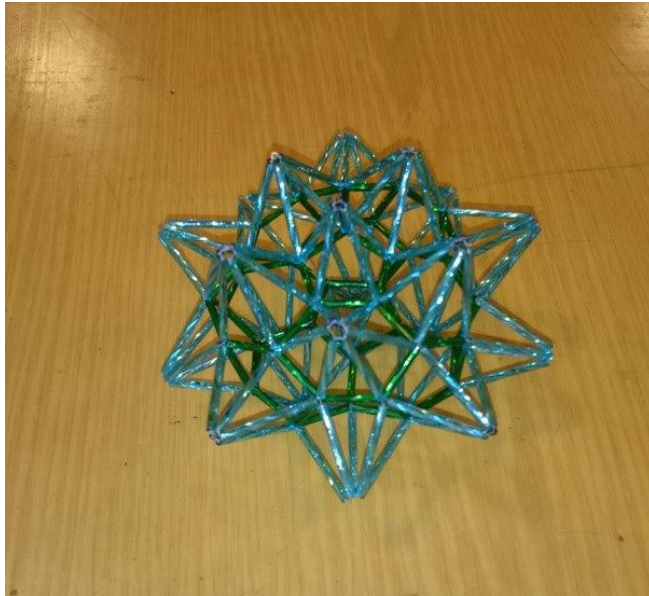
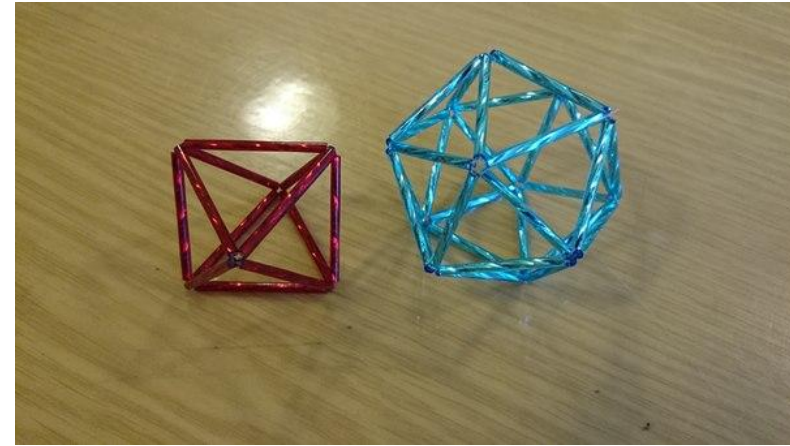
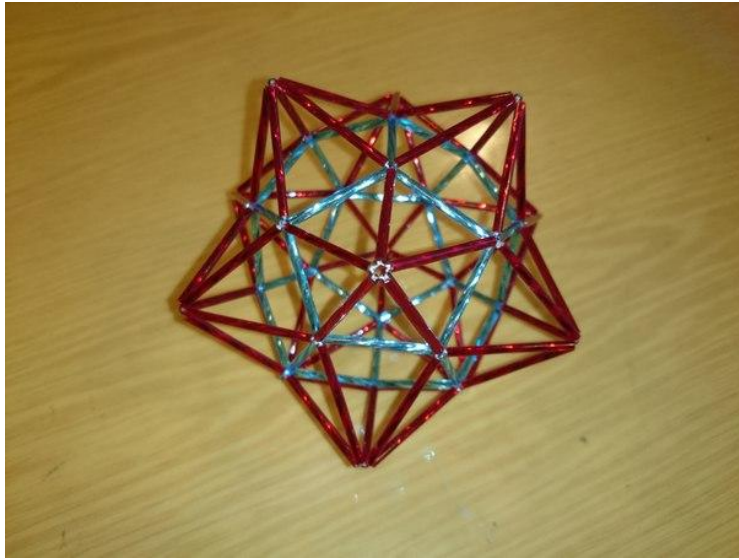
Александрийский маяк

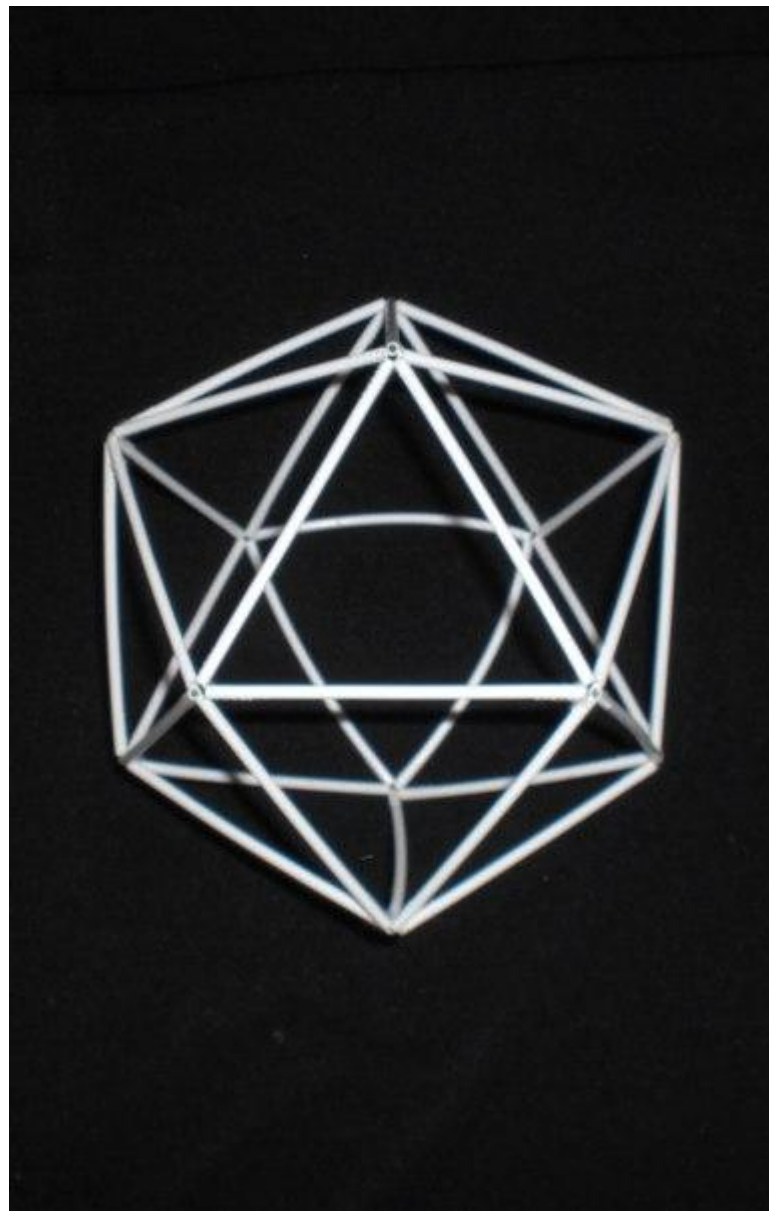
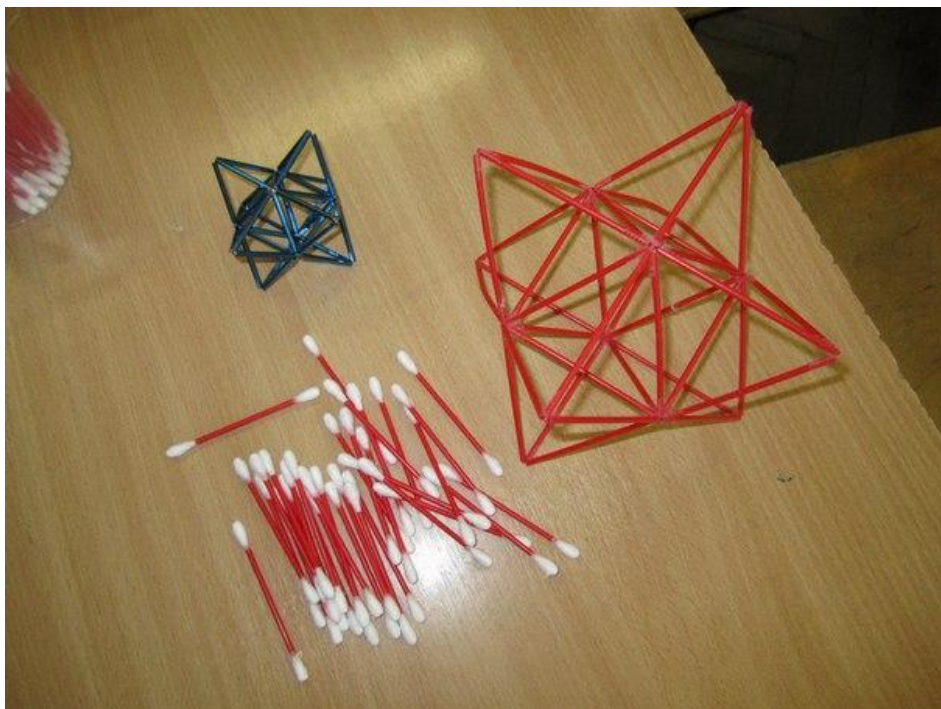
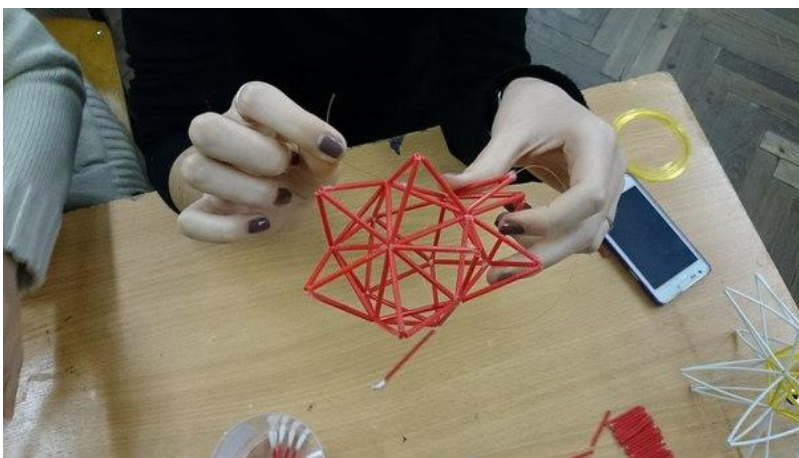


Спасская башня Кремля.

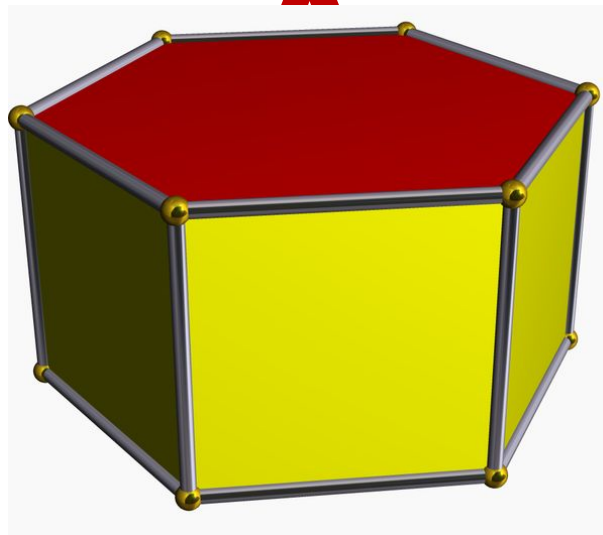


Четырехъярусная Спасская башня с церковью Спаса Нерукотворного — главный въезд в Казанский кремль. Возведена в XVI веке псковскими зодчими Иваном Ширяем и Постником Яковлевым по прозвищу «Барма». Четыре яруса башни представляют из себя куб, многогранники и пирамиду.



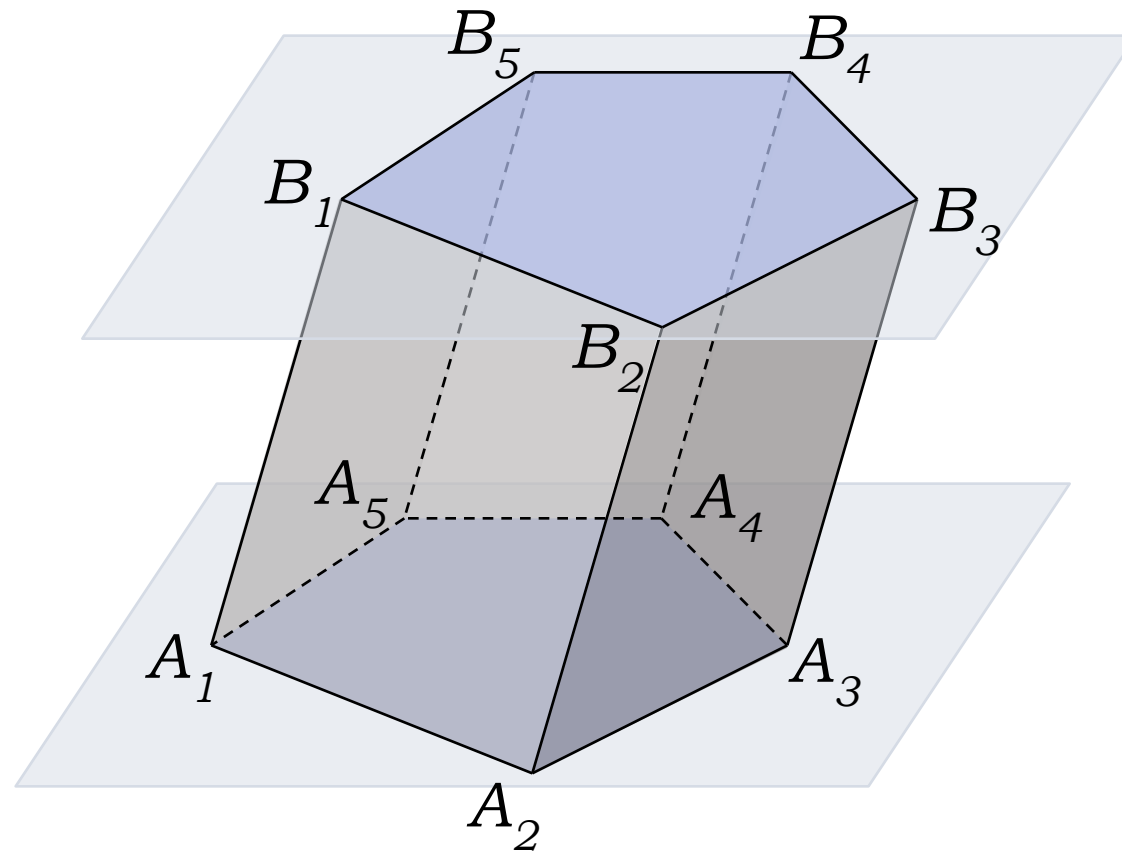


ПРИЗМ

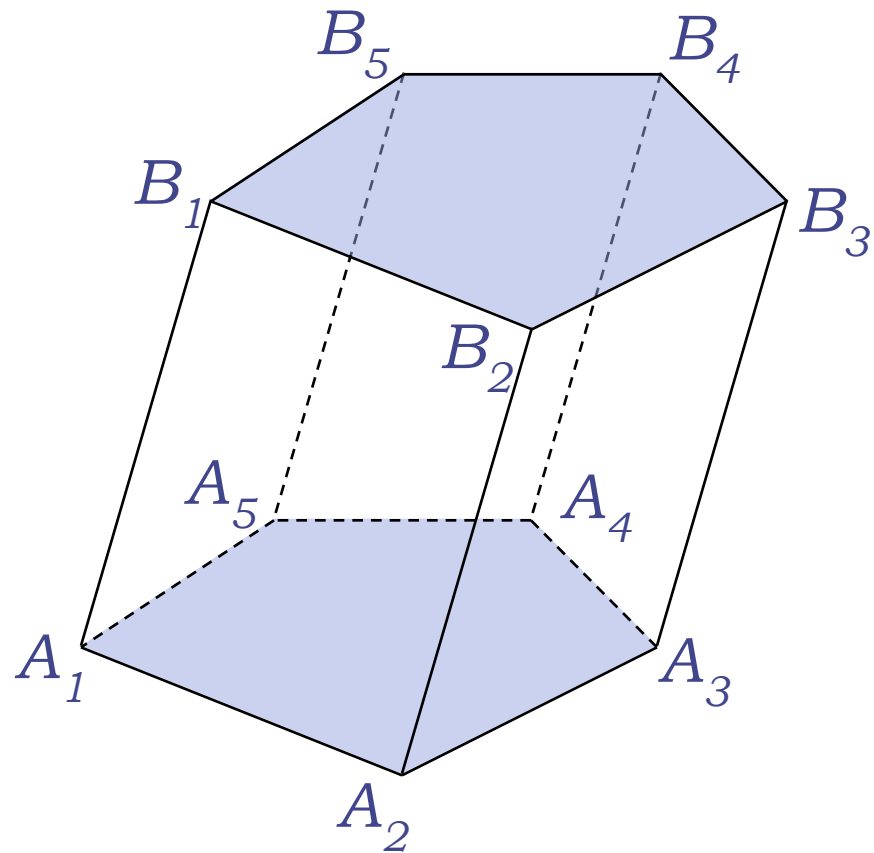
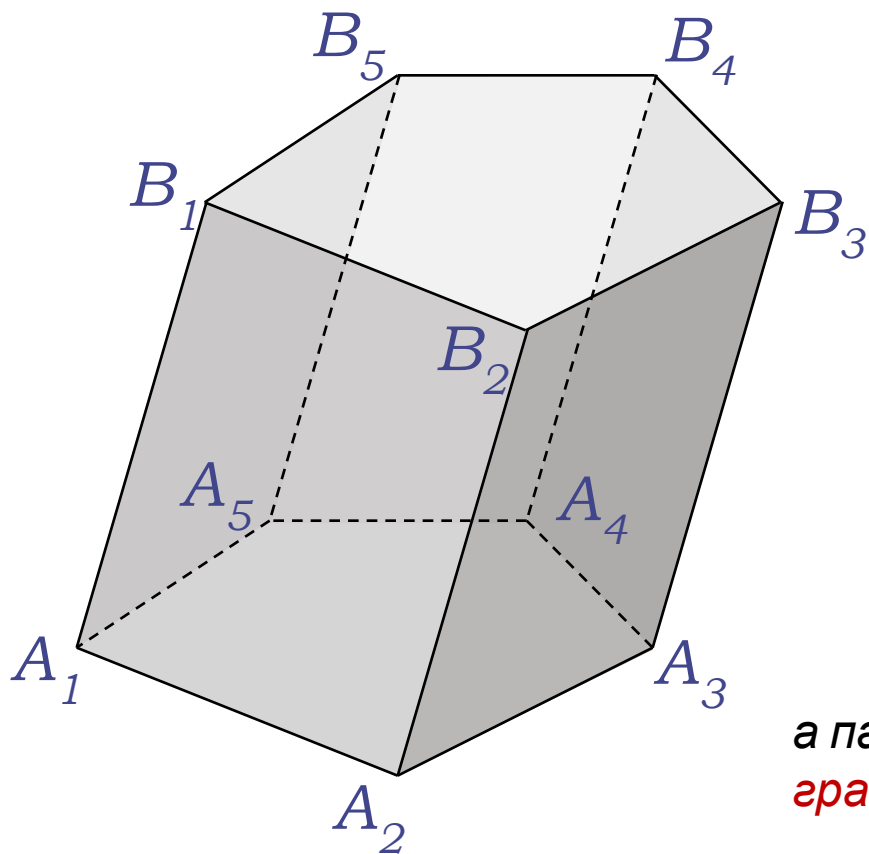


Понятие призмы

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется *призмой*



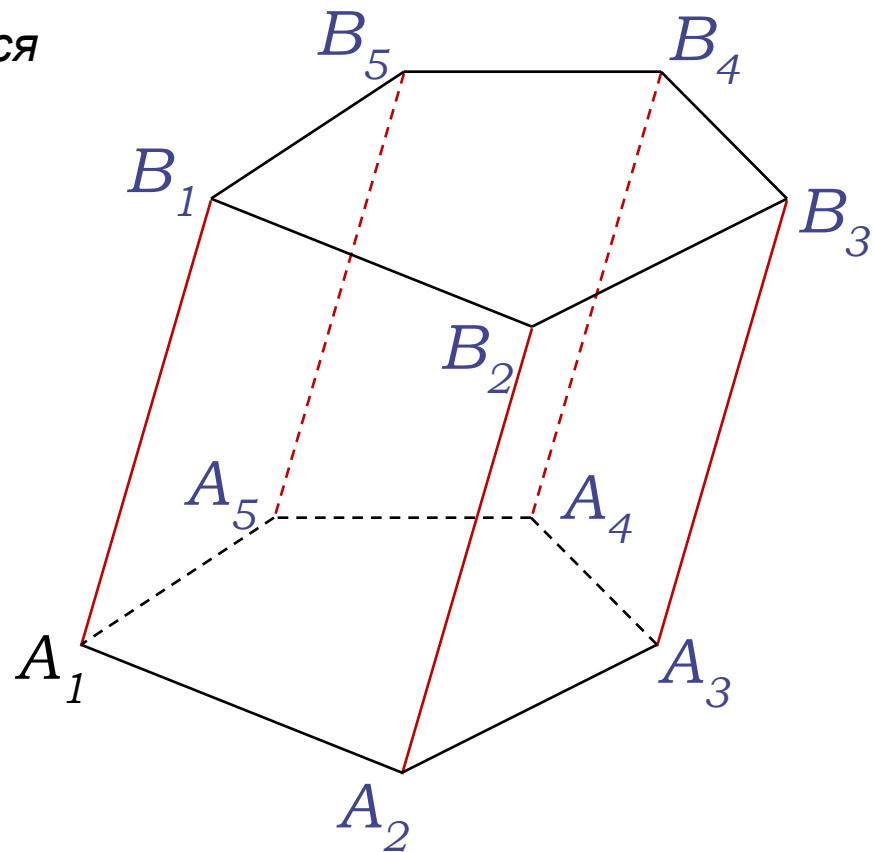
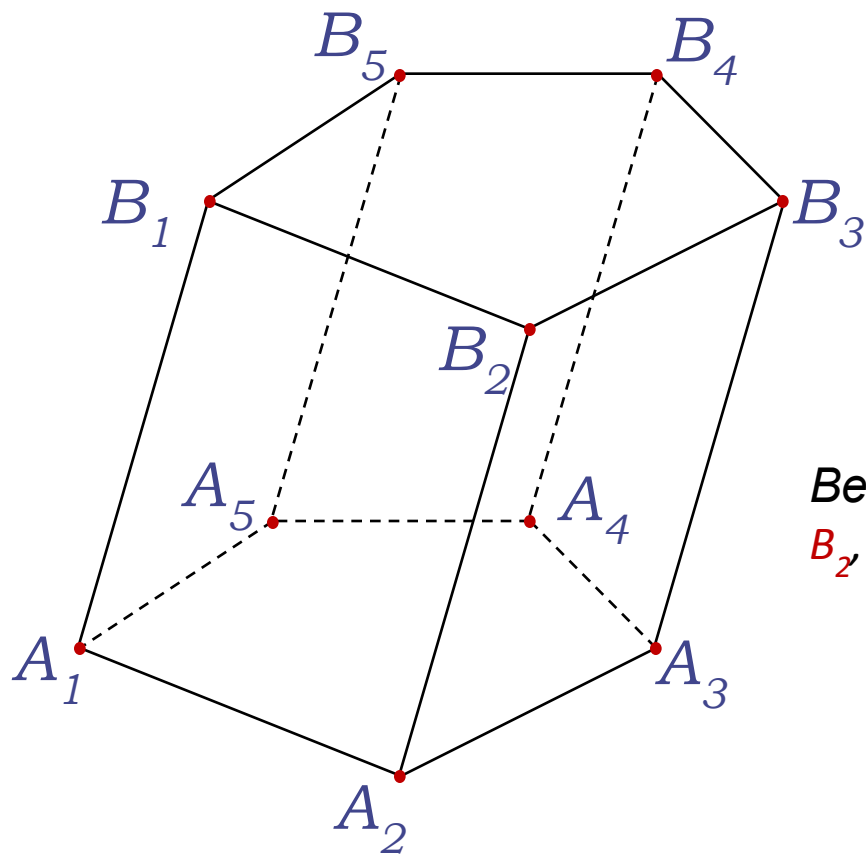
Многоугольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$
называются **основаниями** призмы



а параллелограммы – **боковыми**
гранями призмы

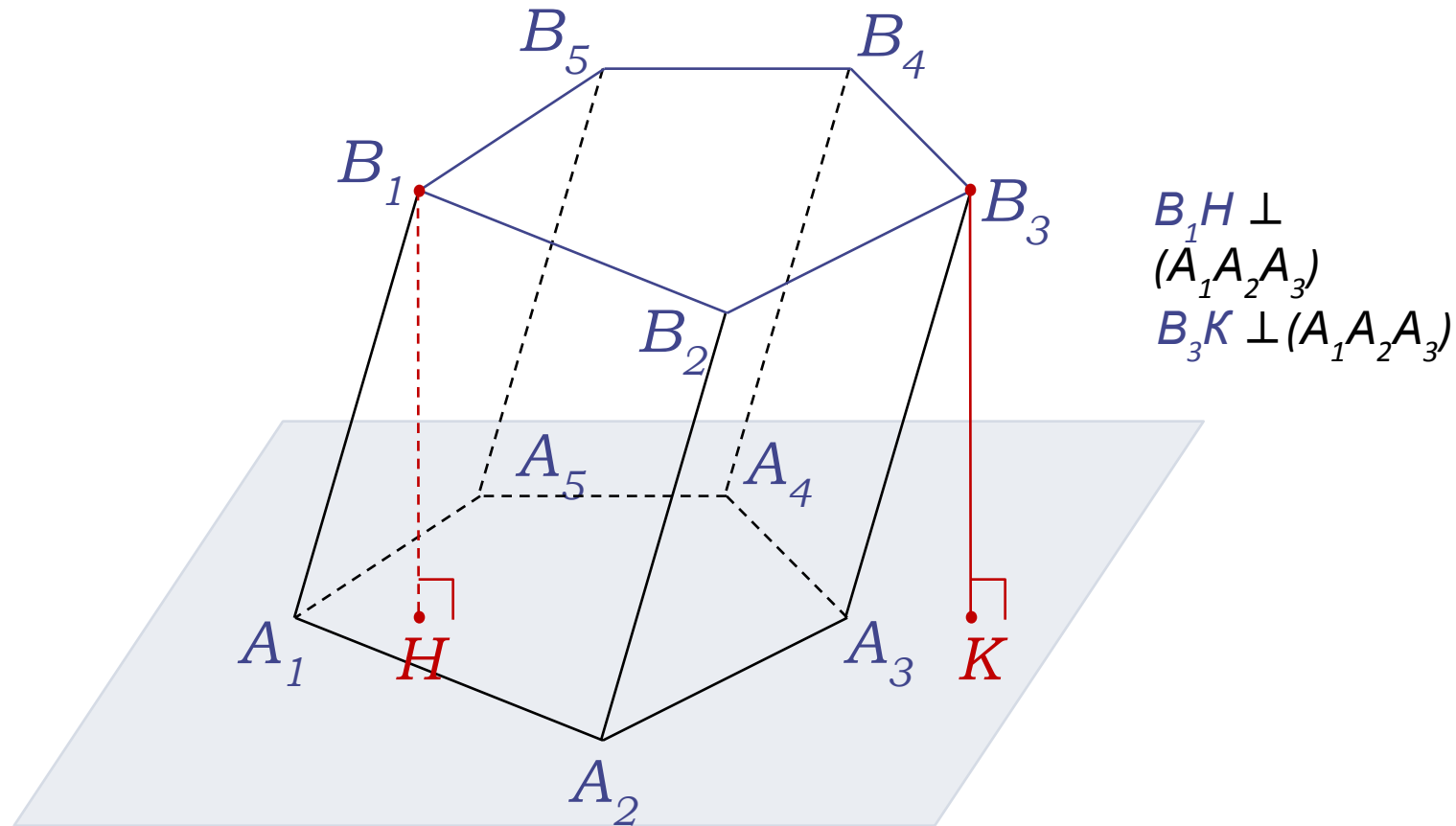
Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ называются
боковыми ребрами призмы

Боковые ребра призмы **равны** и
параллельны



Вершины многоугольников $A_1, A_2, \dots, A_n$ и $B_1, B_2, \dots, B_n$ называются **вершинами** призмы

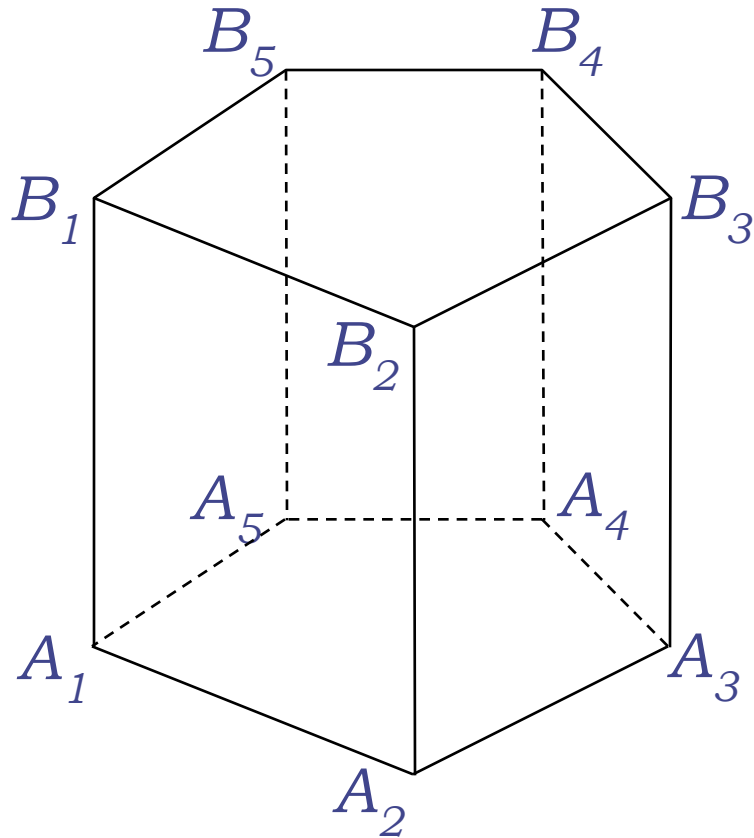
Высота призмы



Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** призмы

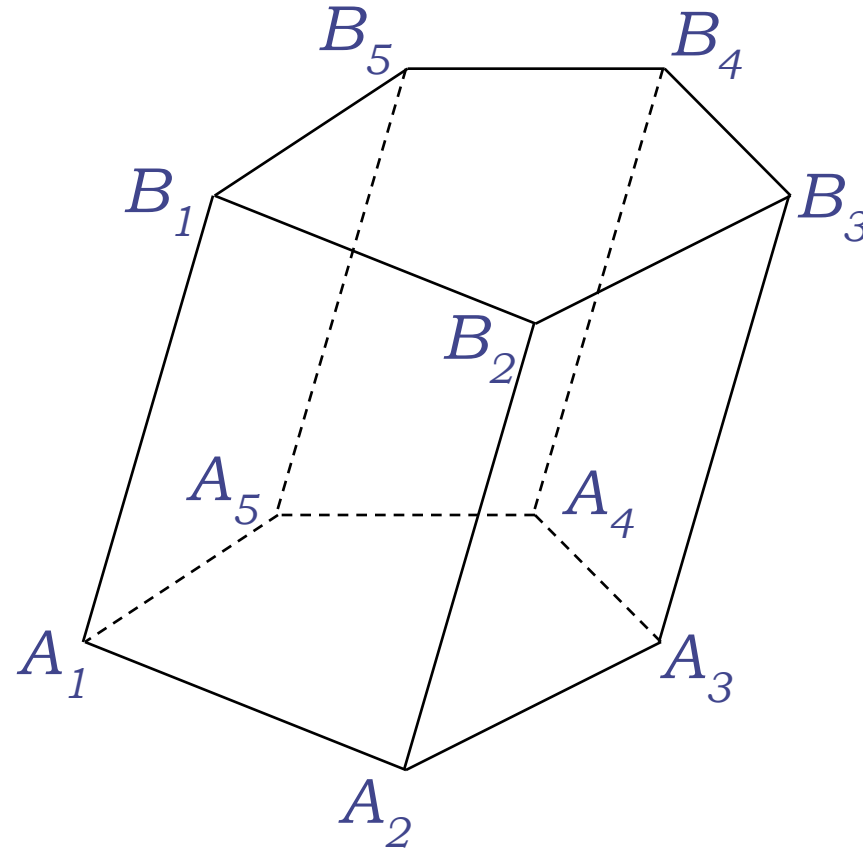
Виды призм

Прямая



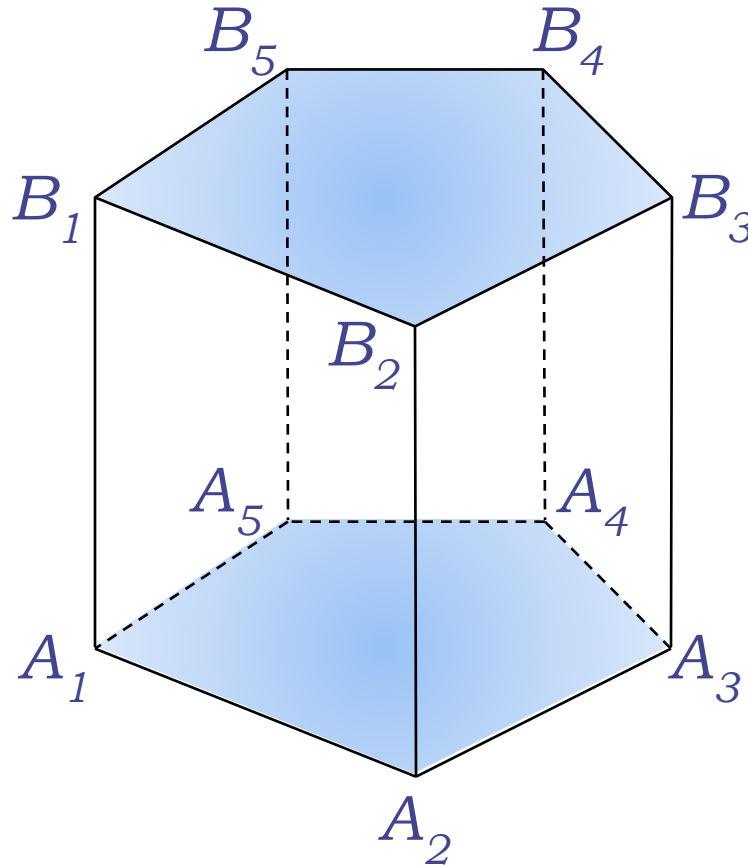
Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, **высота** – боковое ребро

Наклонная



в противном случае – **наклонной**.

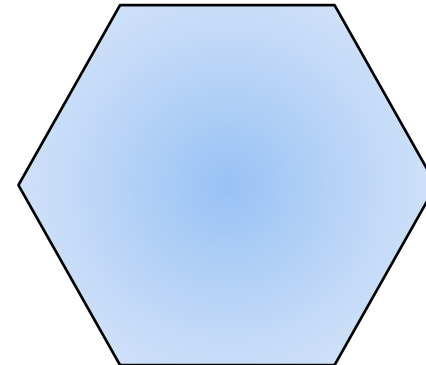
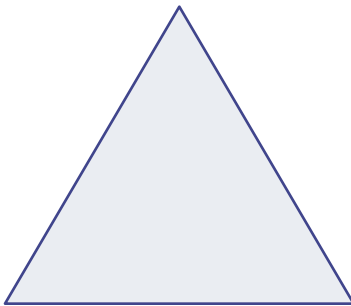
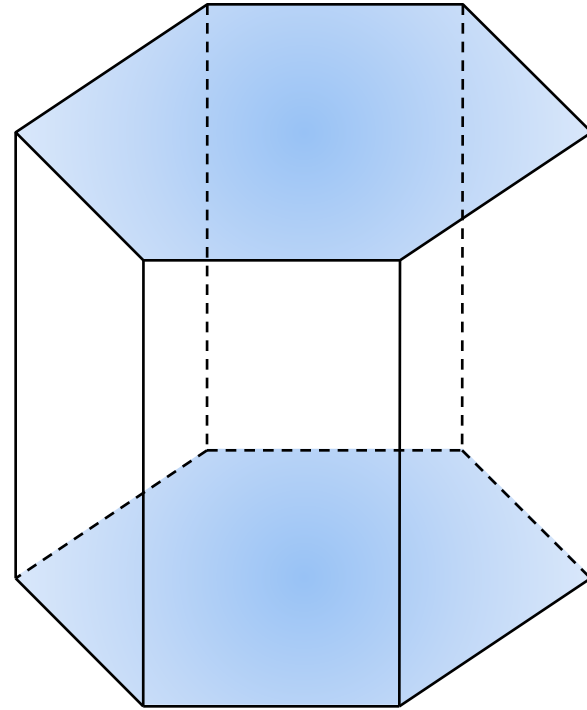
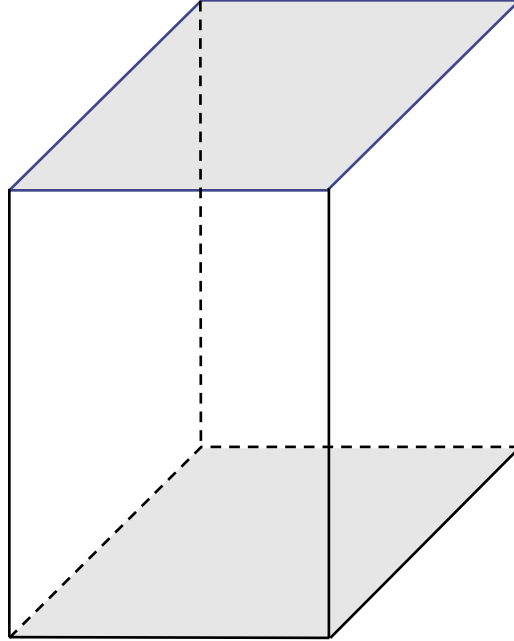
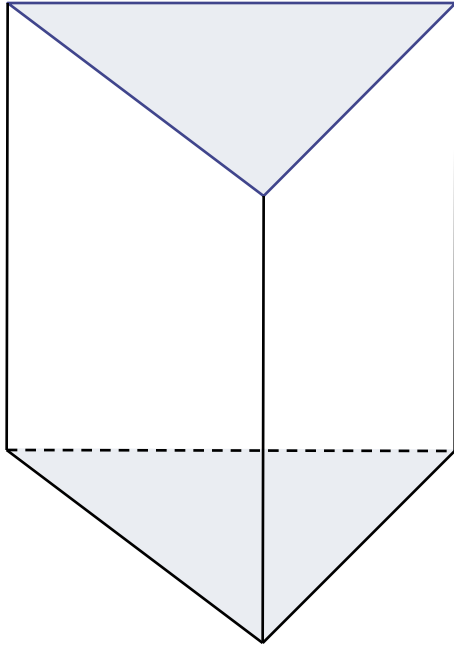
Правильная призма



Прямая призма называется **правильной**, если её основания – правильные многоугольники

У правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники

Правильные призмы



Площадь поверхности призмы

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

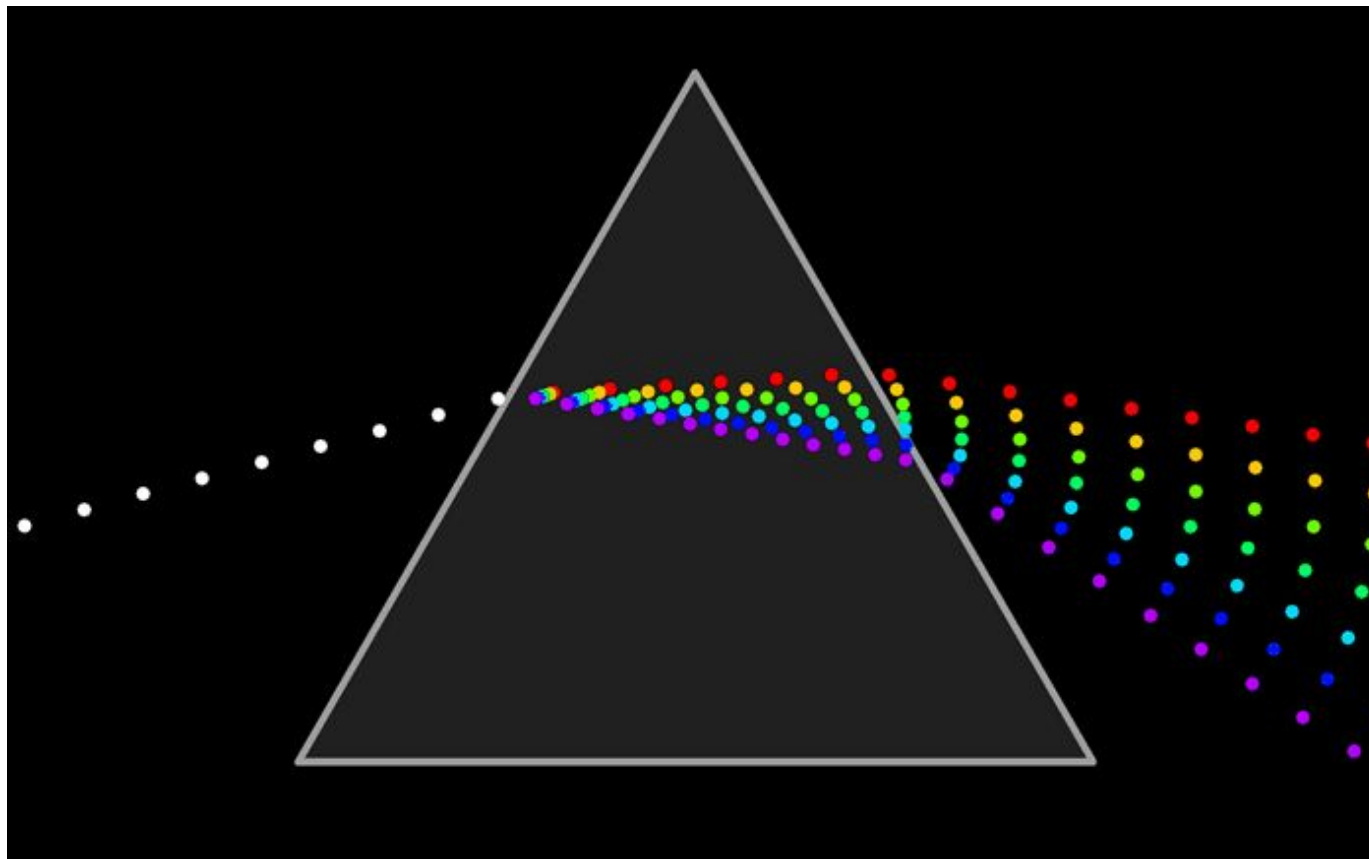
Площадью **боковой поверхности** призмы называется сумма площадей её боковых граней

Площадью **полной поверхности** призмы называется сумма площадей всех её граней

Теорема о площади боковой поверхности прямой призмы

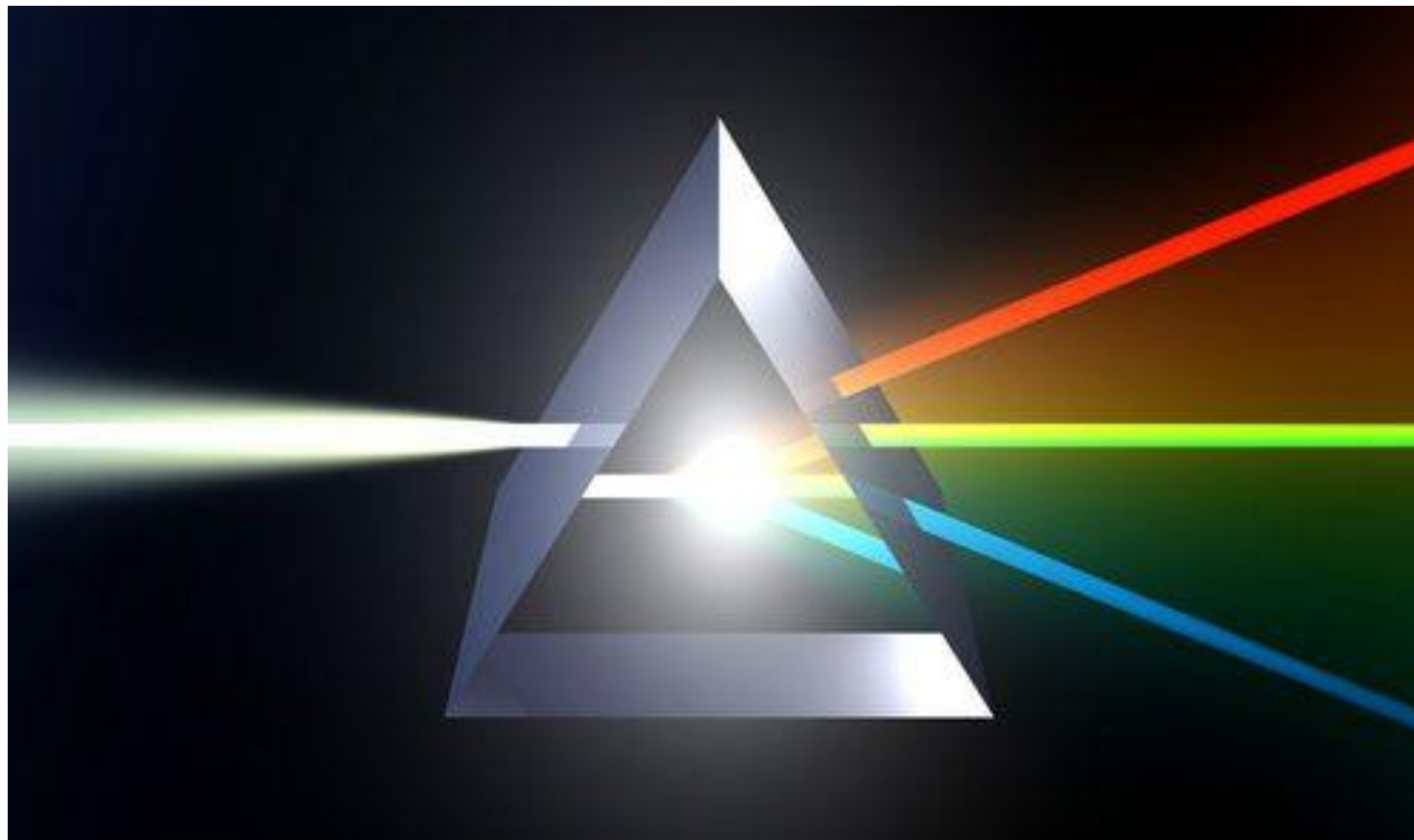
Площадь *боковой поверхности* прямой призмы
равна произведению *периметра основания* на
высоту призмы

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h$$



В 60-х годах XVII столетия Исаак Ньютон проводил эксперименты со светом. Чтобы разложить свет на составляющие и получить спектр, он использовал трехгранную стеклянную призму.

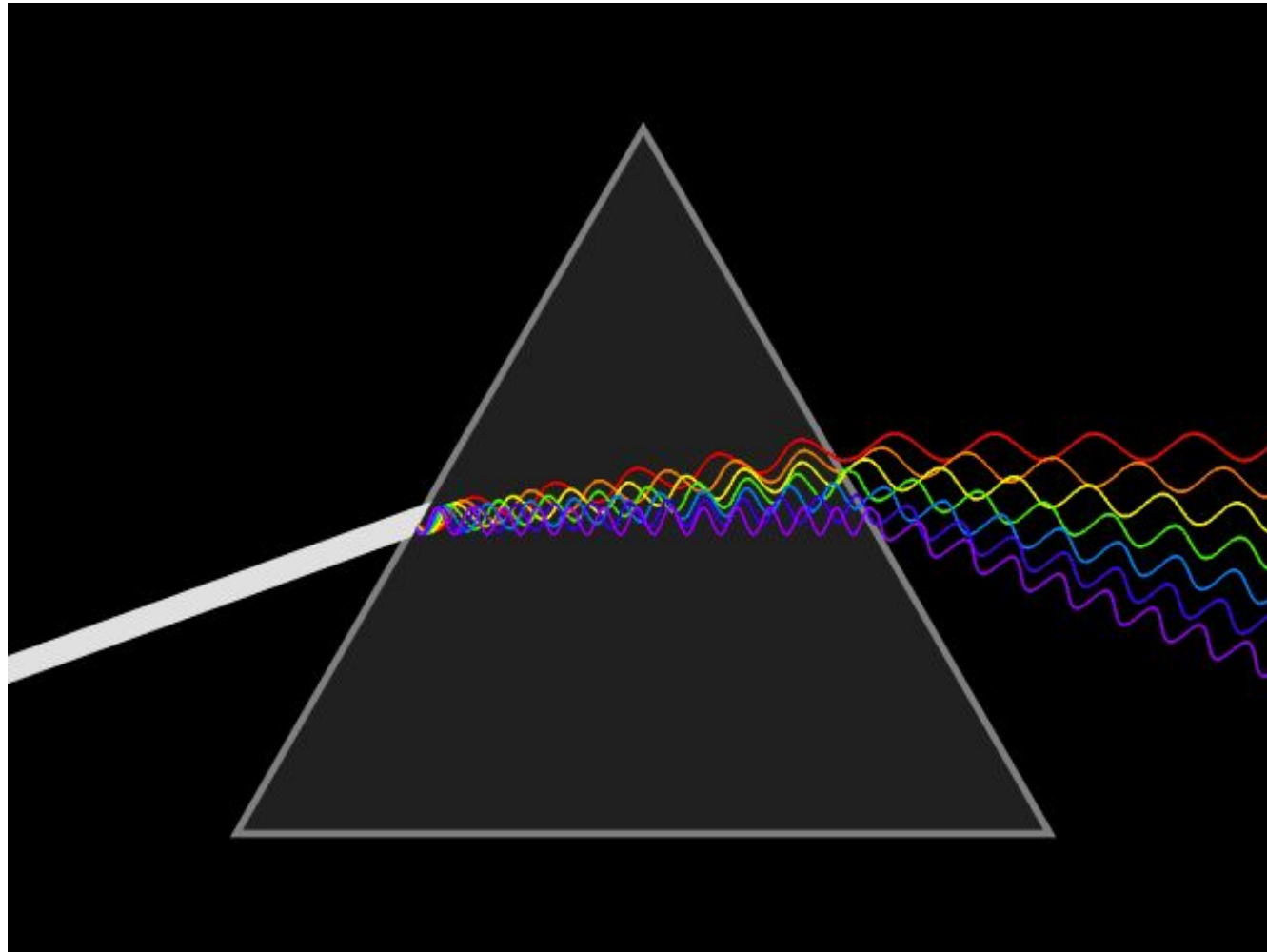
Ученый обнаружил, что, собрав раздробленный луч с помощью второй призмы, можно опять получить белый свет. Так он доказал, что белый свет является смесью разных цветов. Проходя через призму, световые лучи преломляются.



«Я затемнил мою комнату, — писал он, — и сделал очень маленькое отверстие в ставне для пропуска солнечного света».

На пути солнечного луча ученый поставил особое трехгранное стеклышко — призму. На противоположной стене он увидел разноцветную полоску — спектр. Ньютон объяснил это тем, что призма разложила белый цвет на составляющие его цвета. Ньютон первый разгадал, что солнечный луч многоцветный.

Но лучи разного цвета преломляются в разной степени – красный в наименьшей, фиолетовый в наибольшей. Именно поэтому, проходя через призму, белый цвет дробится на составные цвета. Преломление света называется рефракцией, а разложение белого света на разные цвета – дисперсией.



Использование призмы для творческих фотоэффектов



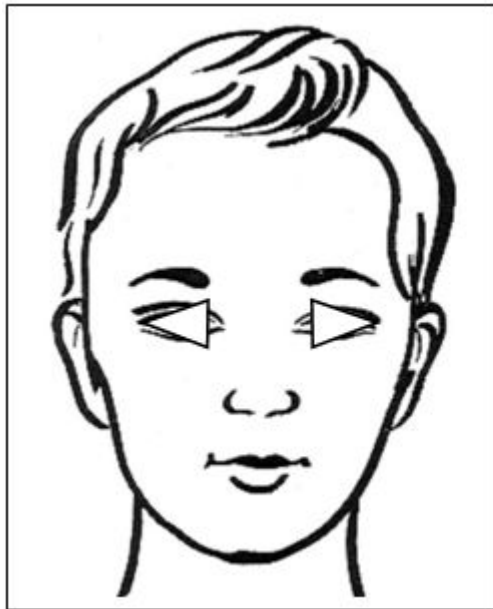
*Архитектура, оптика, медицина, электронная техника.
(очки, бинокли, объективы, телефоны)*



Применение призм в лечении косоглазия

Принцип тренировки состоит в попеременном приставлении к тренируемым глазам на определенное время положительных сферо – призматических элементов различной сферической и призматической диоптрийности.

Графически это выглядит следующим образом:



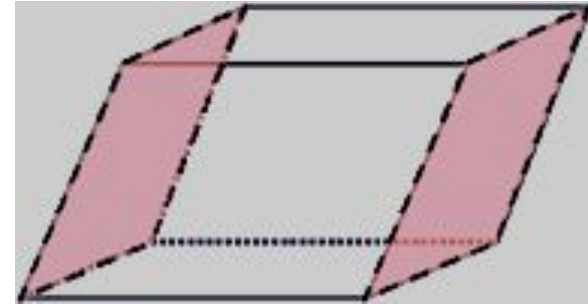
Определение

Параллелепипед — **призма**, основанием которой служит **параллелограмм**, или (равносильно) многогранник, у которого шесть граней и каждая из них — **параллелограмм**.

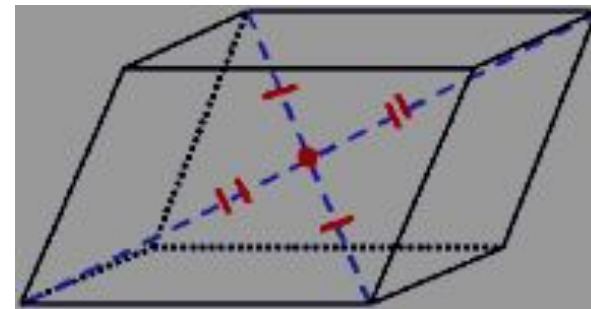


Свойства

1) У параллелепипеда
противоположные грани
параллельны и равны.

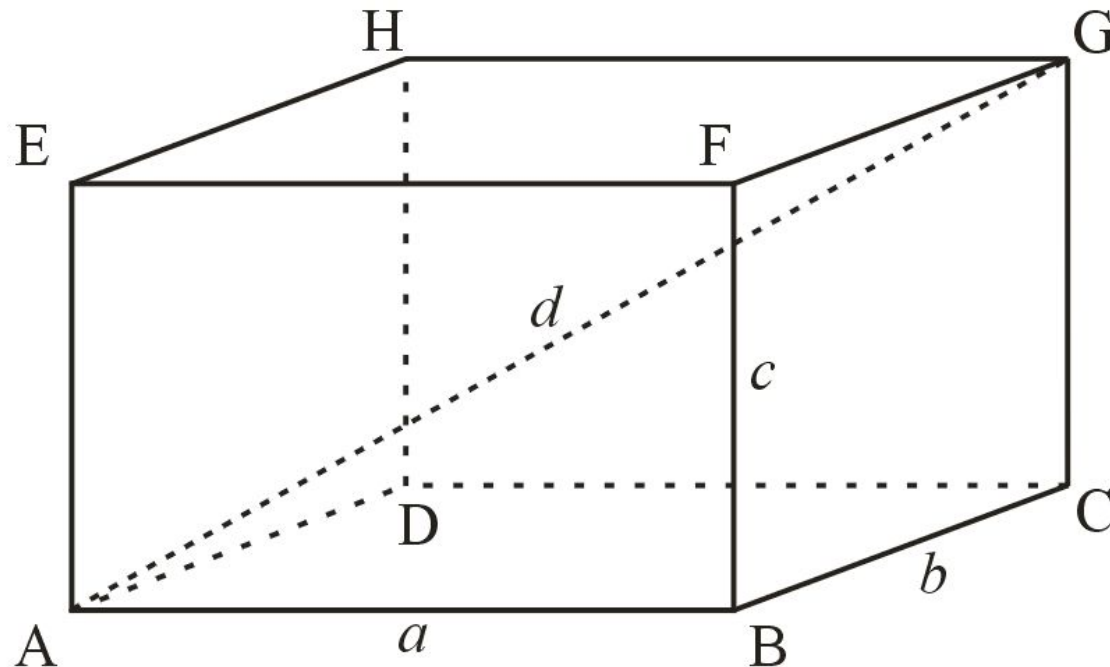


2) Диагонали
параллелепипеда
пересекаются в одной точке и
точкой пересечения делятся
пополам.



Виды параллелограмма

1. Прямоугольный параллелепипед (многогранник с шестью гранями, каждая из которых является в общем случае прямоугольником.)



Поверхность прямоугольного
параллелепипеда

$$S_{\text{полн}} = 2(ab+bc+ac)$$

Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V = abc$$

Куб (правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат.)

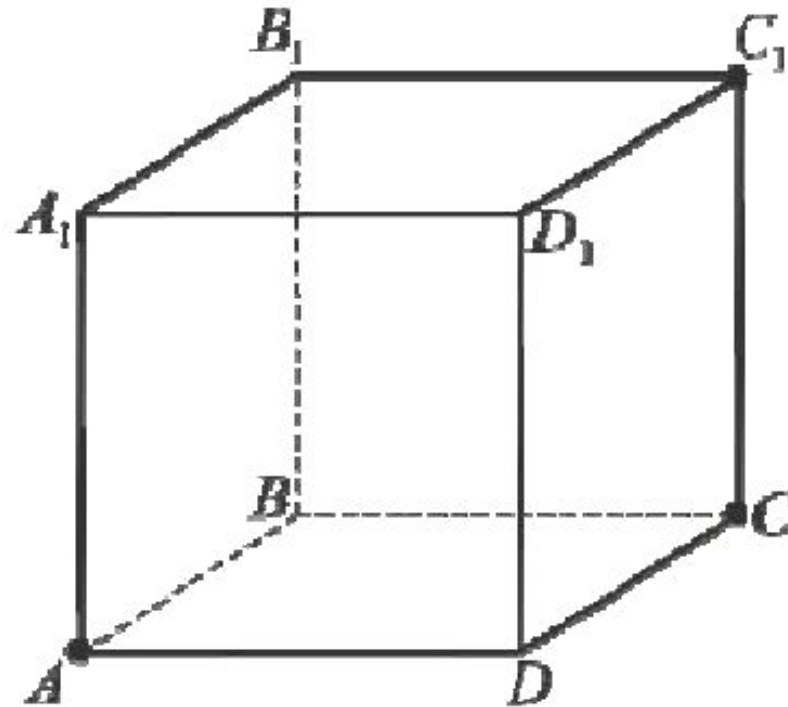


Площадь
поверхности

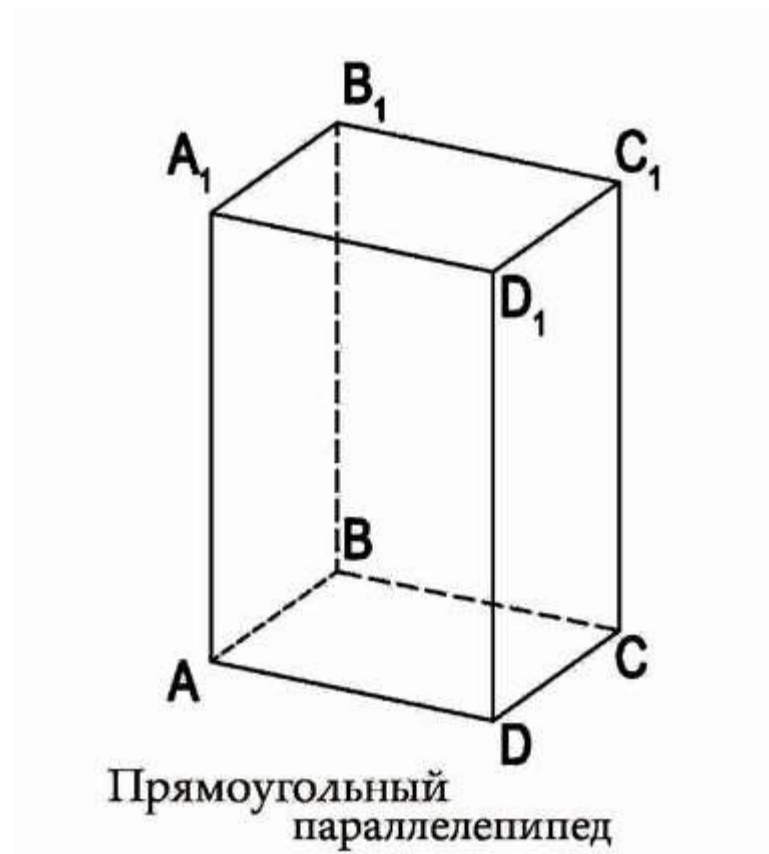
$$S=6a^2$$

Объём

$$V=a^3$$



2. Прямой параллелепипед (это параллелепипед, у которого 4 боковые грани прямоугольники.)



Площадь боковой поверхности

$$S_6 = P_o * h,$$

где P_o — периметр основания, h — высота

Площадь полной поверхности

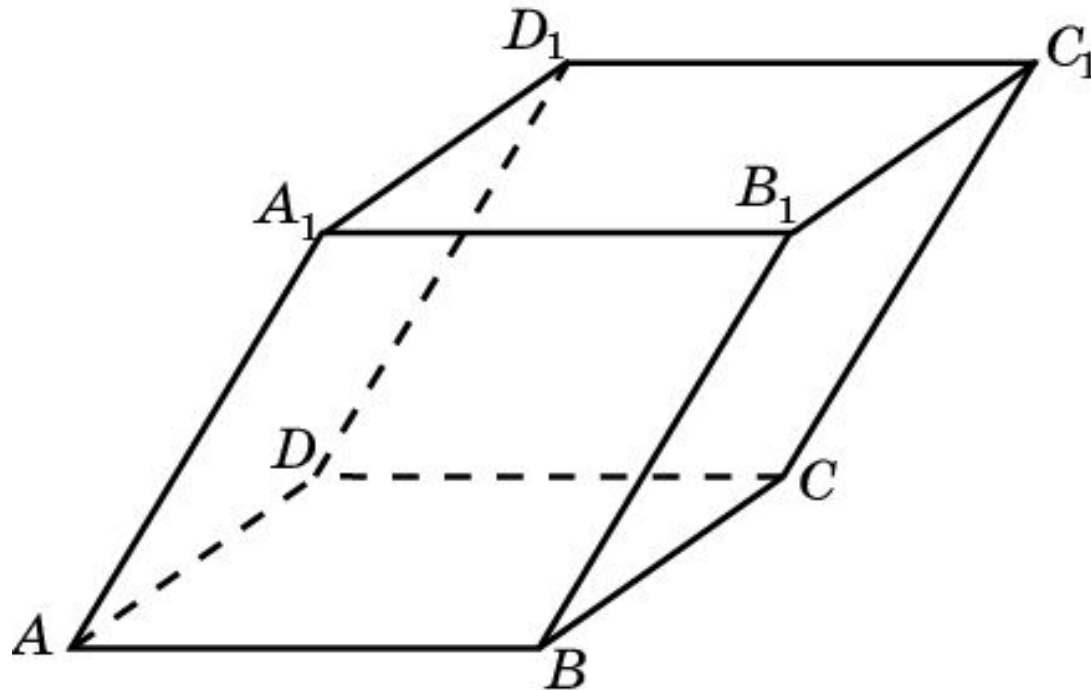
$$S_p = S_6 + 2S_o,$$

где S_o — площадь основания

Объём

$$V = S_o * h$$

3. Наклонный параллелепипед (это параллелепипед, боковые грани которого не перпендикулярны основаниям.)



Боковая поверхность

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot H$$

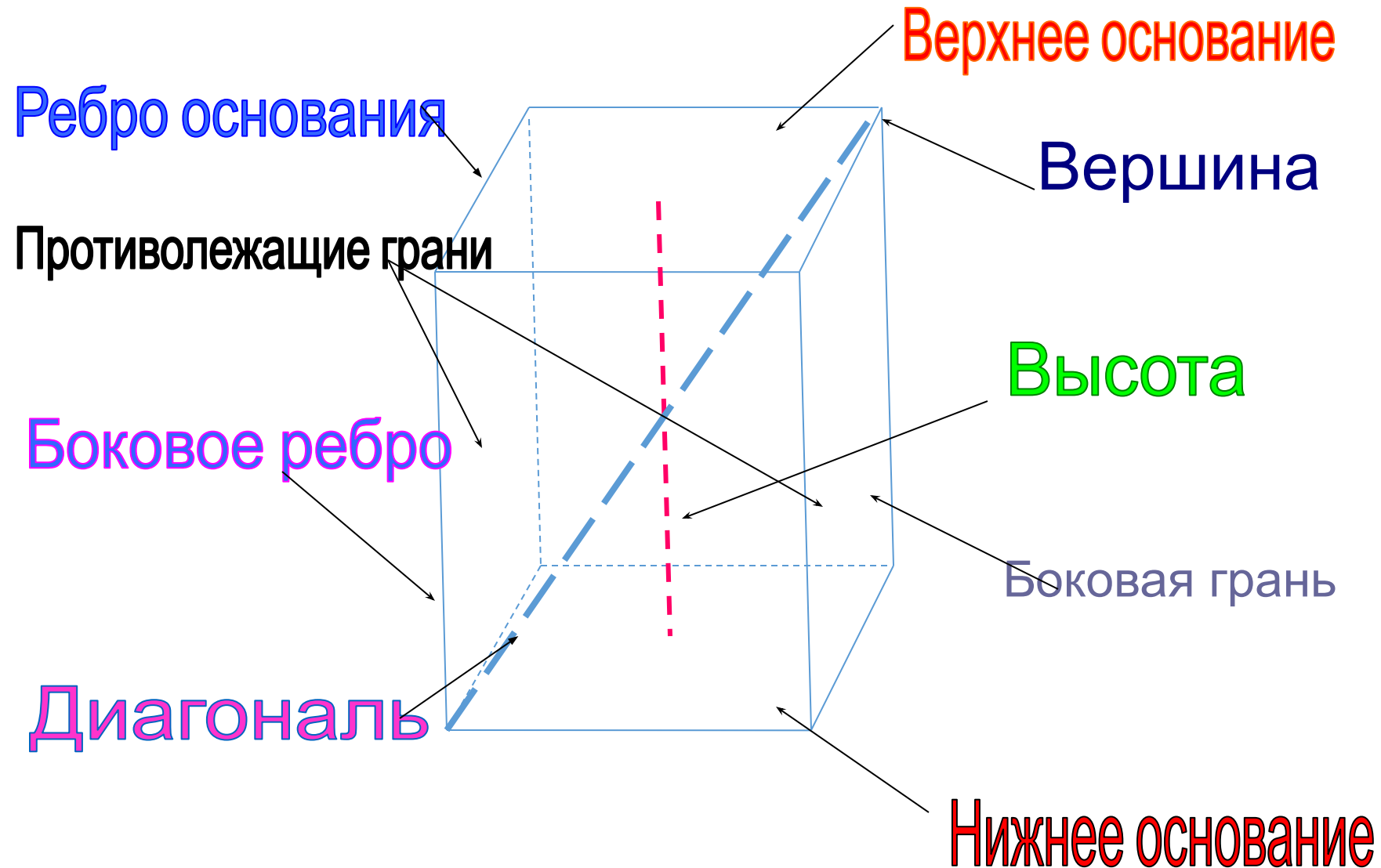
Полная поверхность

$$S_{\text{полн.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$$

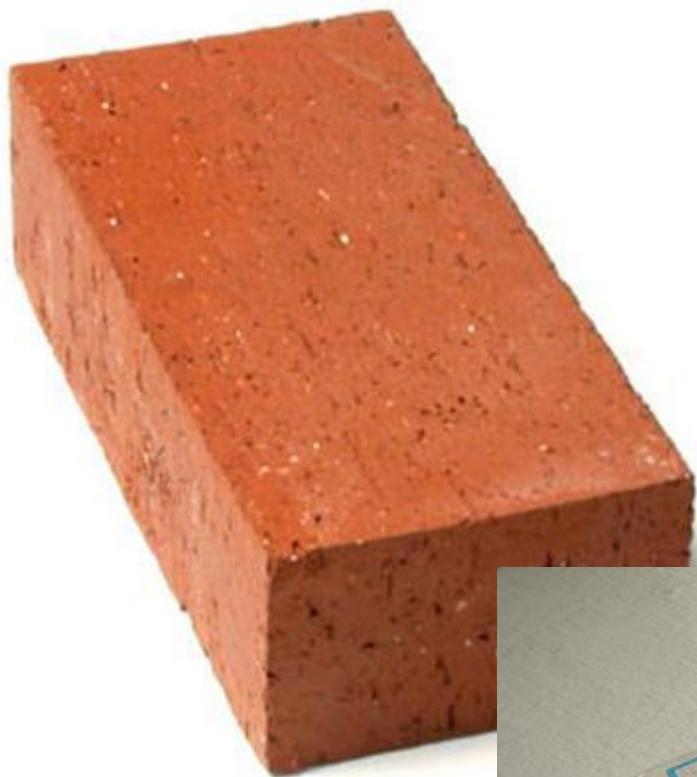
Объем прямого параллелепипеда

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$$

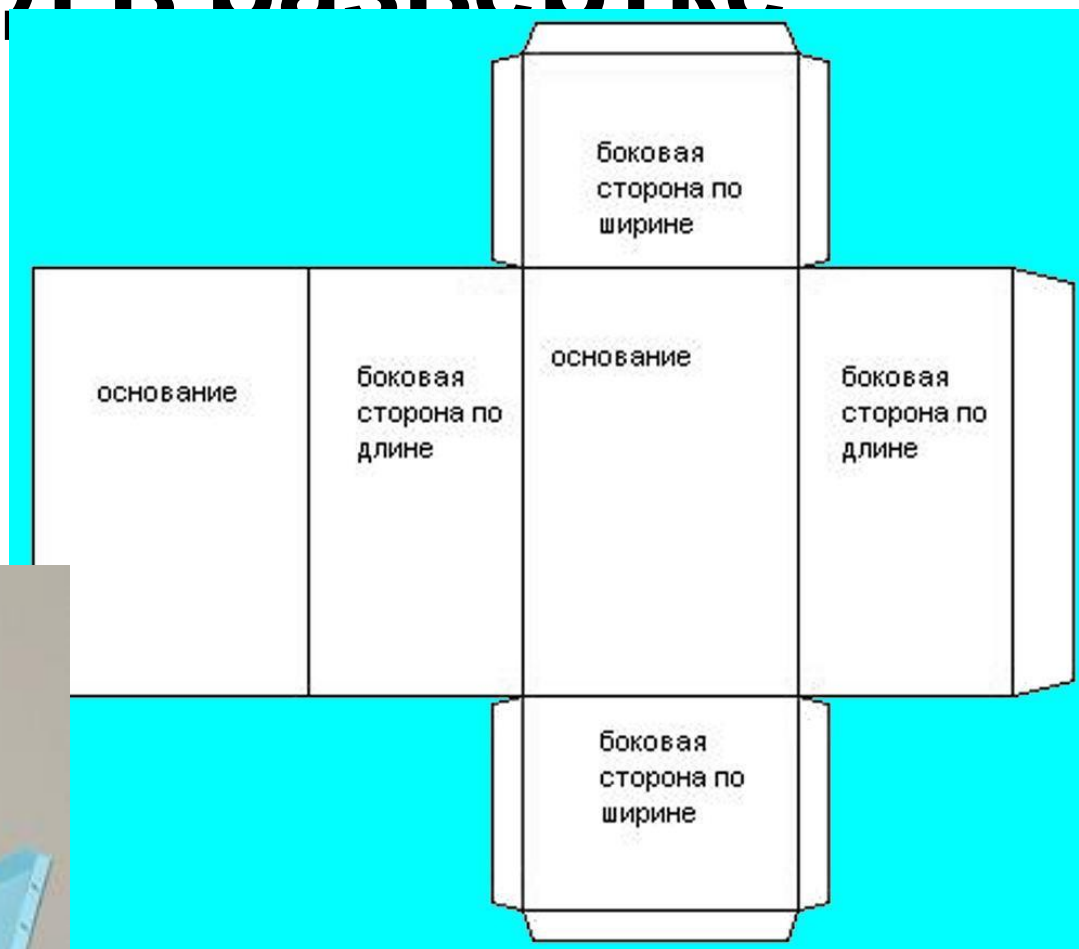
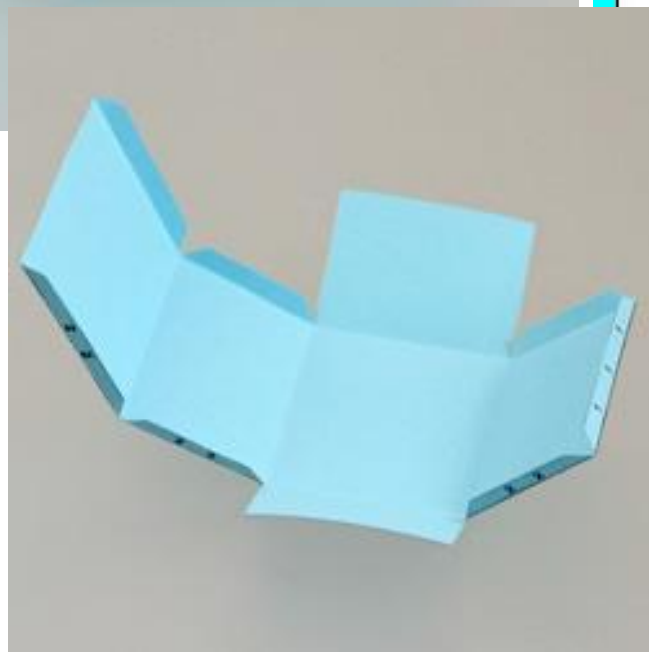
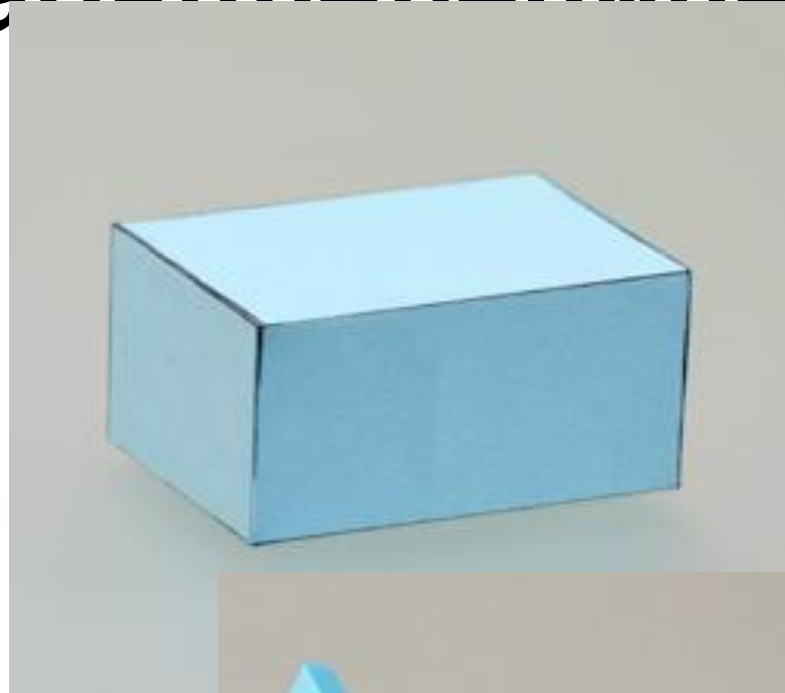
Основные элементы



Параллелепипед в жизни человека



Парапипед в развертке



Задача 1

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед

$AB = 12$ см, $BC = 5$ см

$\angle AC_1 A = 45^\circ$

Найти: BB_1

Решение:

1) $CC_1 \perp (ABC)$ и $AC \perp CC_1$

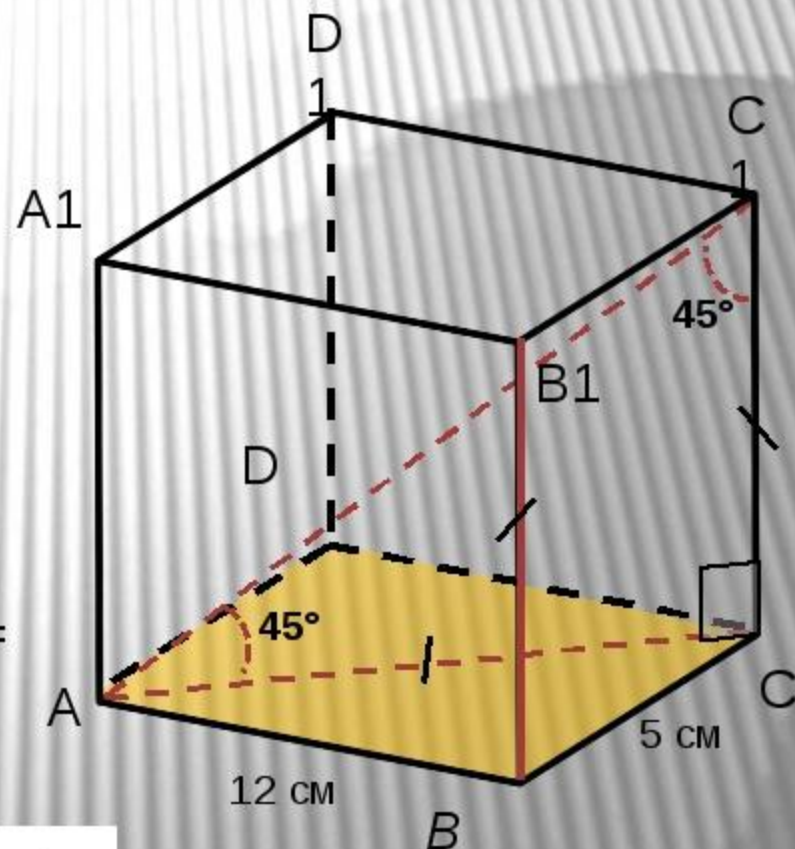
AC — проекция AC_1 на (ABC) и $\angle CAC_1 = 45^\circ$

2) $\angle CAC_1 = 90^\circ$, $\angle CAC_1 = 45^\circ$ и $\angle CC_1 A = 45^\circ$
 $\triangle ACC_1$ — прямоугол. и равноб. и $AC = CC_1$

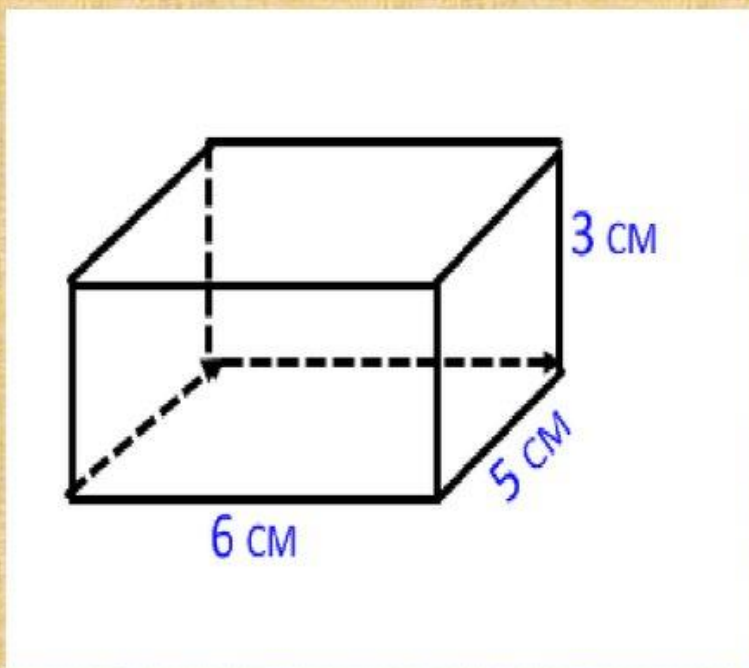
3) $CC_1 = BB_1 = AC$

$$\triangle ABC: AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (см)}$$

Ответ: $BB_1 = 13$ см



Решим задачу. Найти площадь поверхности параллелепипеда, если три его измерения: 6 см, 5 см, и 3 см.



Как найти площадь грани, на которой параллелепипед стоит? Сколько таких граней?

$$2S_1 = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60(\text{см}^2)$$

$$2S_2 = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36(\text{см}^2)$$

$$2S_3 = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30(\text{см}^2)$$

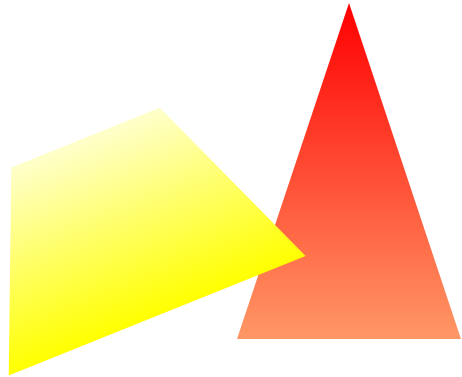
$$S_{\text{поверхности}} = 60 + 36 + 30 = 126(\text{см}^2)$$

Пирамида

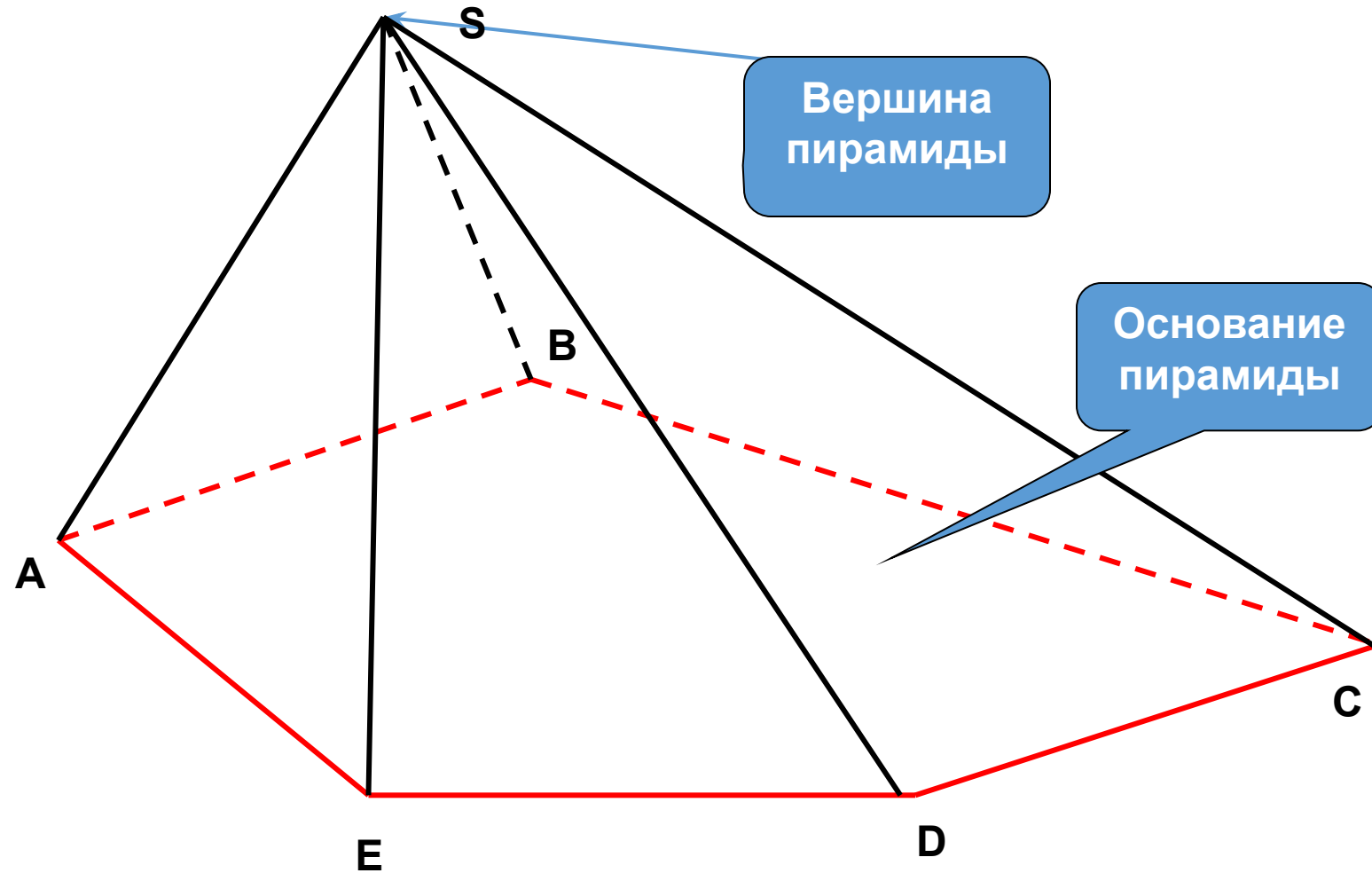
Её элементы.

Правильная
пирамида.

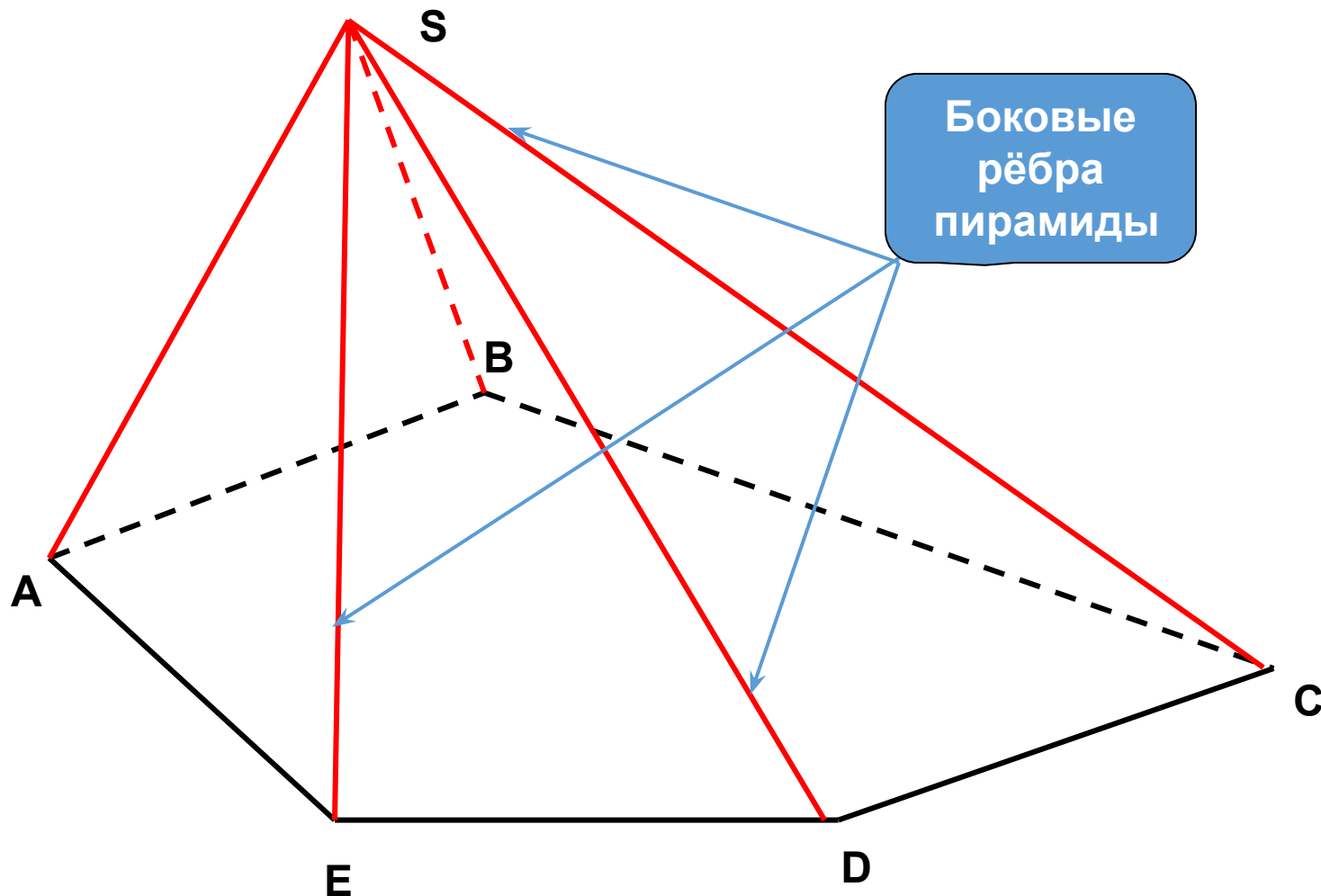
Усечённая пирамида



S – вершина пирамиды
ABCDE – основание пирамиды

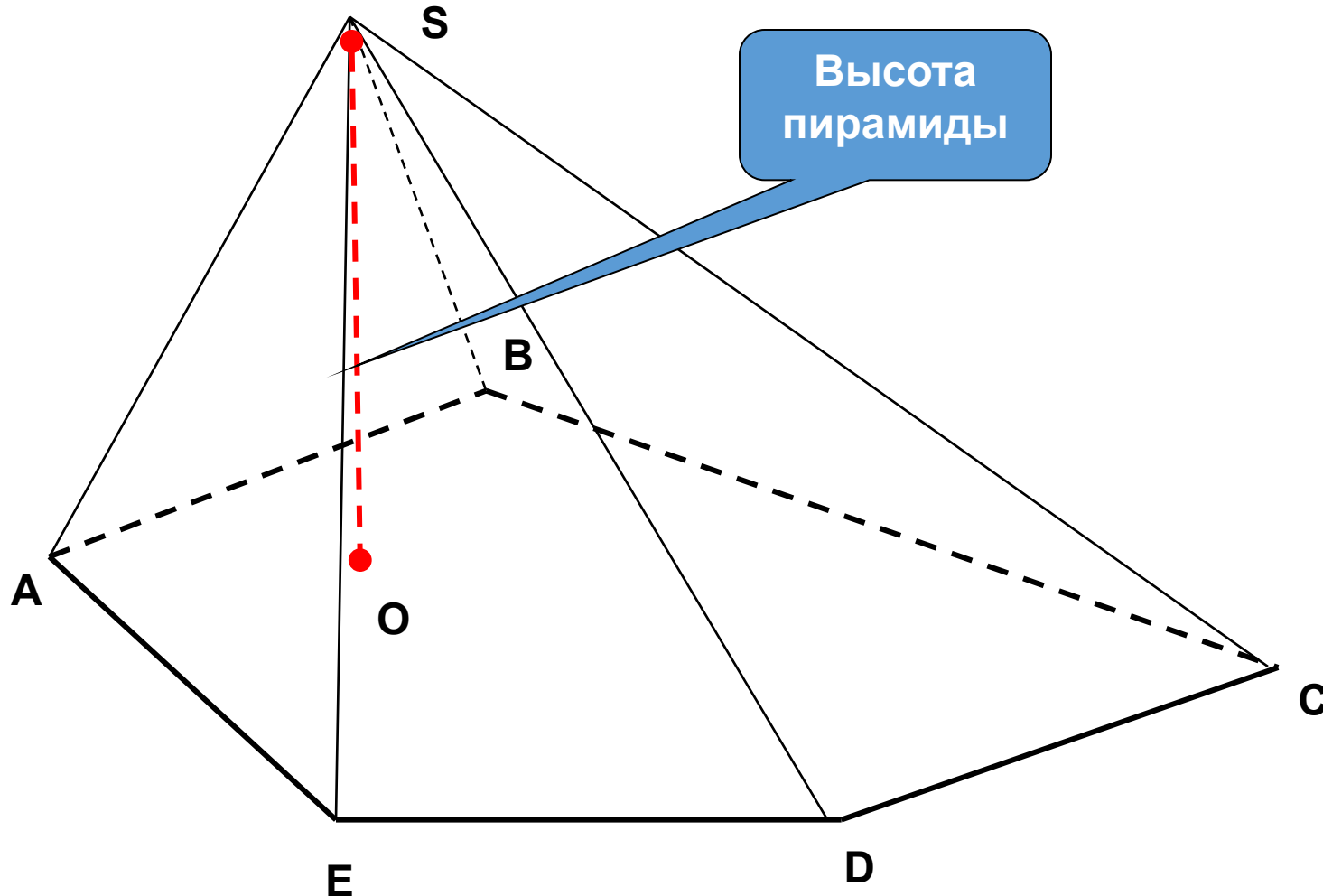


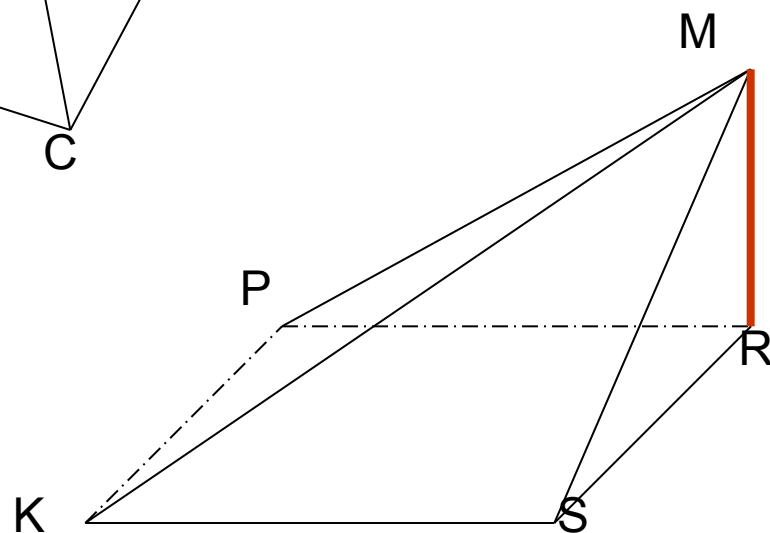
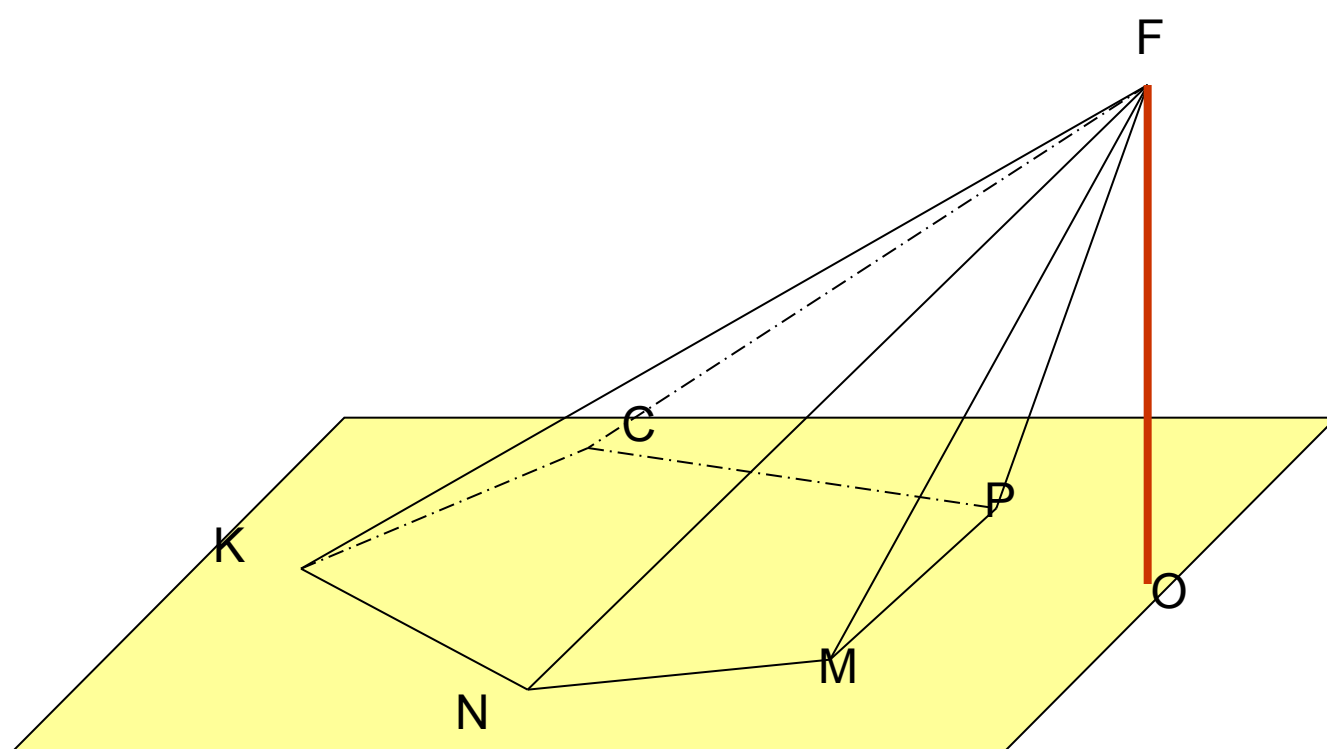
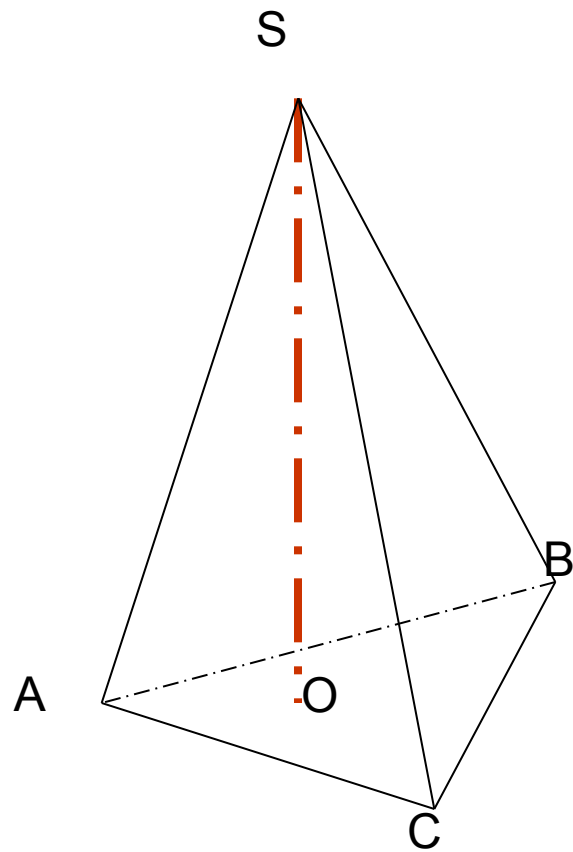
Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с
вершинами основания, называются
боковыми рёбрами
 SA, SB, SC, SD, SE - боковые рёбра пирамиды **$SABCDE$** .



Высотой пирамиды называется перпендикуляр,
опущенный из вершины пирамиды на плоскость
основания.

SO - высота пирамиды **$SABCDE$** .

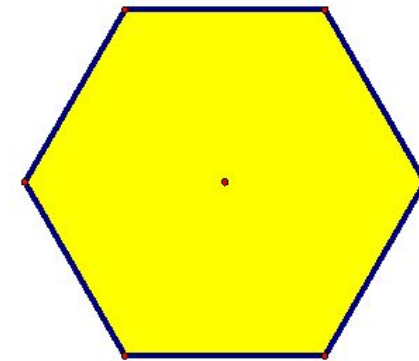
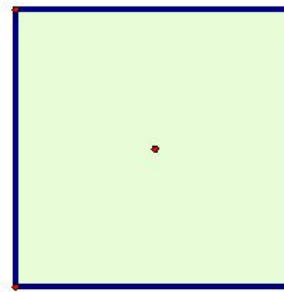
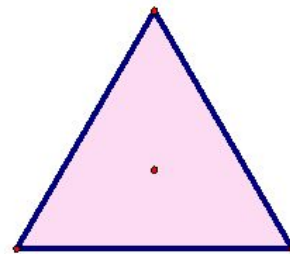
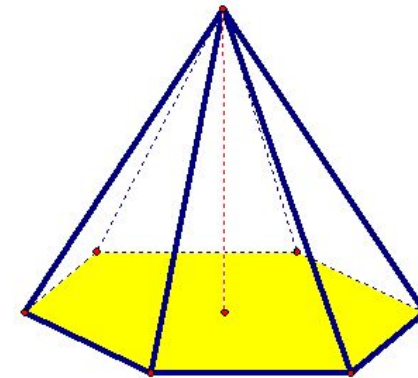
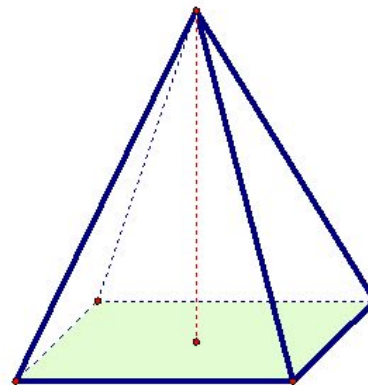
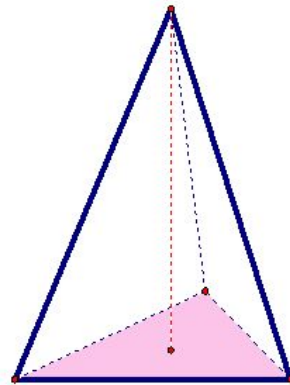




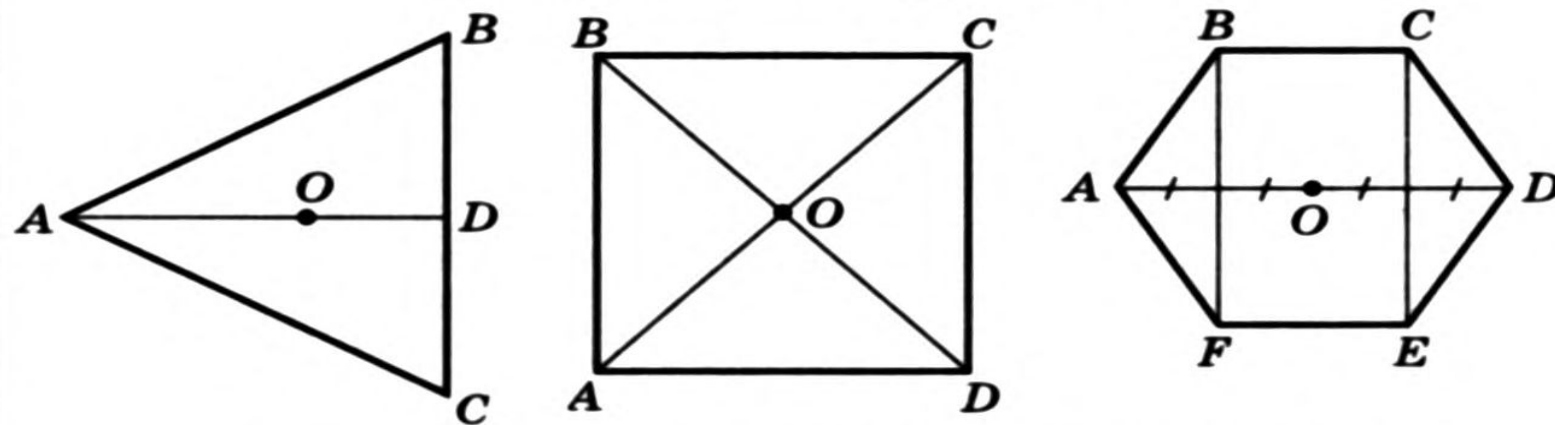
Высота –
перпендикуляр,
опущенный из
вершины
пирамиды на
плоскость
основания

Пирамида называется **правильной**, если её основанием является правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её высотой.

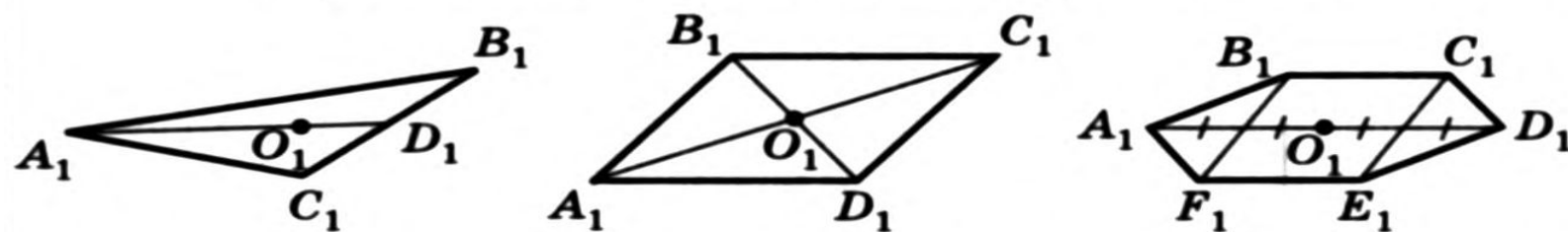
Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются **равнобедренными треугольниками**



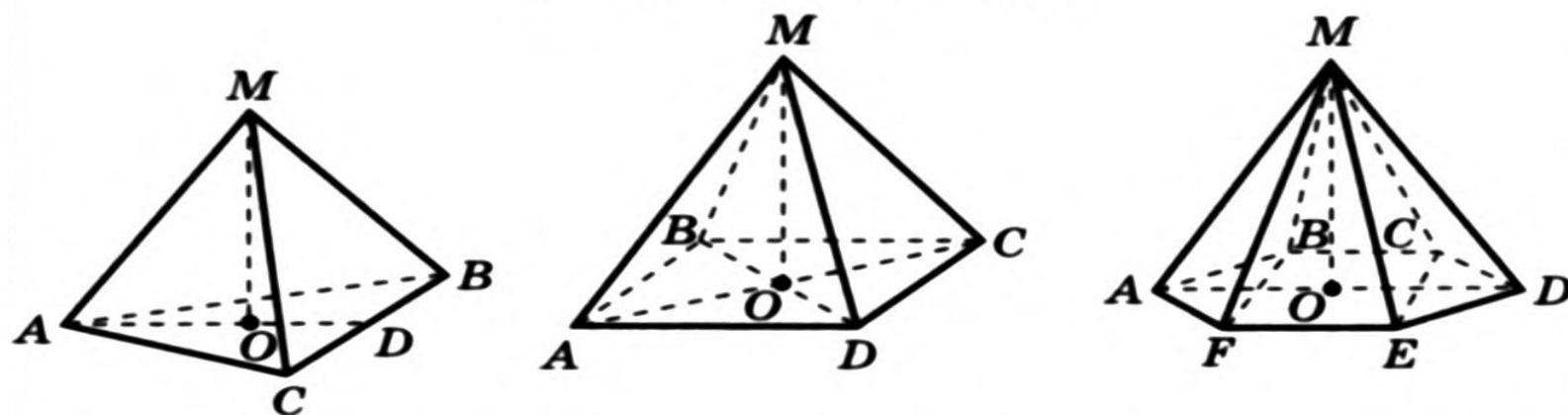
Правильные многоугольники



Параллельные проекции многоугольников

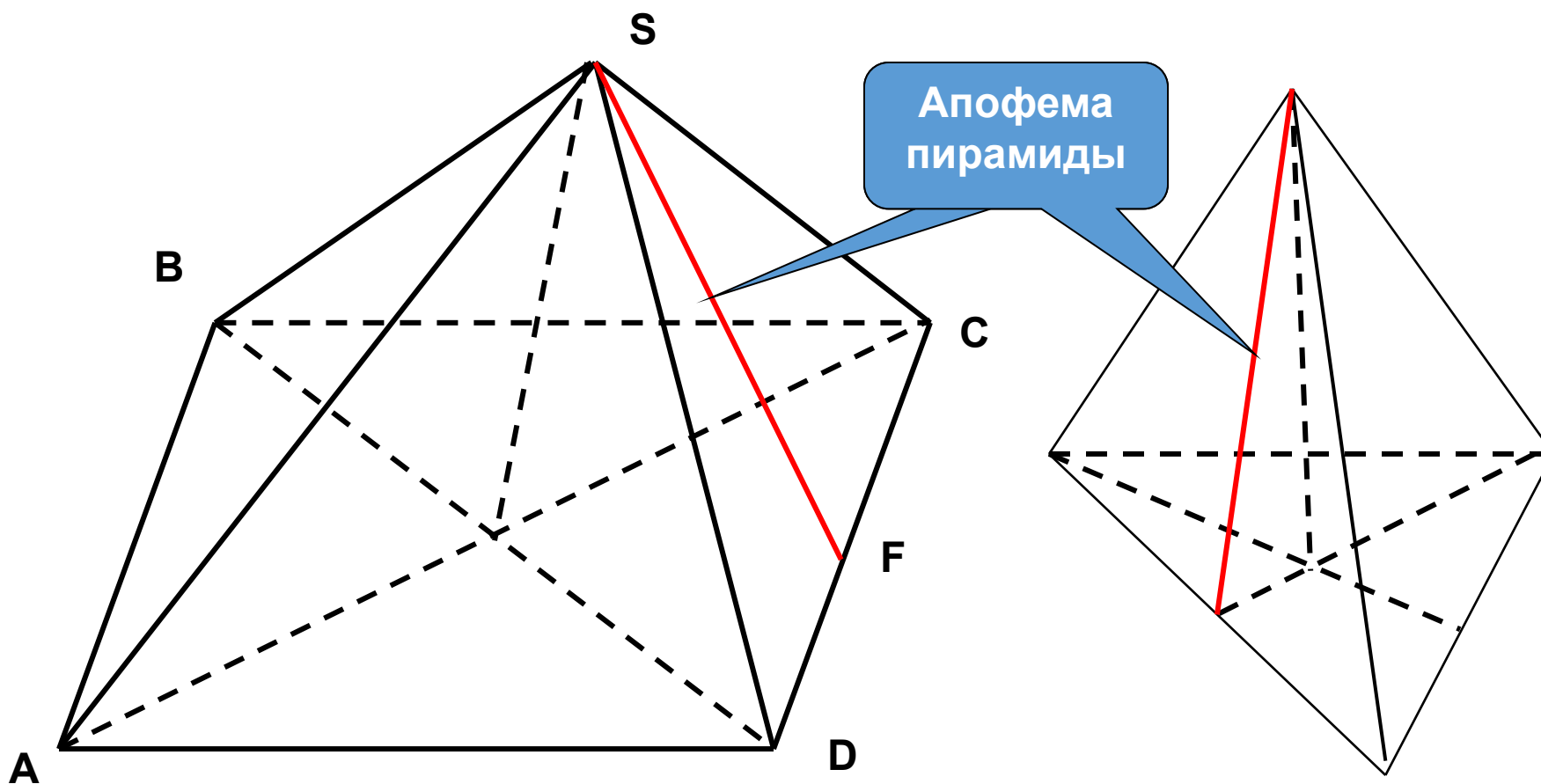


Правильные пирамиды

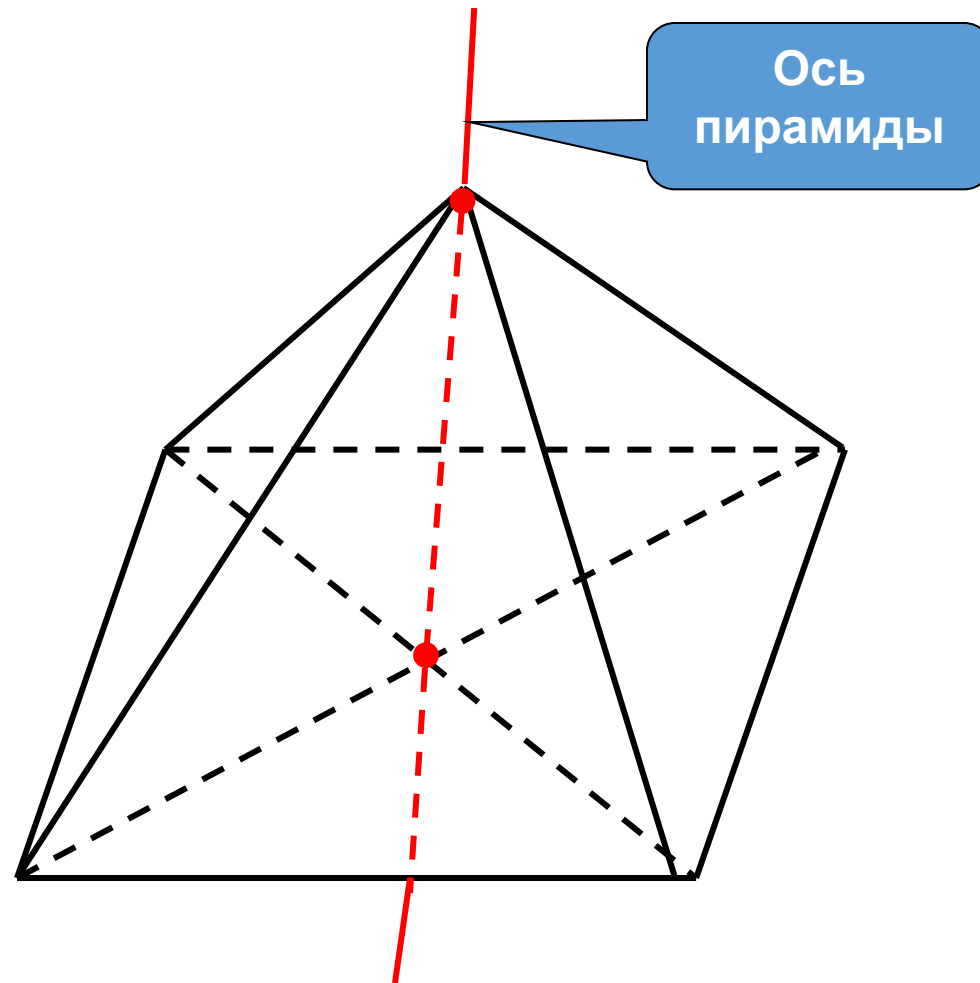


Высота боковой грани правильной пирамиды,
проведённая из её вершины, называется
апофемой.

SF – апофема пирамиды **$SABCD$** .



Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая её высоту.



Рассмотрим пирамиду $PA_1A_2\dots A_n$ и проведём секущую плоскость β , параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые рёбра в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$

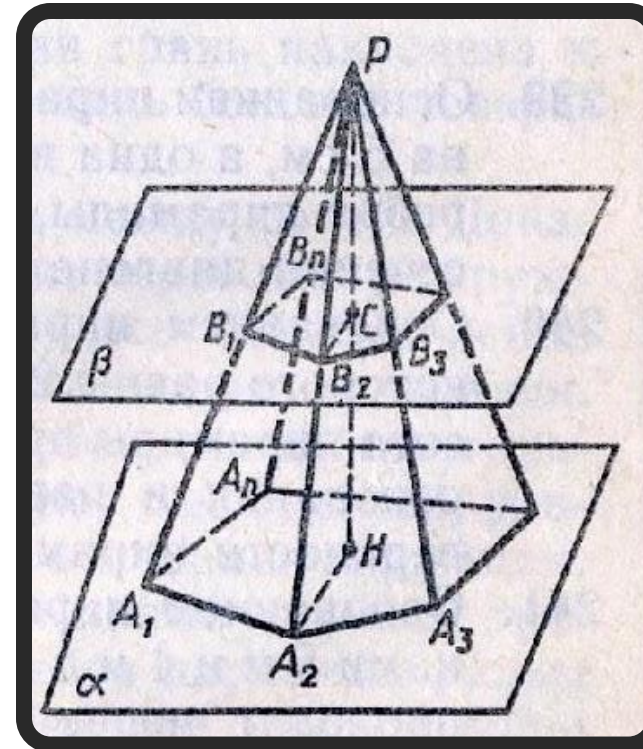
Плоскость β разбивает пирамиду на 2 многогранника

$A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$ – **усечённая пирамида**

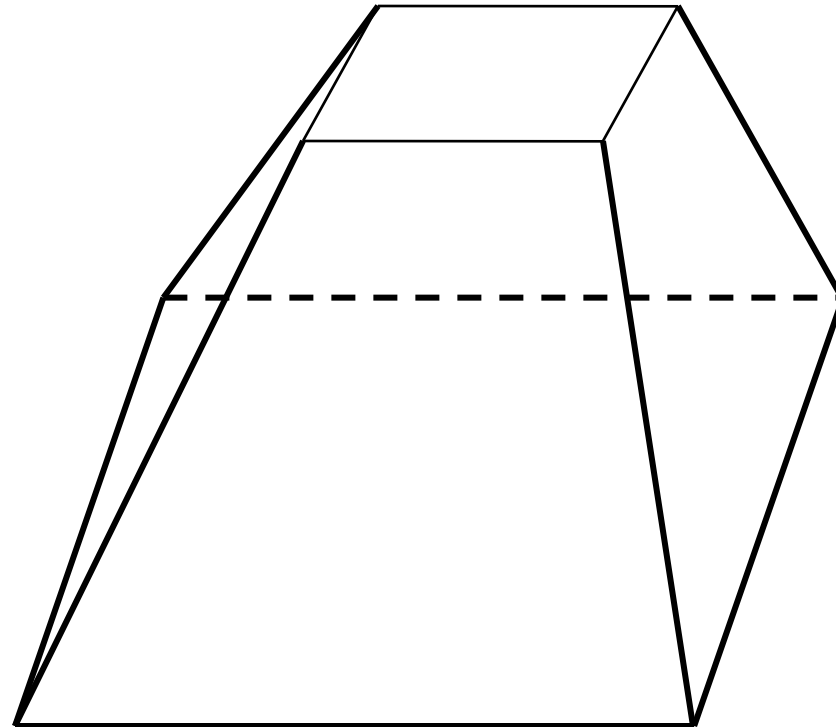
$A_1B_1, \dots, A_nB_n$ – **боковые рёбра**

$A_1B_1B_2A_2\dots$ – **боковые грани**

$A_1A_2\dots A_n, B_1B_2\dots B_n$ – **основания усечённой пирамиды**



*Усечённая пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.*



Боковой поверхностью пирамиды
называется сумма площадей её
боковых граней.

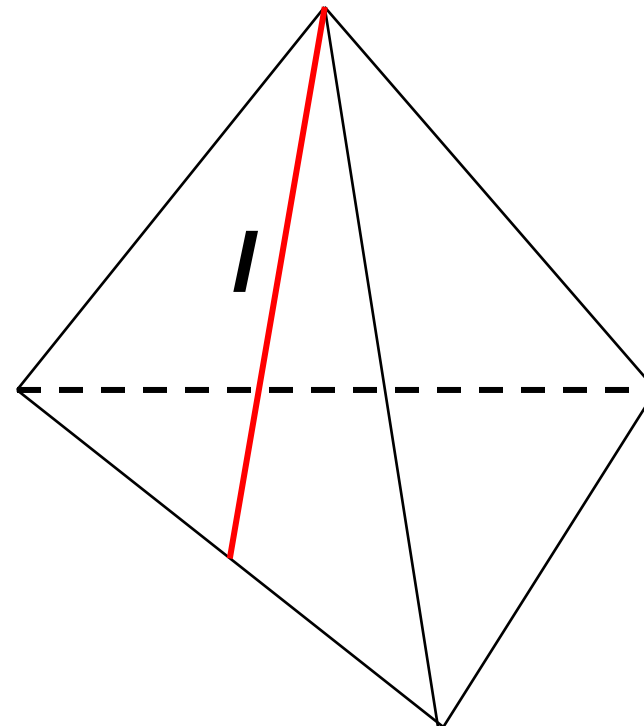
Площадь полной поверхности пирамиды
равна сумме площади боковой поверхности
и площади основания:

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

**Площадь боковой поверхности
правильной пирамиды равна
произведению полупериметра основания
на апофему:**

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} Pl$$

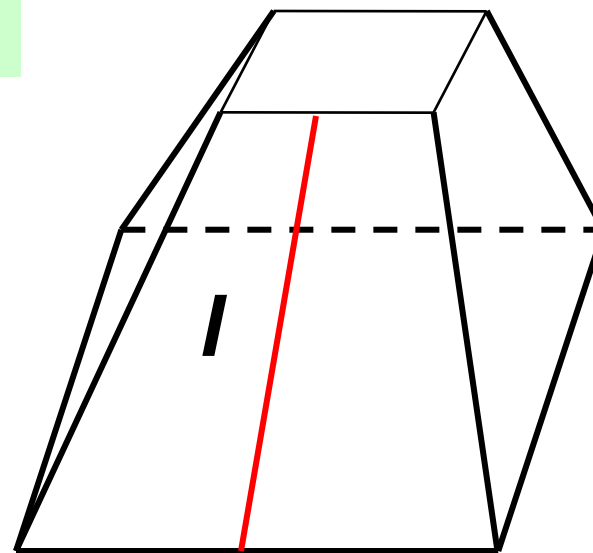
**p – периметр основания
 l – апофема пирамиды**



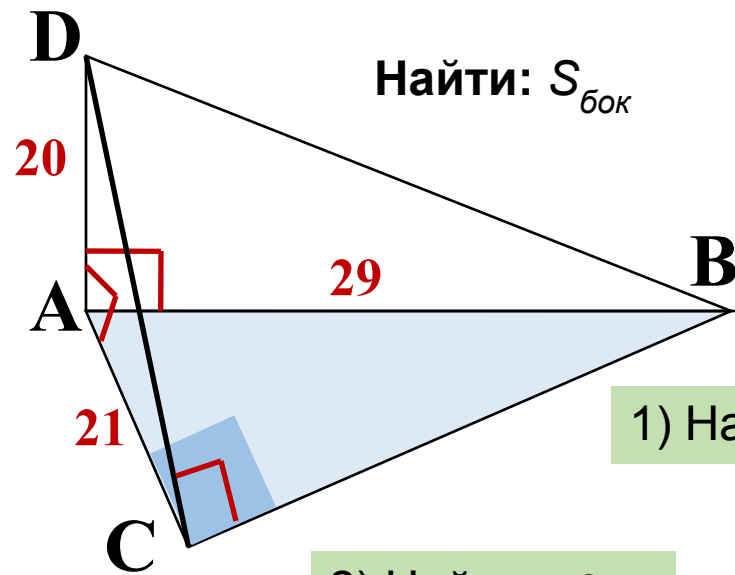
Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) l$$

p_1 и p_2 – периметры оснований
 l – апофема пирамиды



Задача № 244. Основанием пирамиды DABC является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AB=29 см, а катет AC=21 см. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Найти: $S_{бок}$

Решение: $S_{бок} = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{CDB}$

Треугольники ADC, ADB, DCB – прямоугольные

$$DC = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29 \text{ см}$$

$$BC = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20 \text{ см}$$

1) Найдем S_{ADC}

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 \text{ см}^2$$

2) Найдем S_{ADB}

$$S_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 29 = 290 \text{ см}^2$$

3) Найдем S_{CDB}

$$S_{CDB} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 20 = 290 \text{ см}^2$$

4) Найдем площадь боковой поверхности пирамиды

$$S_{бок} = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{CDB} = 210 + 290 + 290 = 790 \text{ см}^2$$

Задача №259. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60 градусам. Найдите боковое ребро пирамиды.

Найти: MC – ?

Решение: 1) Т.к. дана прав. четырёхугол. пирамида, то в основании лежит квадрат со стороной 6 см.

2) Угол $\angle MKO = 60^\circ$ и треугольник $МОК$ –прямоугольный

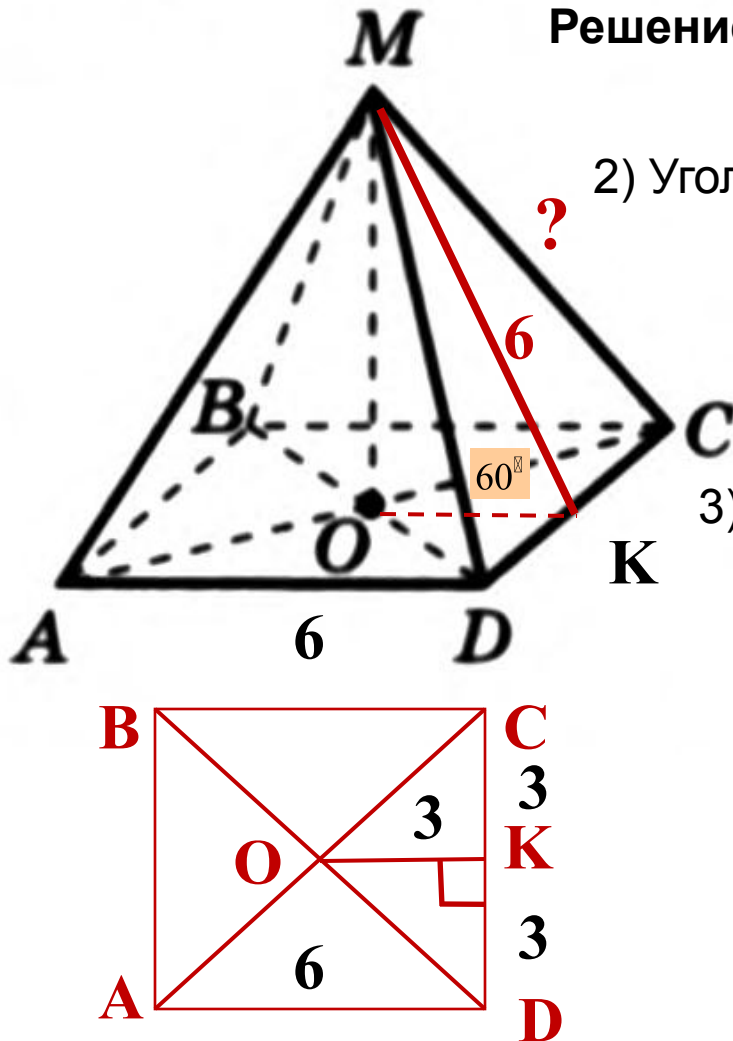
$$\cos 60^\circ = \frac{OK}{MK} \Rightarrow MK = \frac{3}{\cos 60^\circ} = 6 \text{ см}$$

3) Рассмотрим треугольник $МСК$ – прямоугольный: по т. Пифагора найдем MC

$$MC^2 = MK^2 + KC^2$$

$$MC^2 = 6^2 + 3^2$$

$$MC = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ см}$$

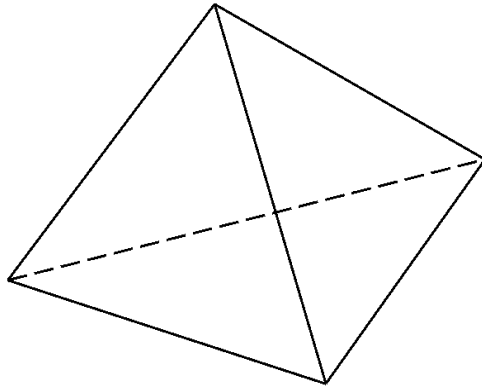


Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

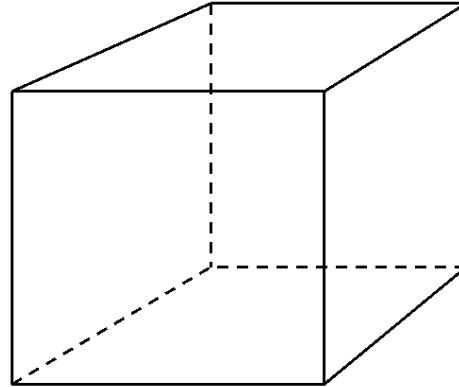
Существует **пять** типов правильных выпуклых

многогранников:

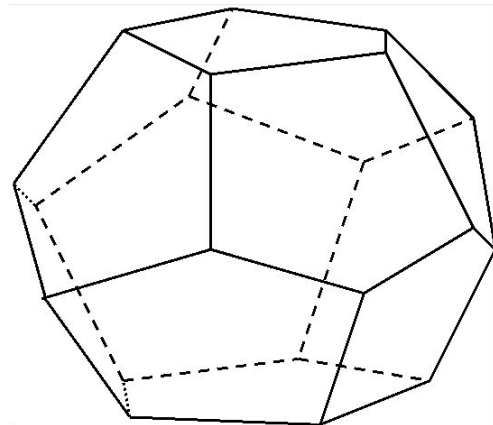
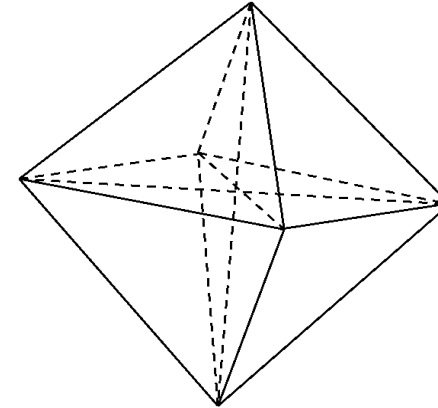
Тетраэдр



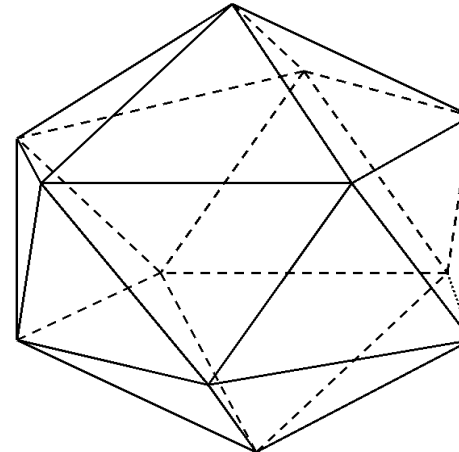
Куб (гексаэдр)



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Не существует
правильного
многогранника, гранями
которого являются
правильные
шестиугольники,
семиугольники и вообще
 n -угольники при $n \geq 6$.

Доказательство:

Угол правильного n -угольника при $n \geq 6$ не меньше 120 градусов.

С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трёх плоских углов.

Доказательство:

Значит, если бы существовал правильный многогранник, у которого грани – правильные n -угольники при $n \geq 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не менее чем $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$.

Доказательство:

Но это невозможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360 градусов.

Названия правильных многогранников пришли из Греции. Этим красивым телам посвящена 13-я книга 'Начал' Евклида. Их еще называют **Платоновыми телами**, т.к. они занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания.

Платон считал, что мир строится из **четырёх «СТИХИЙ»** – огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих «СТИХИЙ» имеют форму четырёх правильных многогранников.

Тетраэдр олицетворял **огонь**,
поскольку его вершина устремлена
вверх, как у разгоревшегося
пламени.

Икосаэдр - как самый обтекаемый
- **воду**.

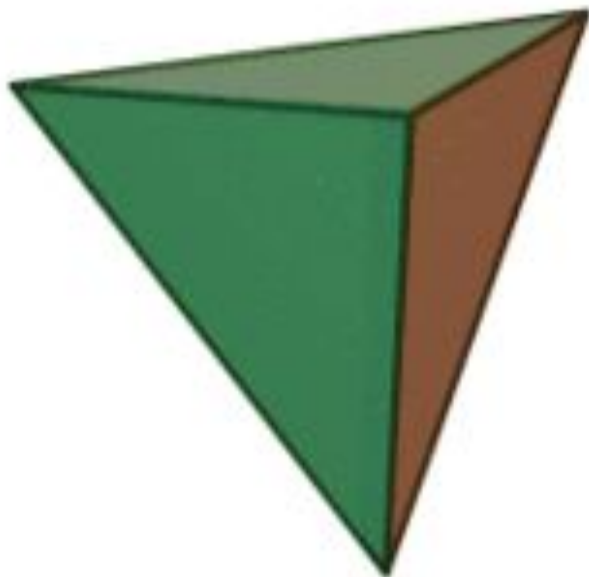
Куб - самая устойчивая из фигур -
землю.

Октаэдр - **воздух**.

В наше время эту систему можно
сравнить с четырьмя
состояниями вещества –
твёрдым, жидким, газообразным и
пламенным.

Пятый многогранник – **додекаэдр**
символизировал весь мир и
почитался главнейшим.

Это была одна из первых попыток
ввести их систематизацию.



Регулярный *тетраэдр*

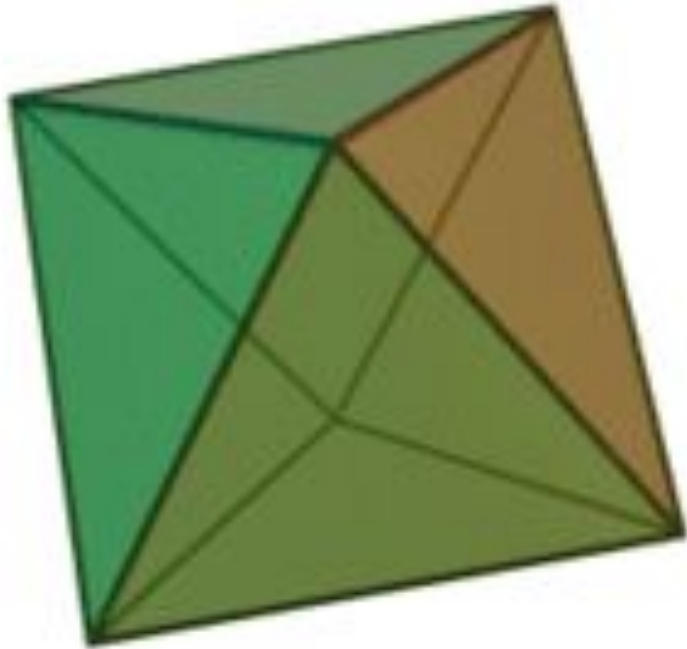
- это правильная
угловая пирамида, у
которой все грани
являются
равносторонними
треугольниками.

Следовательно, **сумма**
плоских углов при
каждой вершине равна
 180° .

Куб составлен из
шести квадратов.
Каждая вершина куб
является вершиной
трех квадратов.



**Следовательно,
сумма плоских углов
при каждой вершине
равна 270° .**



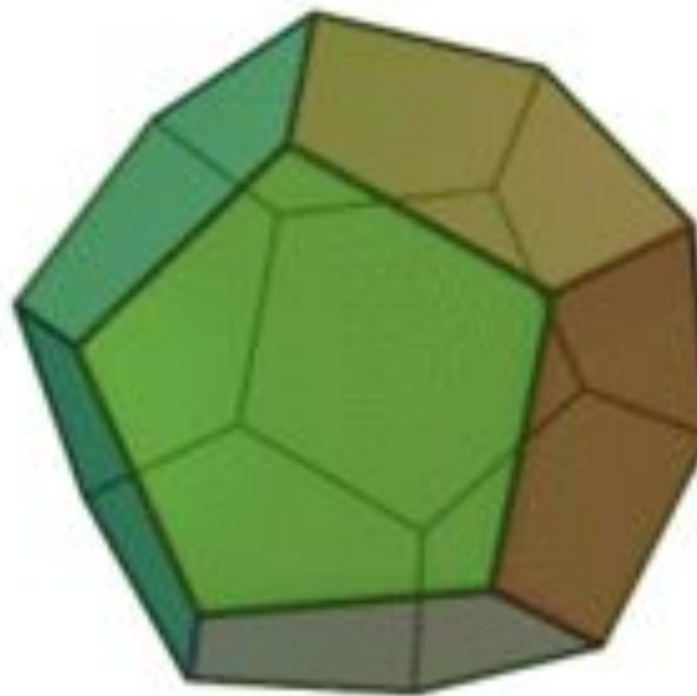
Регулярный октаэдр
состоит из восьми
равносторонних
треугольников.

Каждая вершина
октаэдра является
вершиной четырех
треугольников.

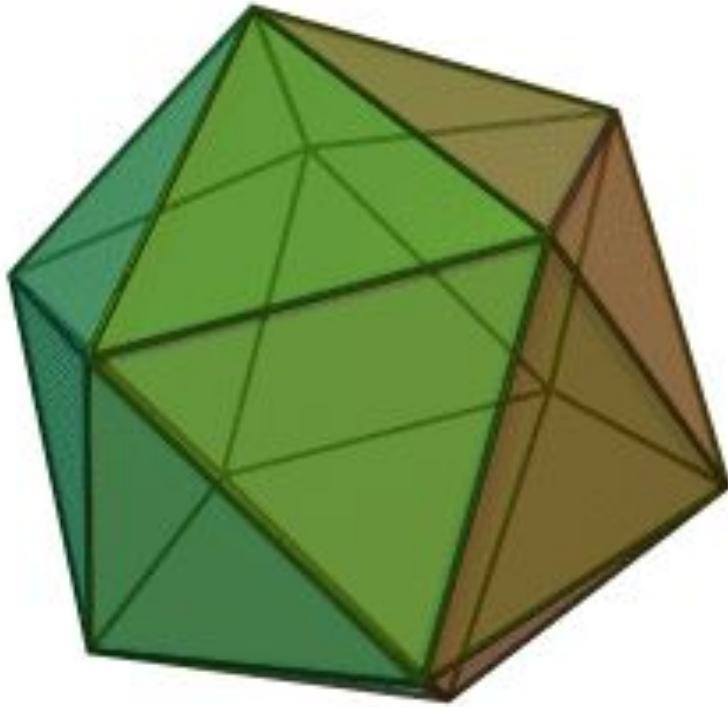
Следовательно,
сумма плоских углов
при каждой вершине
равна 240° .

**Правильный
додекаэдр** составлен
из двенадцати
правильных
пятиугольников.

Каждая вершина
додекаэдра является
вершиной трех
правильных
пятиугольников.



Следовательно,
сумма плоских углов
при каждой вершине
равна 324° .



Регулярный икосаэдр
составлен из двадцати
равносторонних
треугольников.

Каждая вершина
икосаэдра является
вершиной пяти
треугольников.

Следовательно, сумма
плоских углов при
каждой вершине равна
 300° .

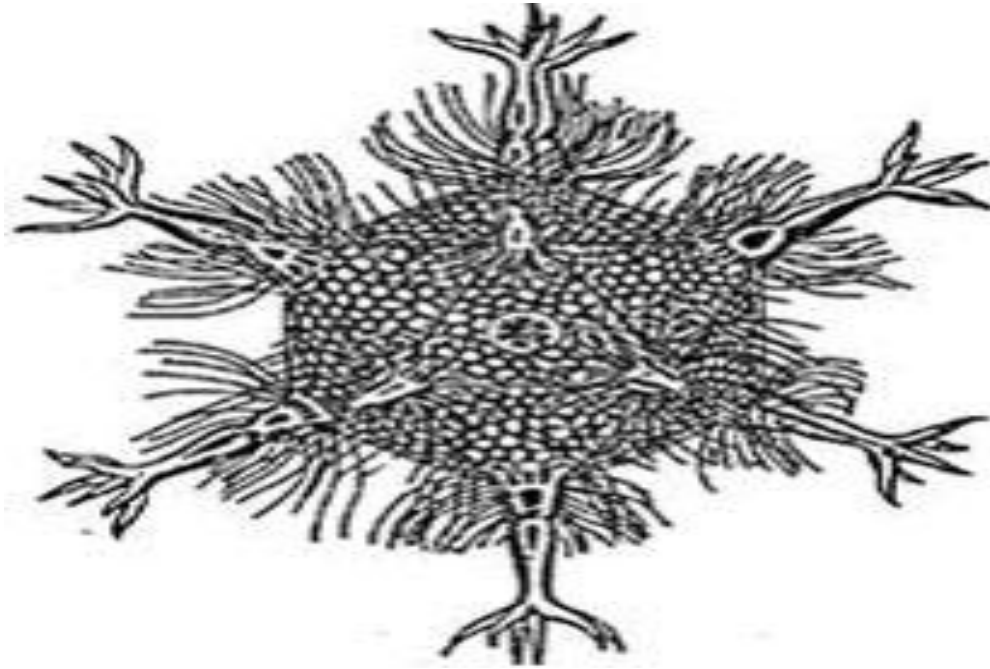
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ В ПРИРОДЕ



**Поваренная соль состоит
из кристаллов в форме
куба**



**Минерал сильвин также
имеет кристаллическую
решетку в форме куба.**



**Скелет одноклеточного
организма феодарии
представляет собой
икосаэдр.**



**Кристаллы пирита
имеют форму
додекаэдра.**



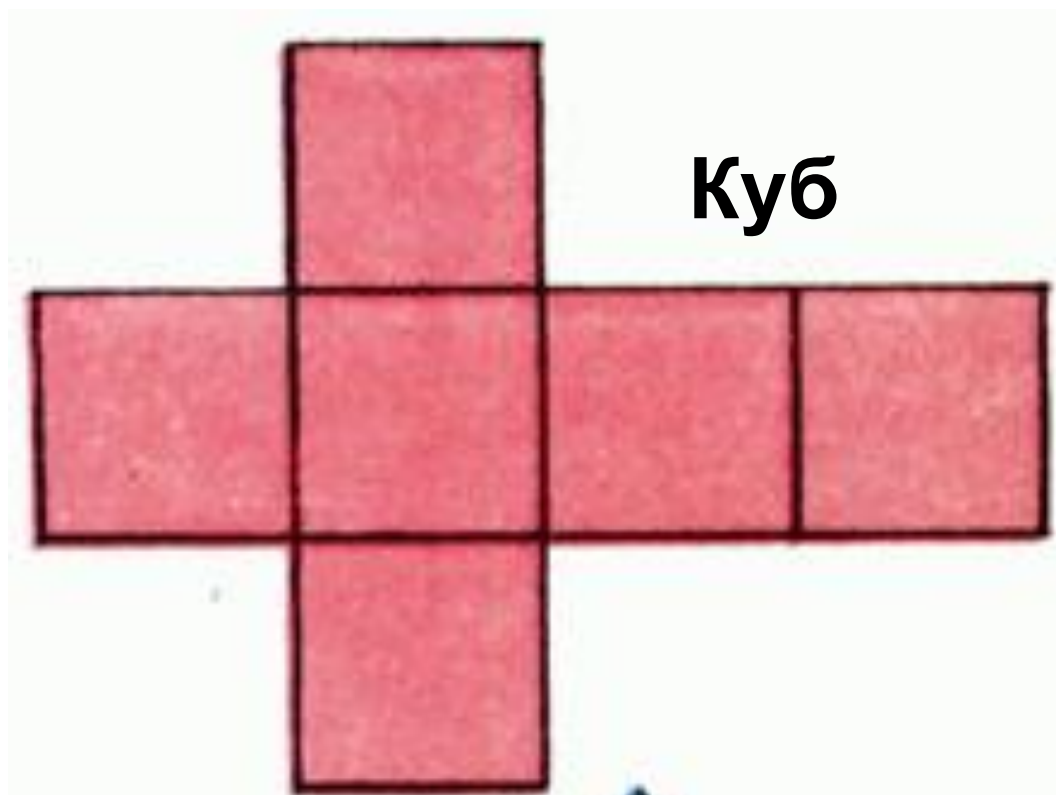
**Минерал куприт
образует кристаллы в
форме октаэдров**



**Молекулы воды имеют
форму тетраэдра**

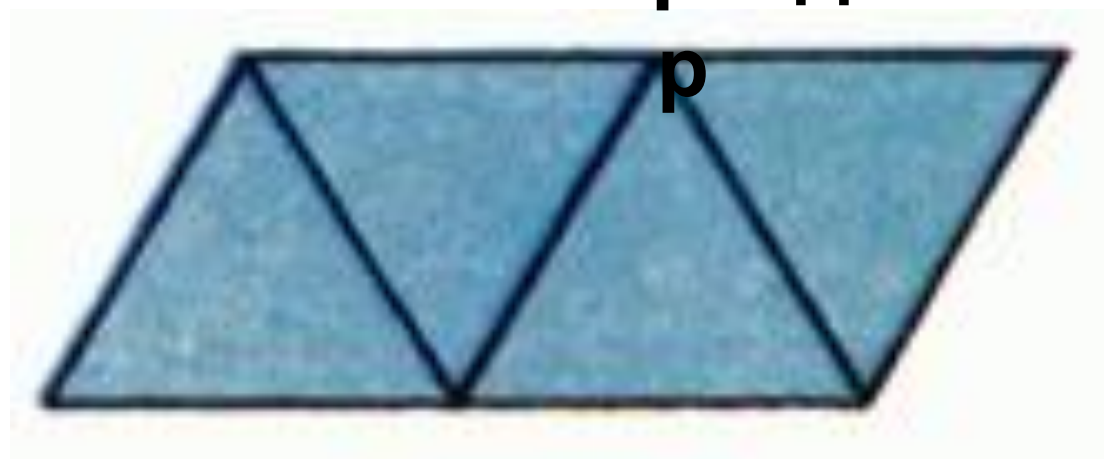
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

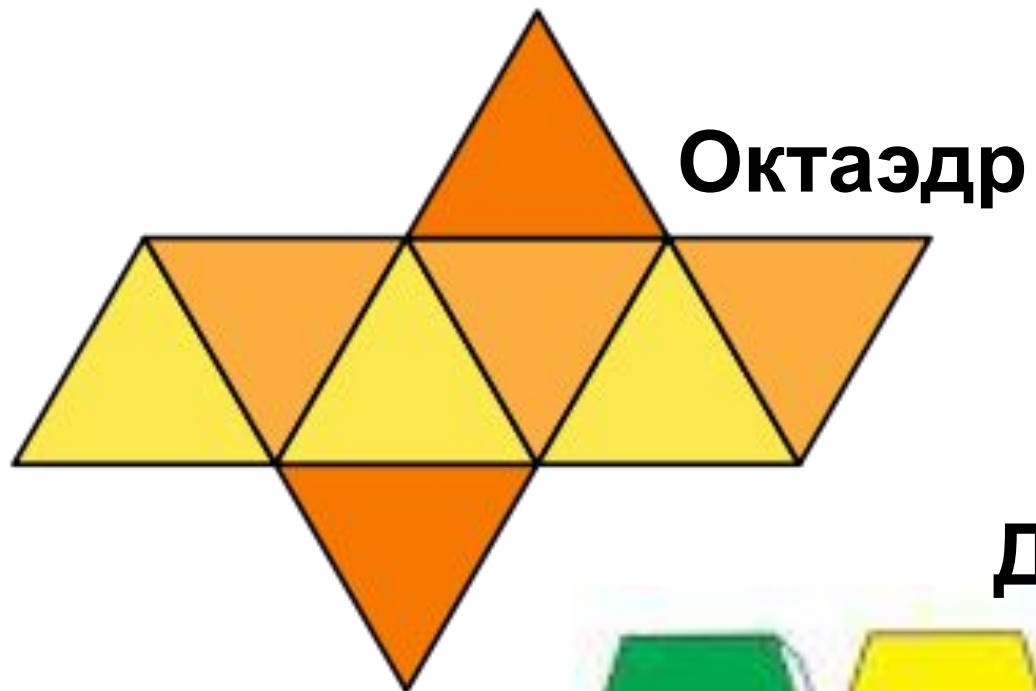
Задание: Перерисуйте
развертки правильных
многогранников на плотные
листы бумаги в большем
масштабе, вырежьте
развертки (сделав
необходимые припуски для
склеивания) и склейте из них
многогранники.



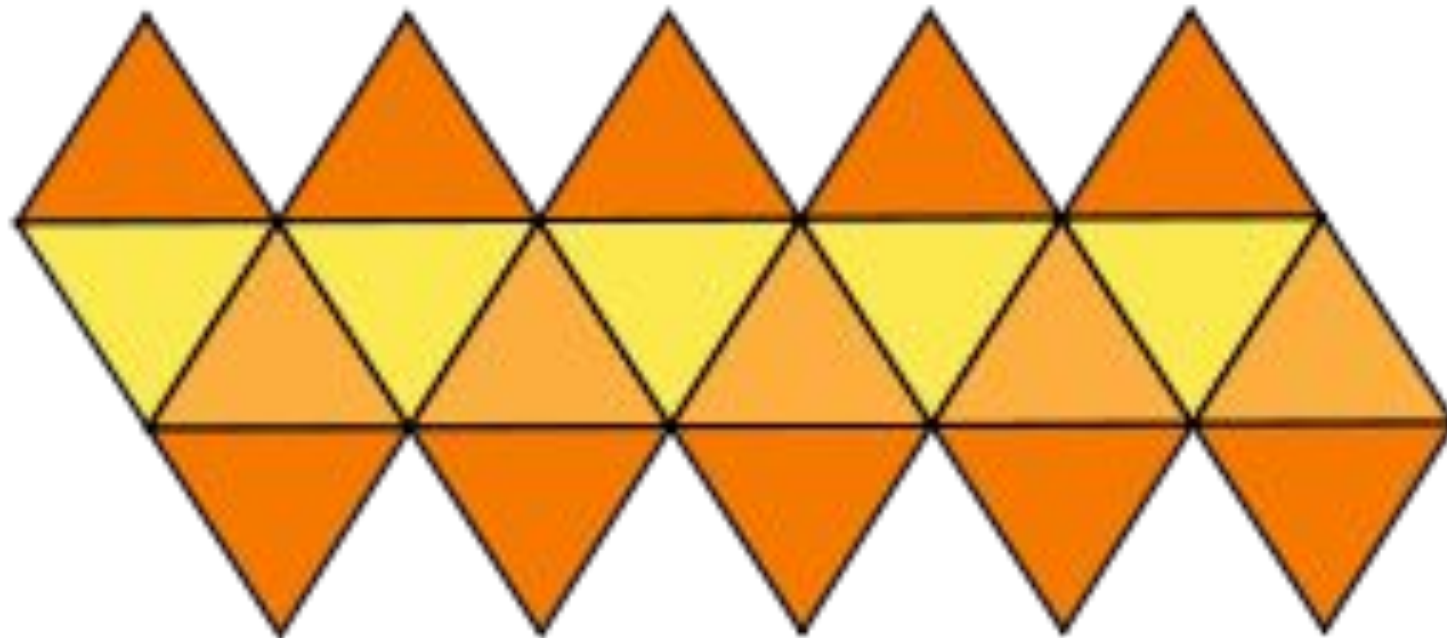
Куб

Тетраэдр

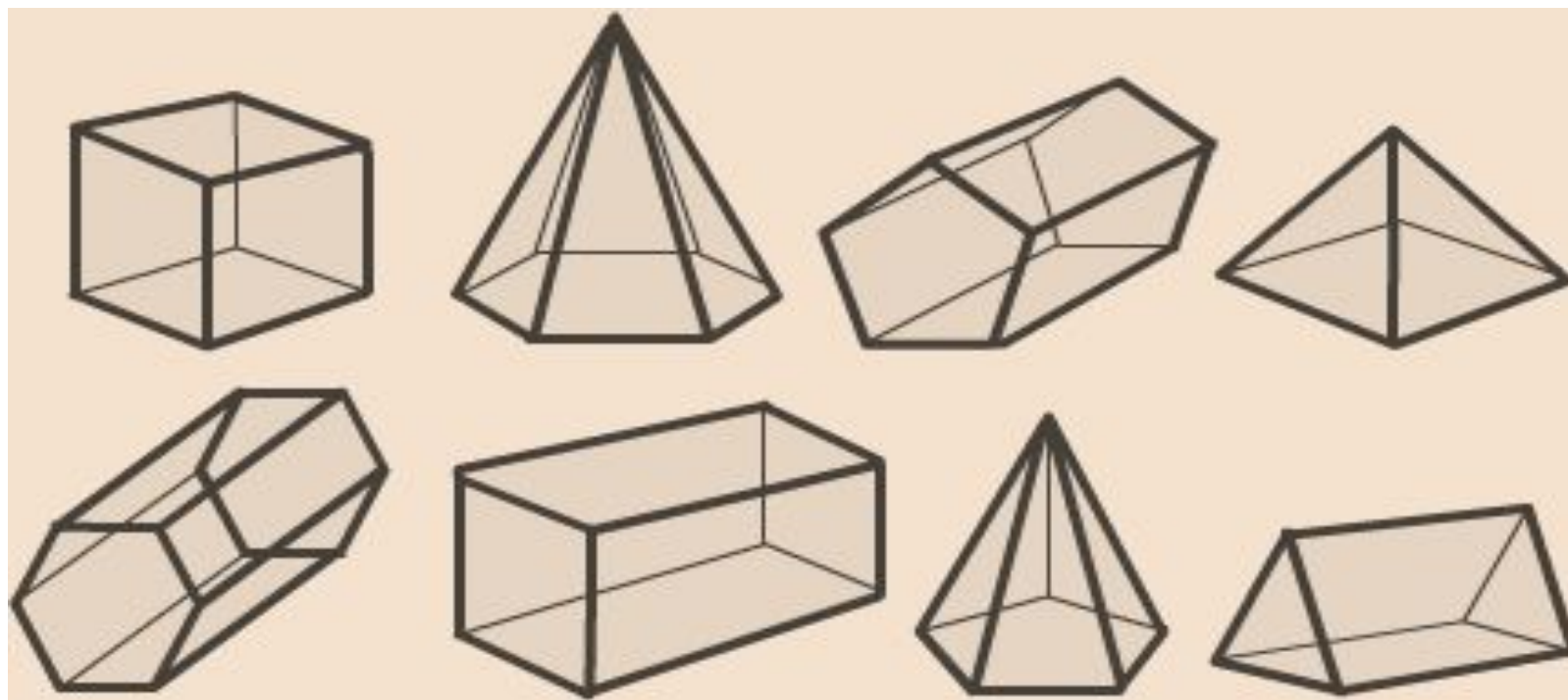




Икосаэд р



Сечения куба, призмы и пирамиды



Понятие сечения

Секущая плоскость тетраэдра (параллелепипеда) любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением тетраэдра (параллелепипеда)**.

Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники (рис. 1 и 2) и четырёхугольники (рис. 3 и 4). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники (рис. 5), четырёхугольники (рис. 6 и 7), пятиугольники (рис. 8) и шестиугольники (рис. 9).

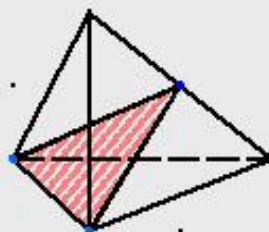


Рис. 1

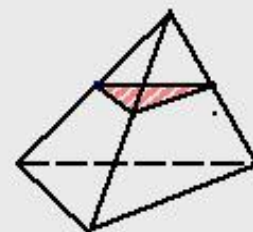


Рис. 2

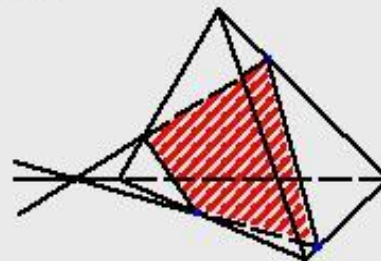


Рис. 3

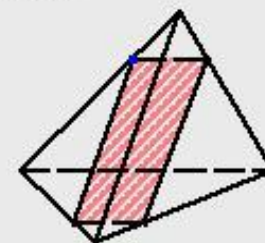


Рис. 4

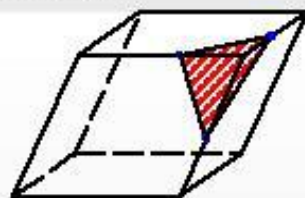


Рис. 5

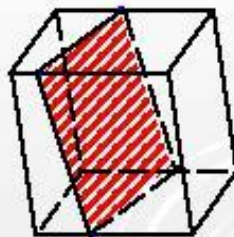


Рис. 6

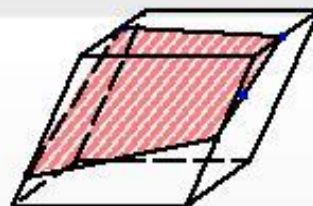


Рис. 7

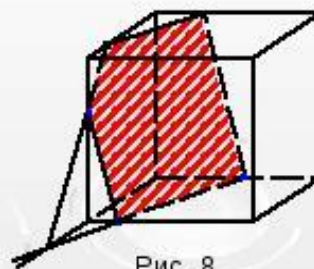


Рис. 8

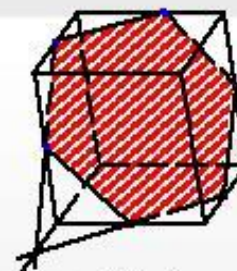


Рис. 9

Содержанием работы является построение сечений по точкам, заданным на рёбрах многогранников:

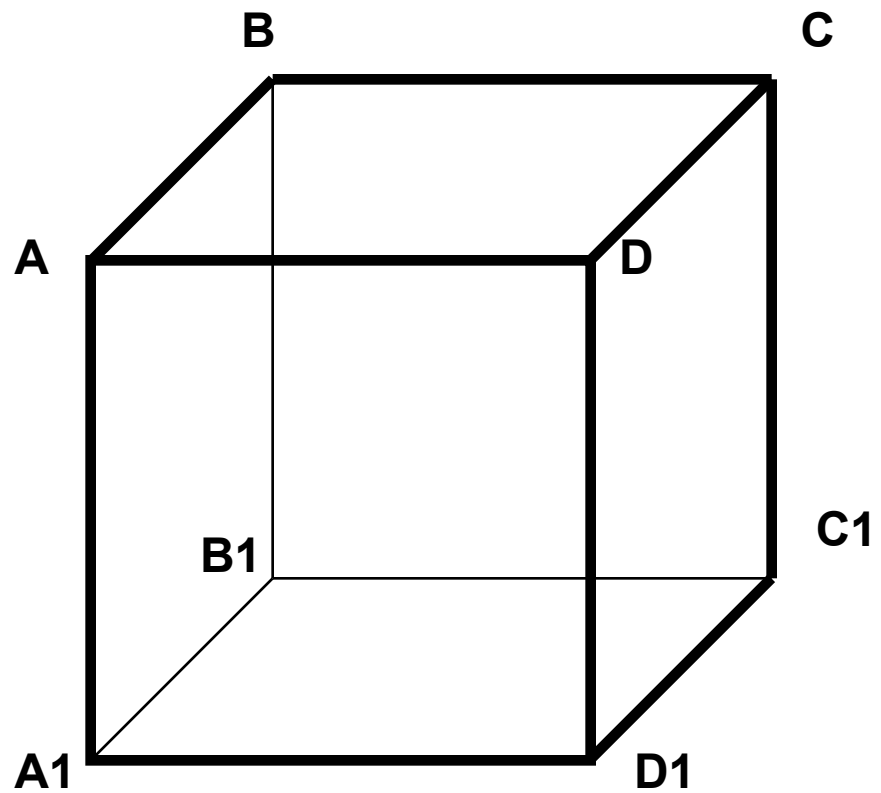
1. Куба

2. Пирамиды

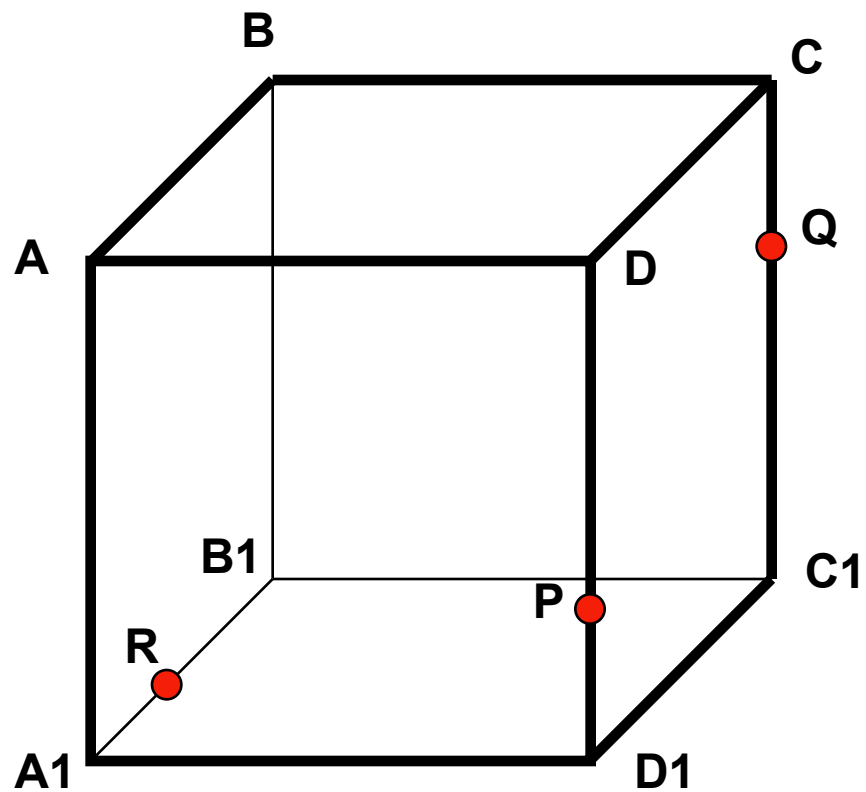
3. Призмы

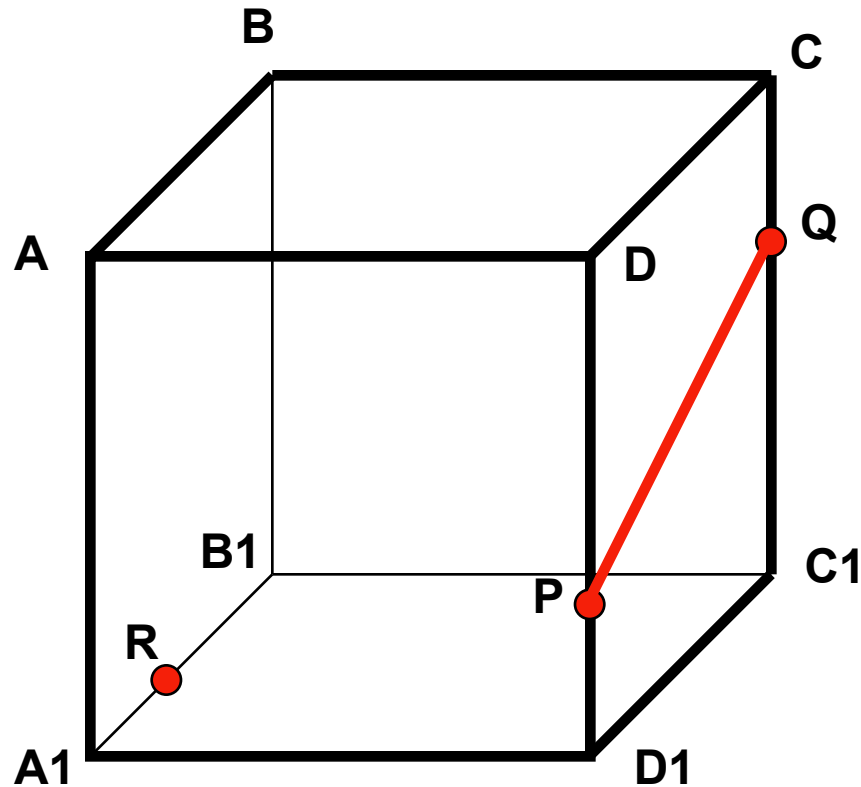


Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$



На гранях куба заданы точки R, P, Q. Требуется построить сечение куба плоскостью, проходящей через заданные точки.

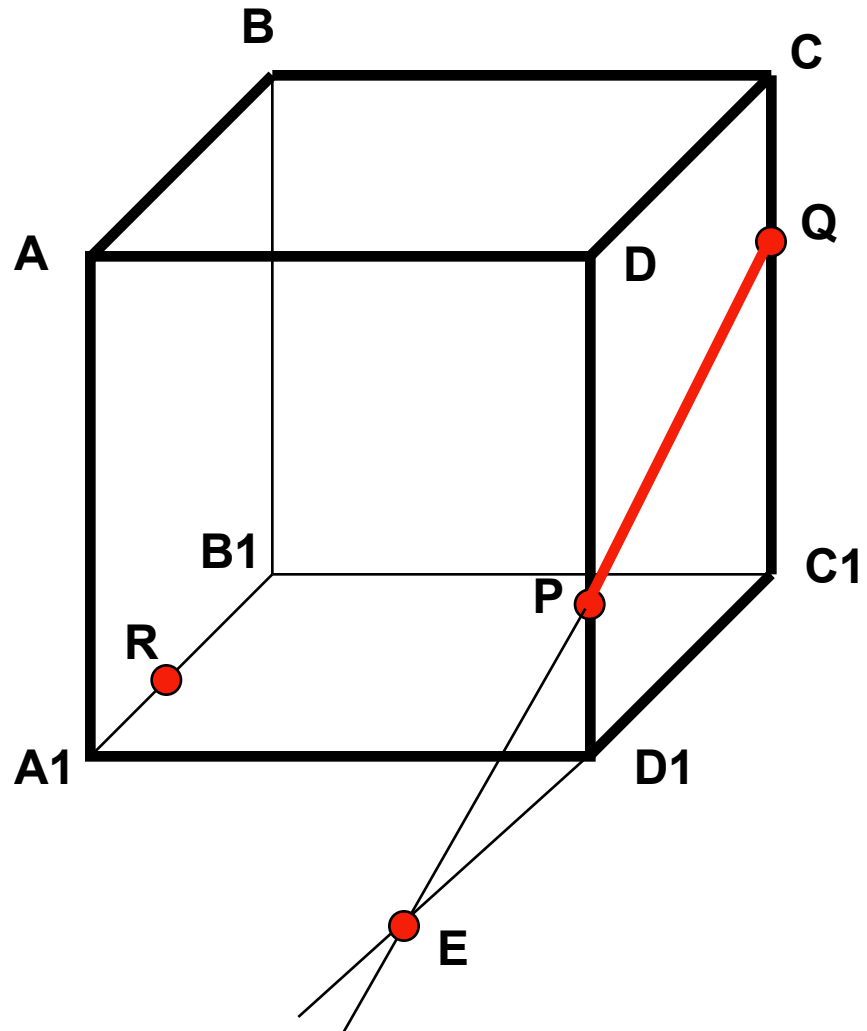


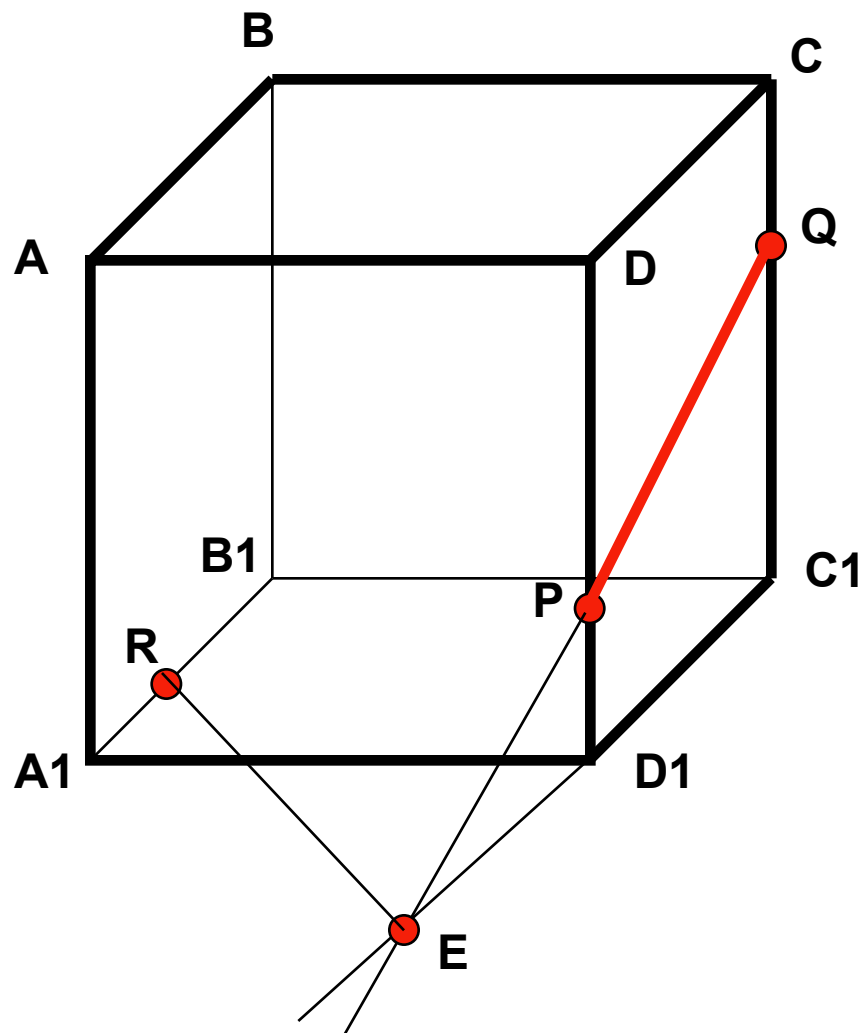


Точки Р и Q заданы, как принадлежащие плоскости сечения. В то же время эти точки принадлежат плоскости грани $C D D_1 C_1$, следовательно линия PQ является линией пересечения этих плоскостей



Линии PQ и C_1D_1 лежат в плоскости грани CC_1D_1D .
Найдем точку E
пересечения линий PQ и C_1D_1 .

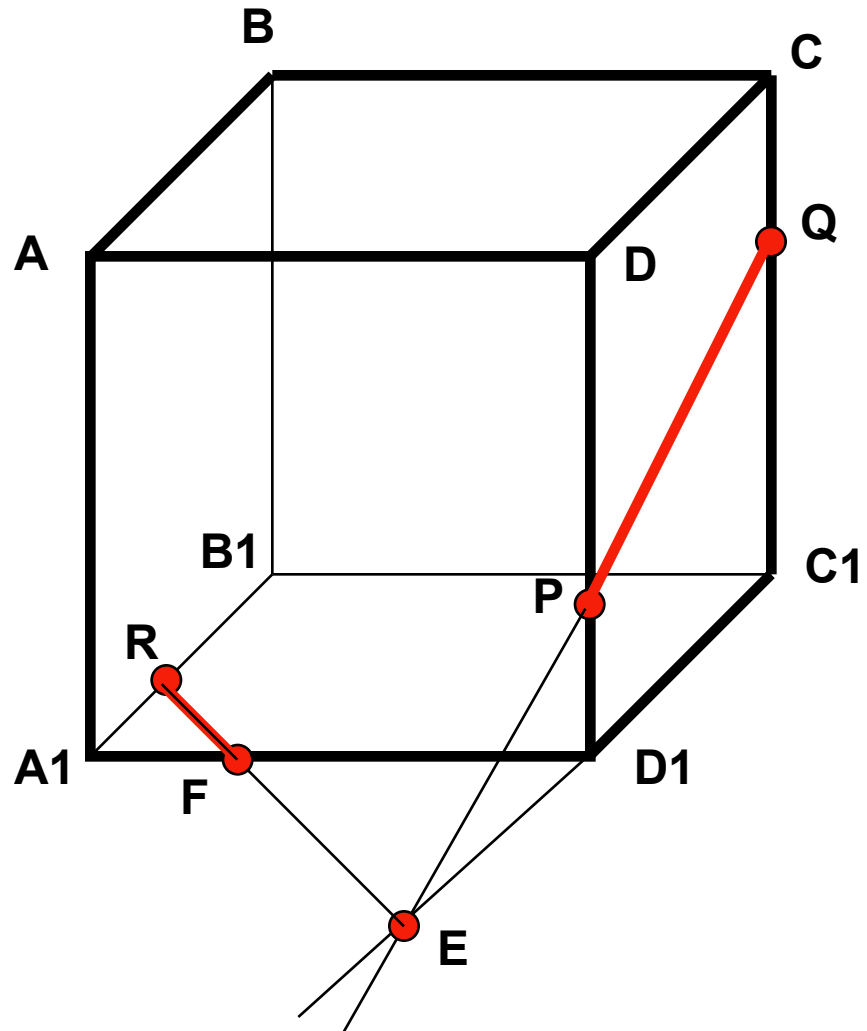




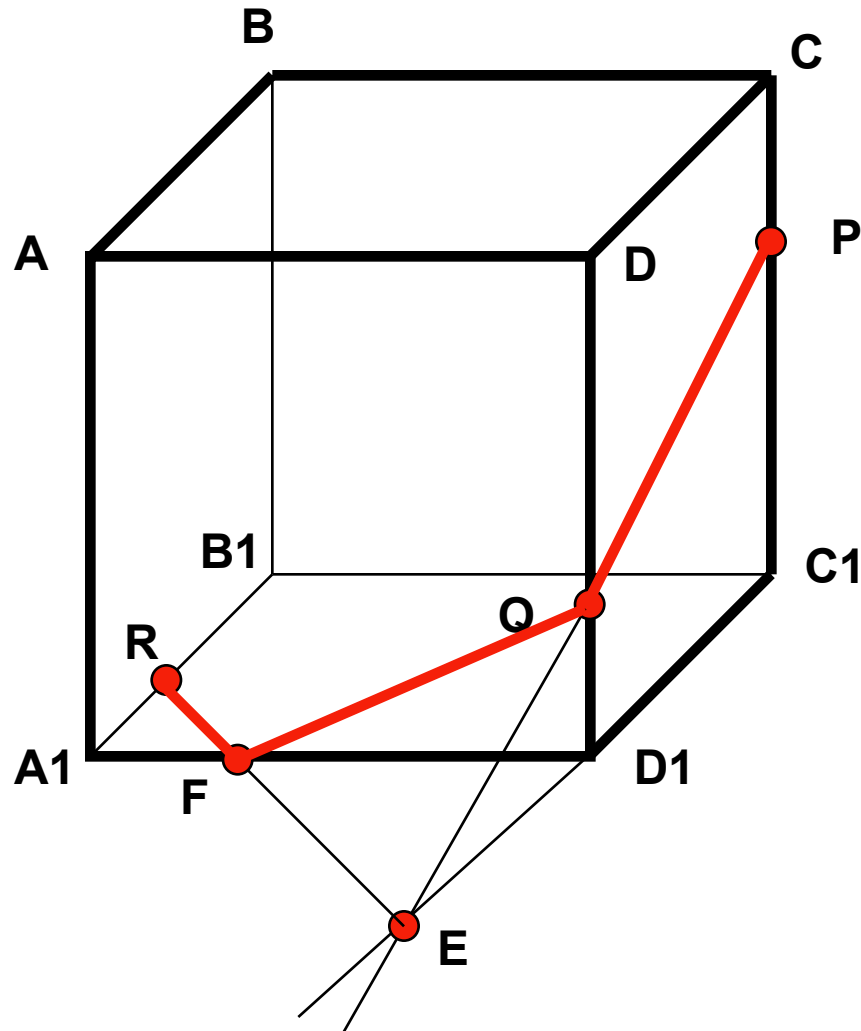
Точки R и E принадлежат
плоскости сечения
и плоскости основания куба,
следовательно линия RE,
соединяющая эти точки будет
линией пересечения
плоскости сечения и
плоскости основания куба .



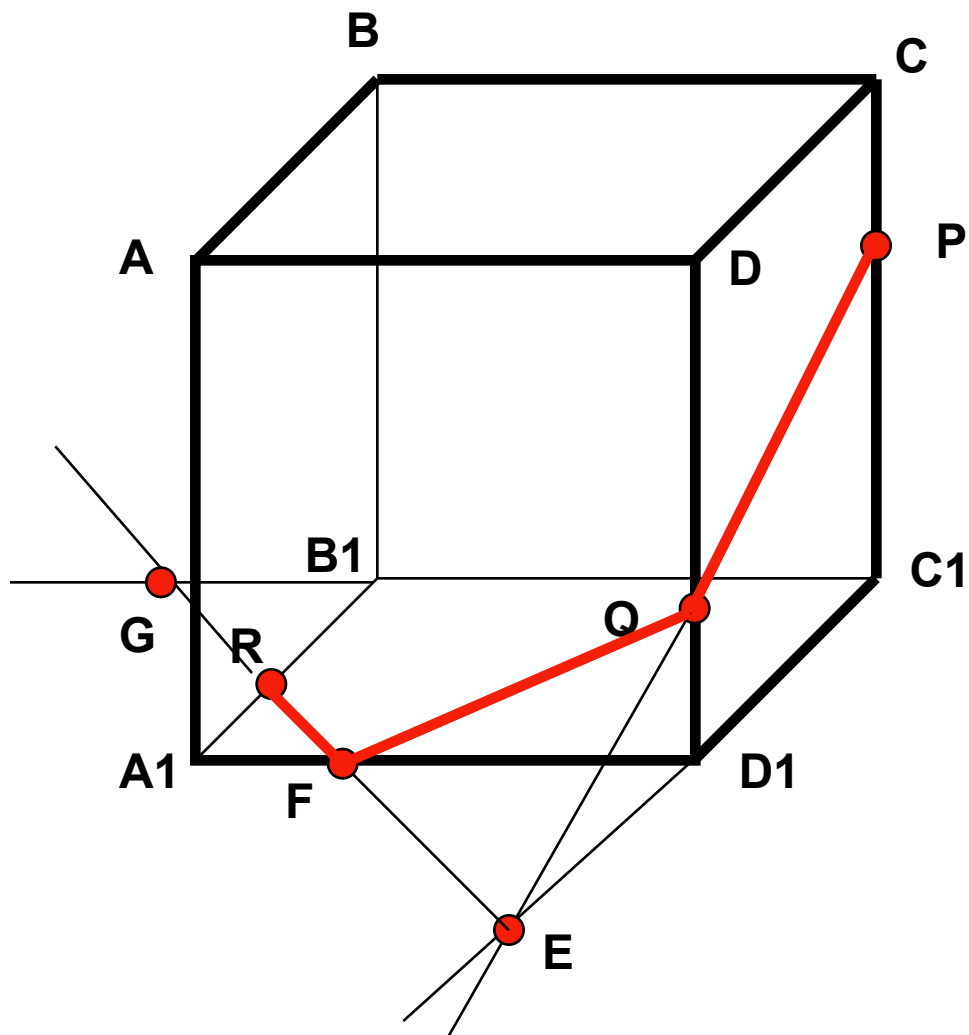
**RE пересекает A1 D1 в точке F
и линия RF будет линией
пересечения плоскости
сечения и плоскости грани
A1 B1 C1 D1.**



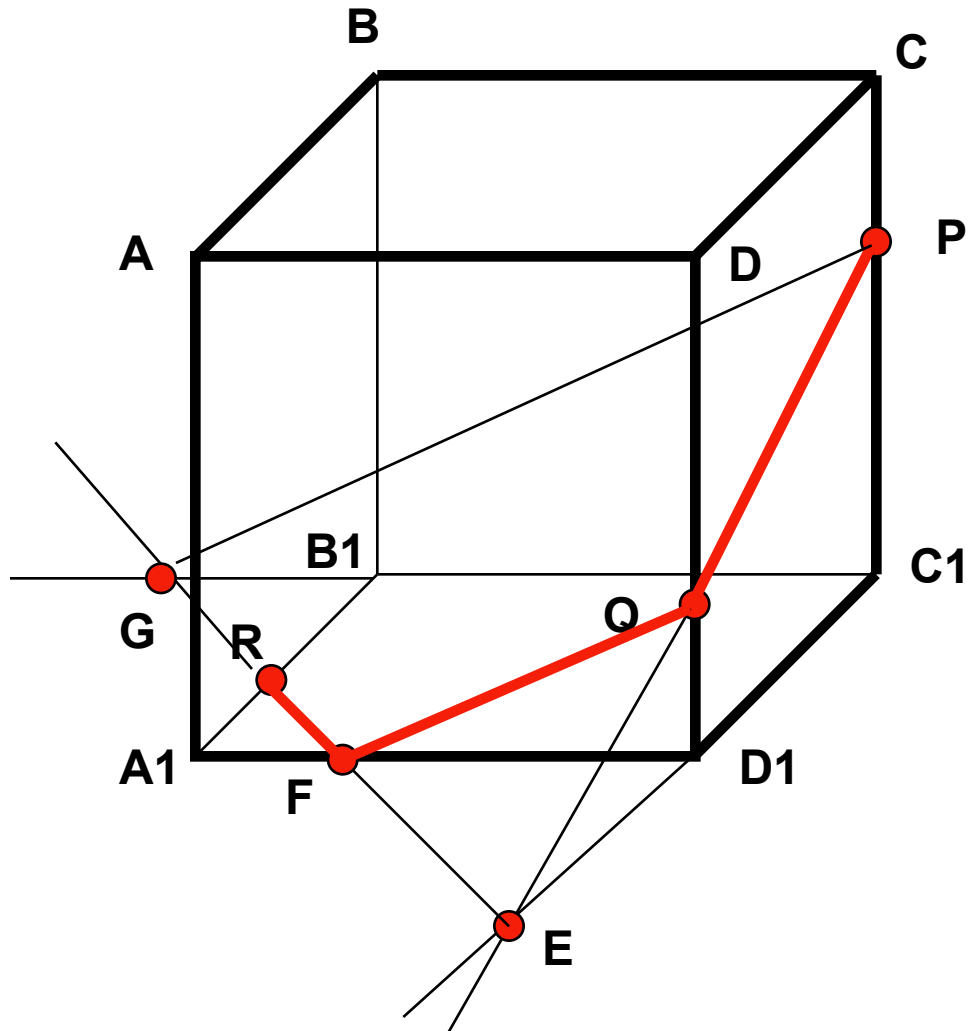
Точки Q , и F принадлежат плоскости сечения и плоскости грани AA_1D_1D , следовательно линия QF будет линией пересечения этих плоскостей.



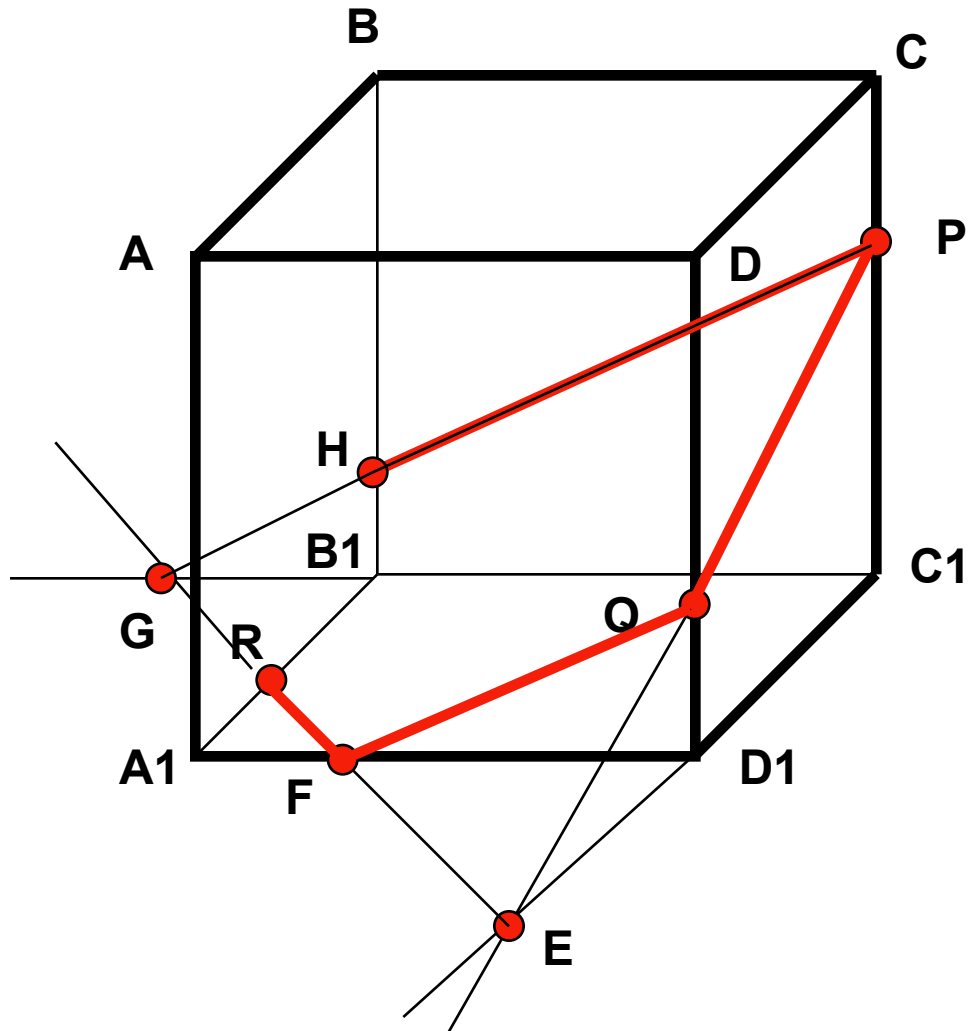
Линии RE и B1C1, лежащие в плоскости основания куба пересекаются в точке G.



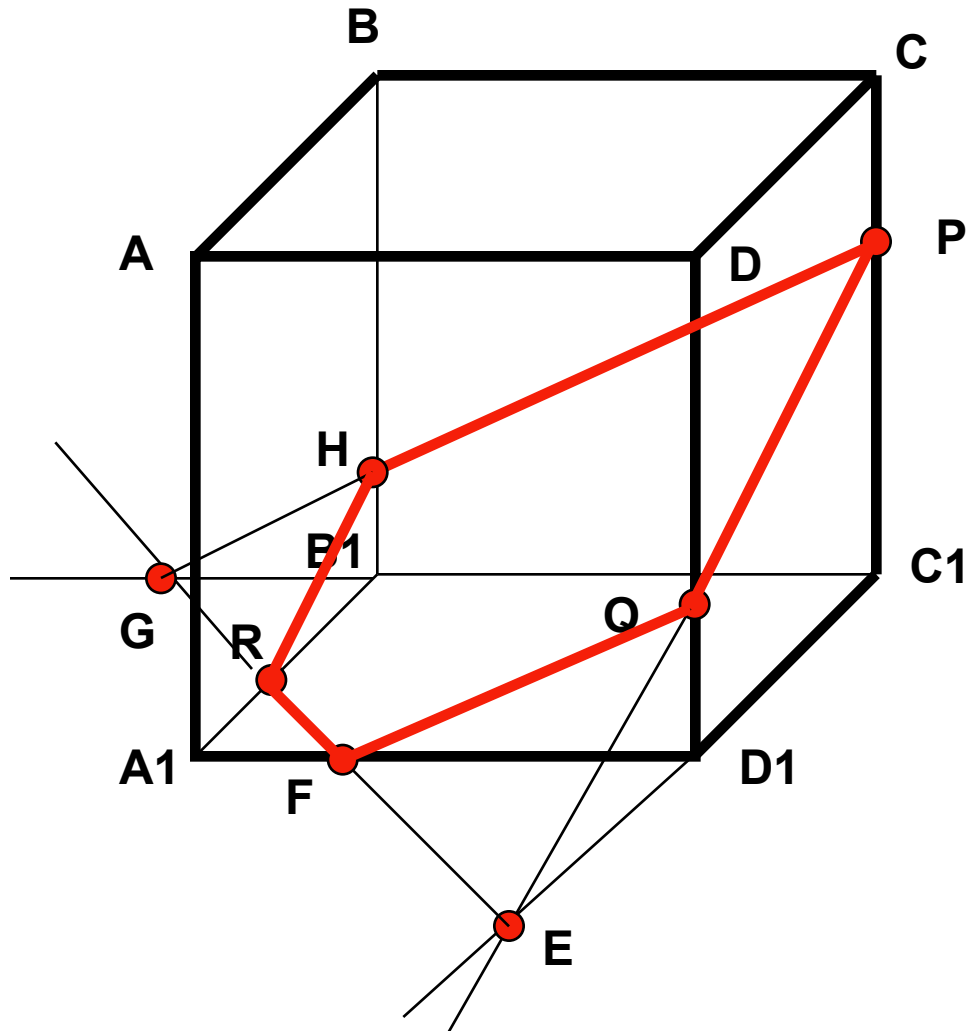
Точки Р и G принадлежат
плоскости сечения и
плоскости грани В В1 С1 С,
следовательно линия РG
является линией пересечения
этих плоскостей



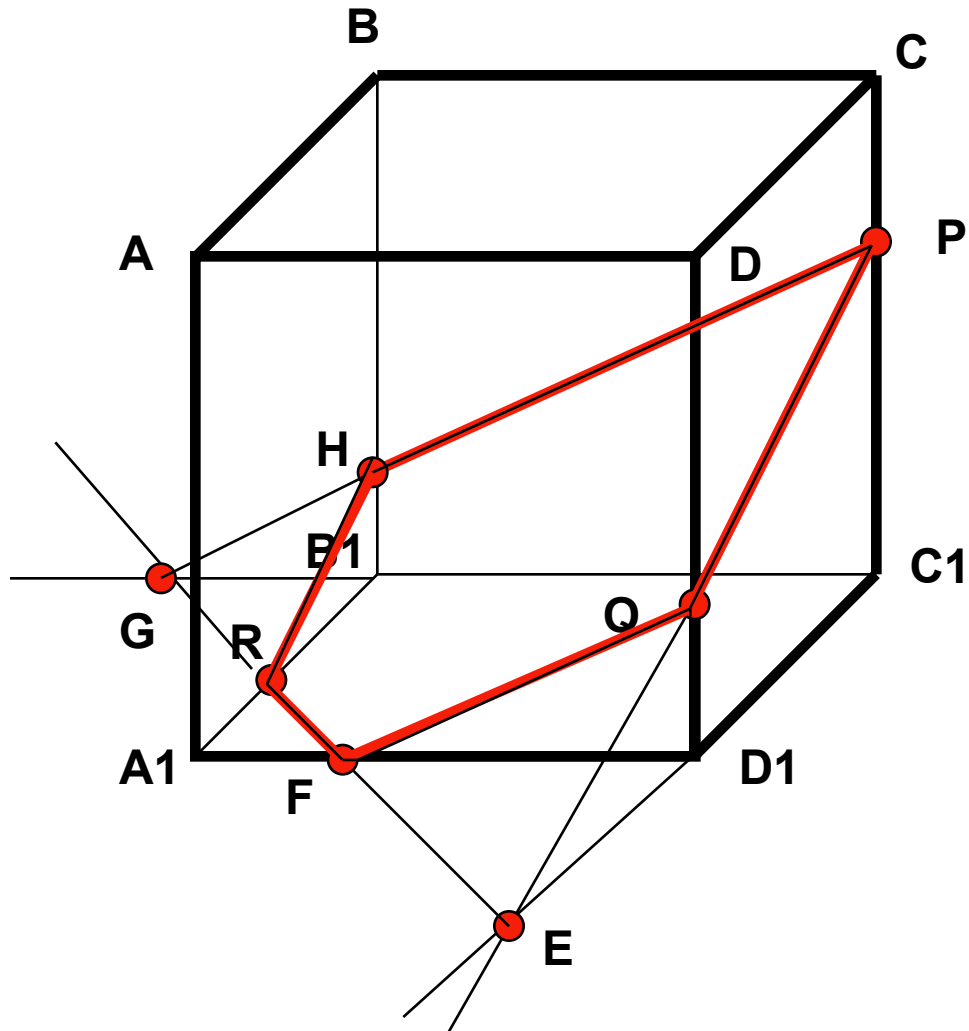
РГ пересекает В В1 в точке
Н и линия РН будет линией
пересечения плоскости
сечения и плоскости грани
В В1 С1 С.



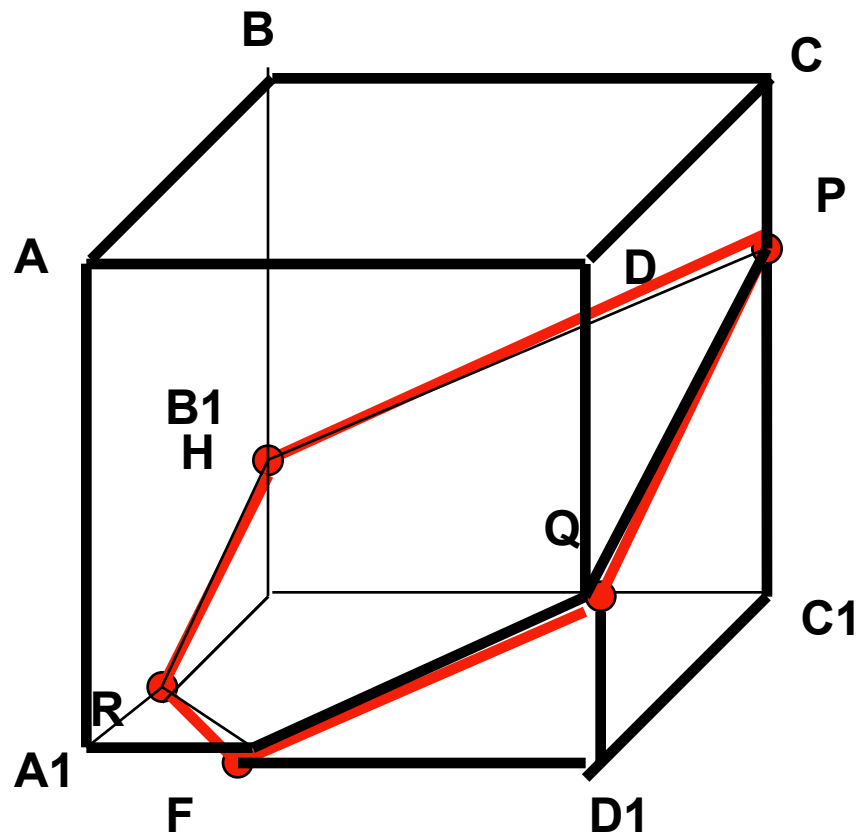
Точки R и H принадлежат
плоскости сечения
и плоскости грани AA_1B_1B
и следовательно линия RH
будет линией пересечения
этих плоскостей.



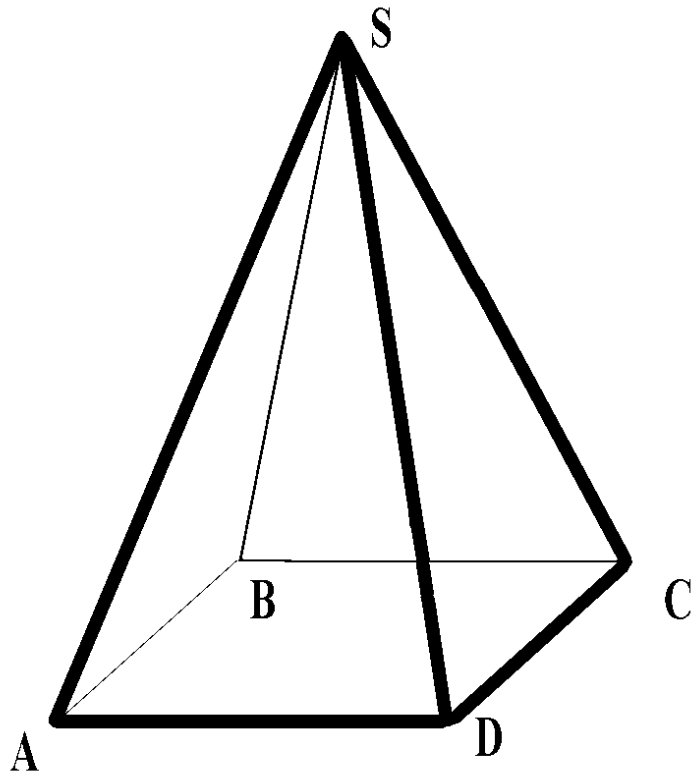
А пятиугольник RHPQF будет
искмым сечением куба
плоскостью, проходящей
через точки R, P, Q.



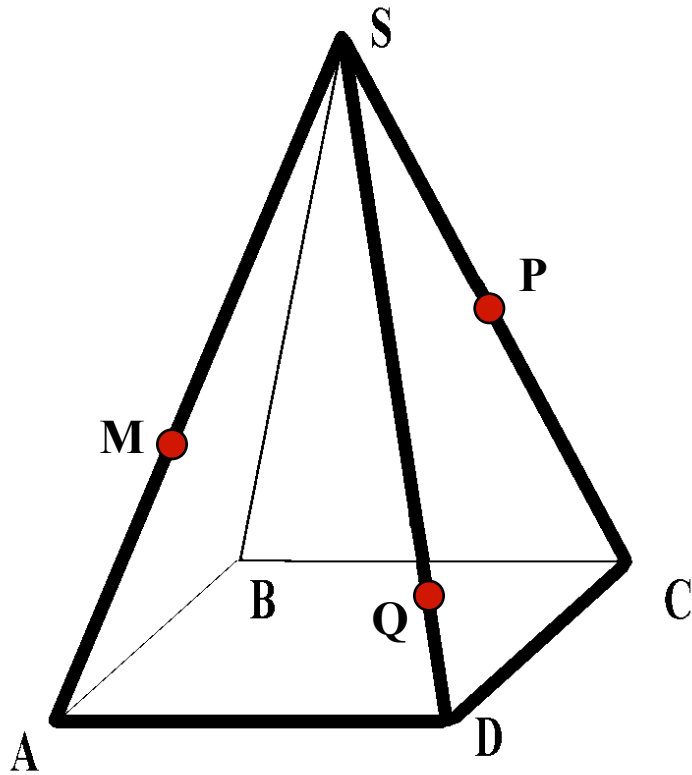
А пятиугольник RHPQF будет
искмым сечением куба
плоскостью, проходящей
через точки R, P, Q.



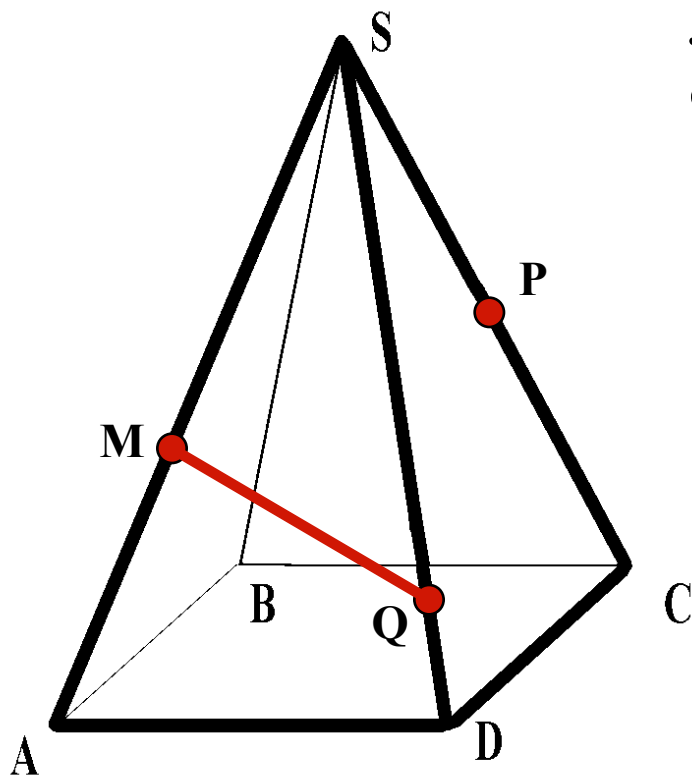
Дана пирамида $SABCD$.

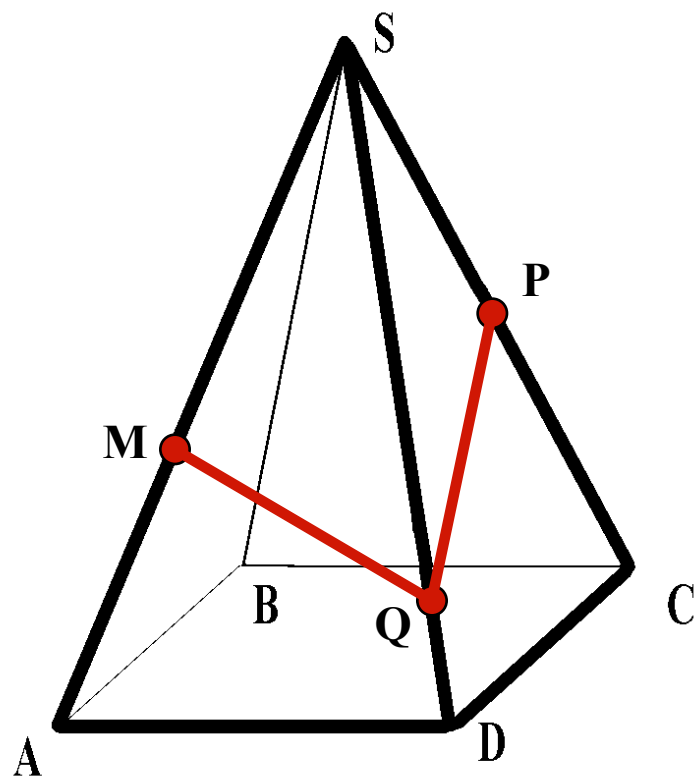


**Требуется построить сечение
заданной пирамиды плоскостью,
проходящей через точки:
М на ребре AS, Р на ребре CS и
Q на ребре DS.**



Точки М и Q лежат в плоскости грани ASD. Линия MQ, соединяющая эти точки является линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани ASD.



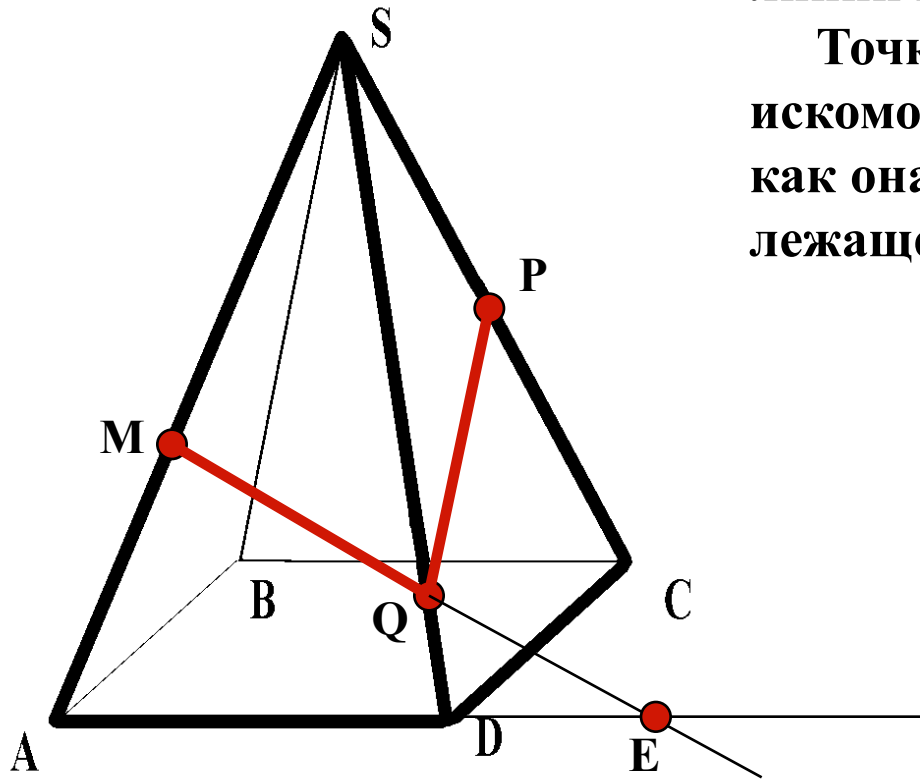


Линия QP, соединяющая заданные точки Q и P, является линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани DSC.



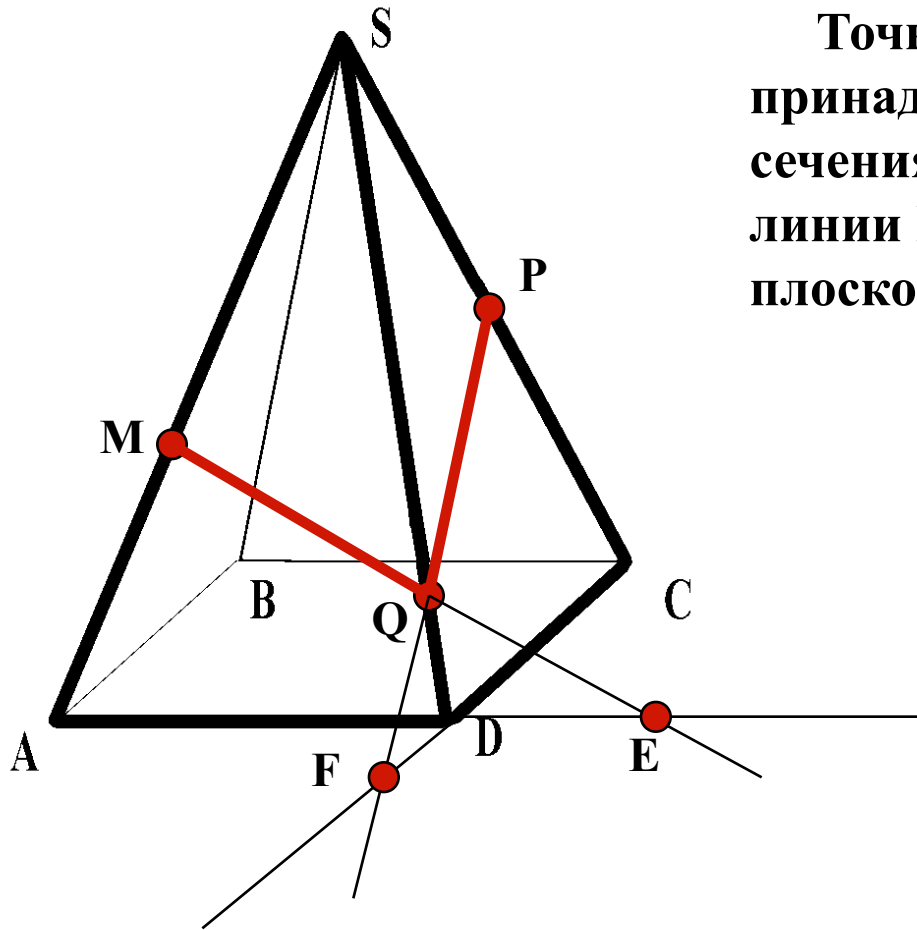
Линии MQ и AD лежат в одной плоскости грани ASD . Найдём точку E , как точку пересечения линий MQ и AD .

Точка E будет принадлежать искомой плоскости сечения, так как она принадлежит линии MQ , лежащей в этой плоскости.

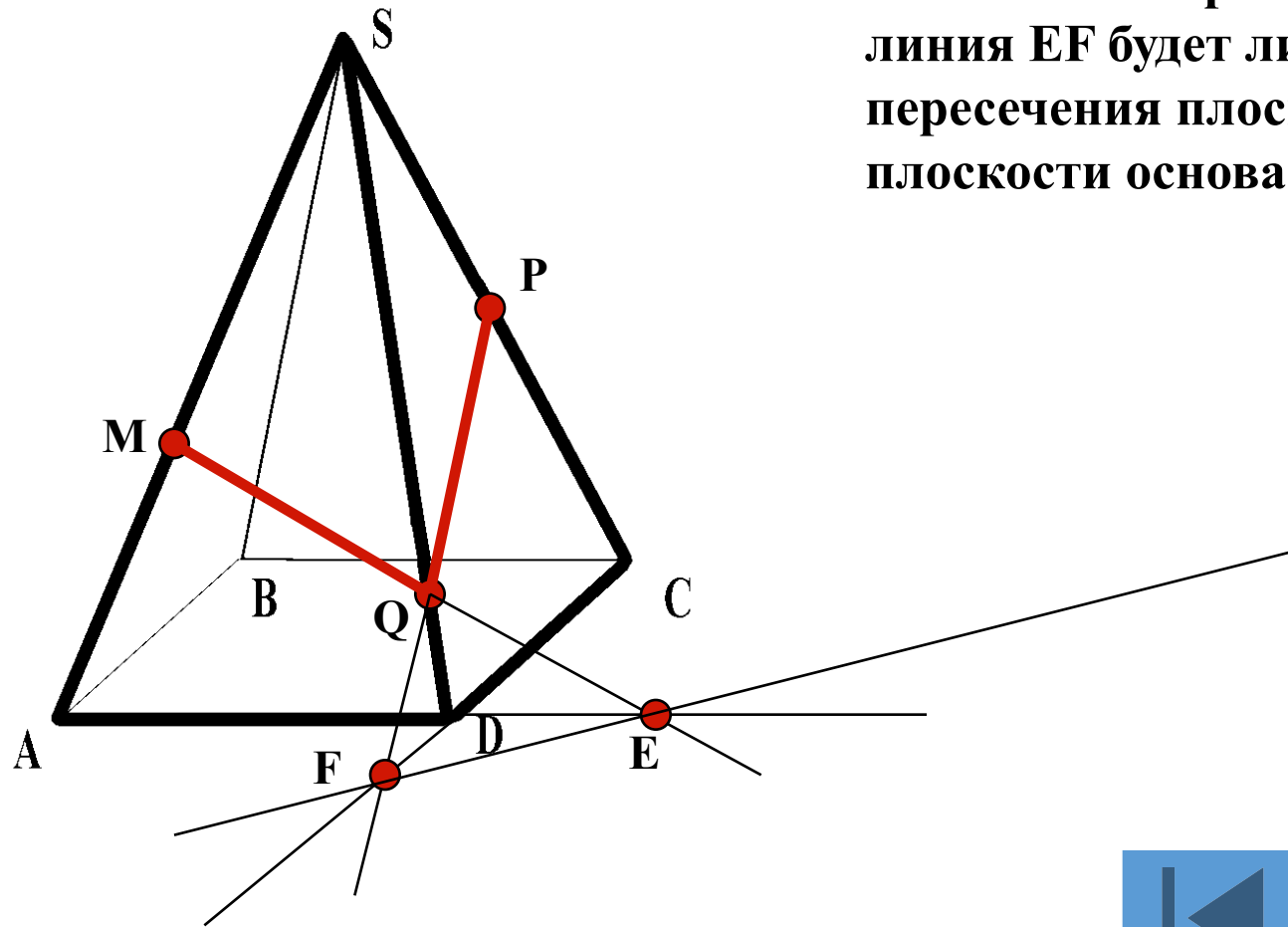


Линии PQ и CD лежат в одной плоскости грани CSD . Найдём точку F , как точку пересечения линий PQ и CD .

Точка F , как и точка E , будет принадлежать искомой плоскости сечения, так как она принадлежит линии PQ , лежащей в этой плоскости.

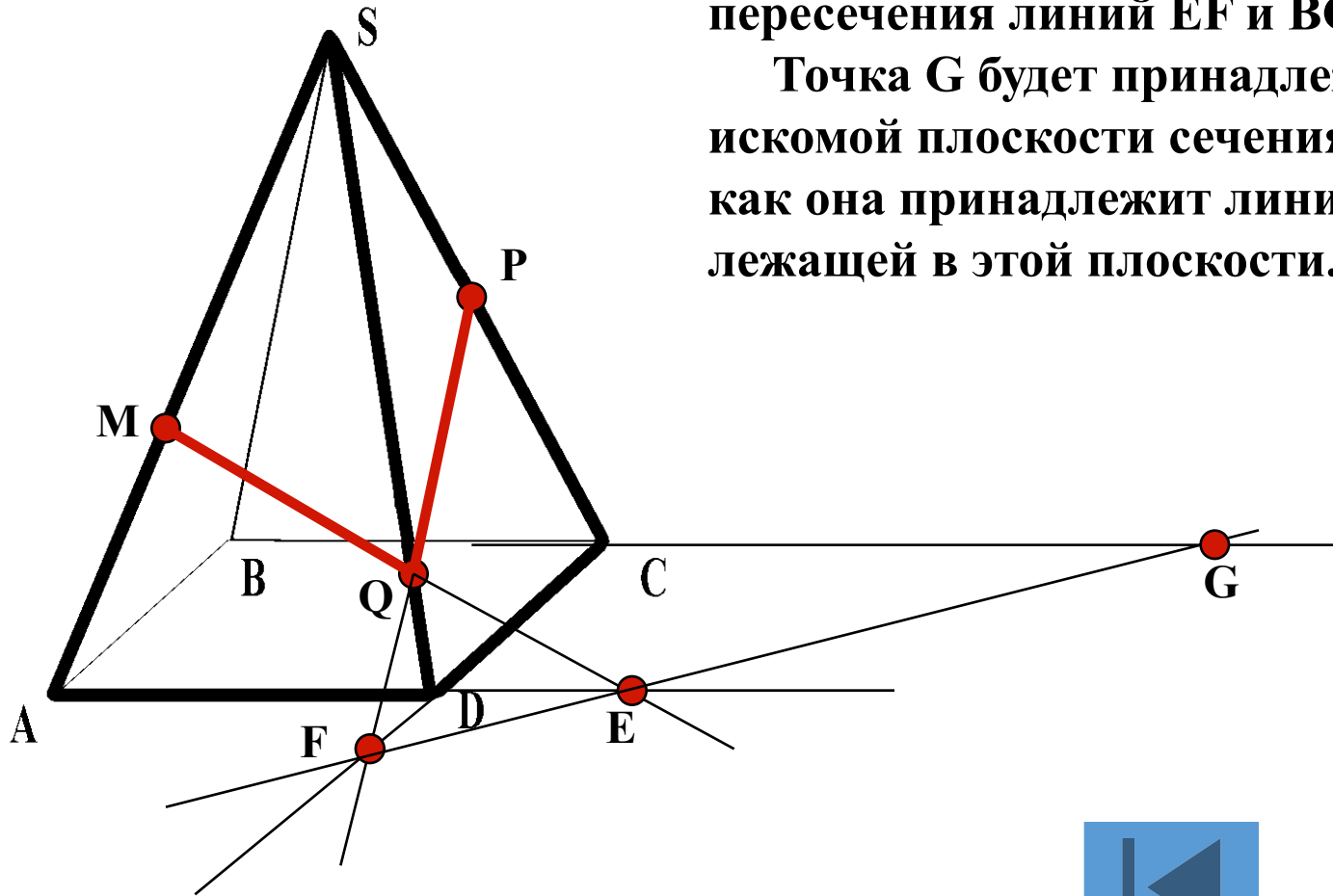


**Точки Е и F принадлежат
плоскости сечения и плоскости
основания пирамиды, поэтому
линия EF будет линией
пересечения плоскости сечения и
плоскости основания пирамиды.**

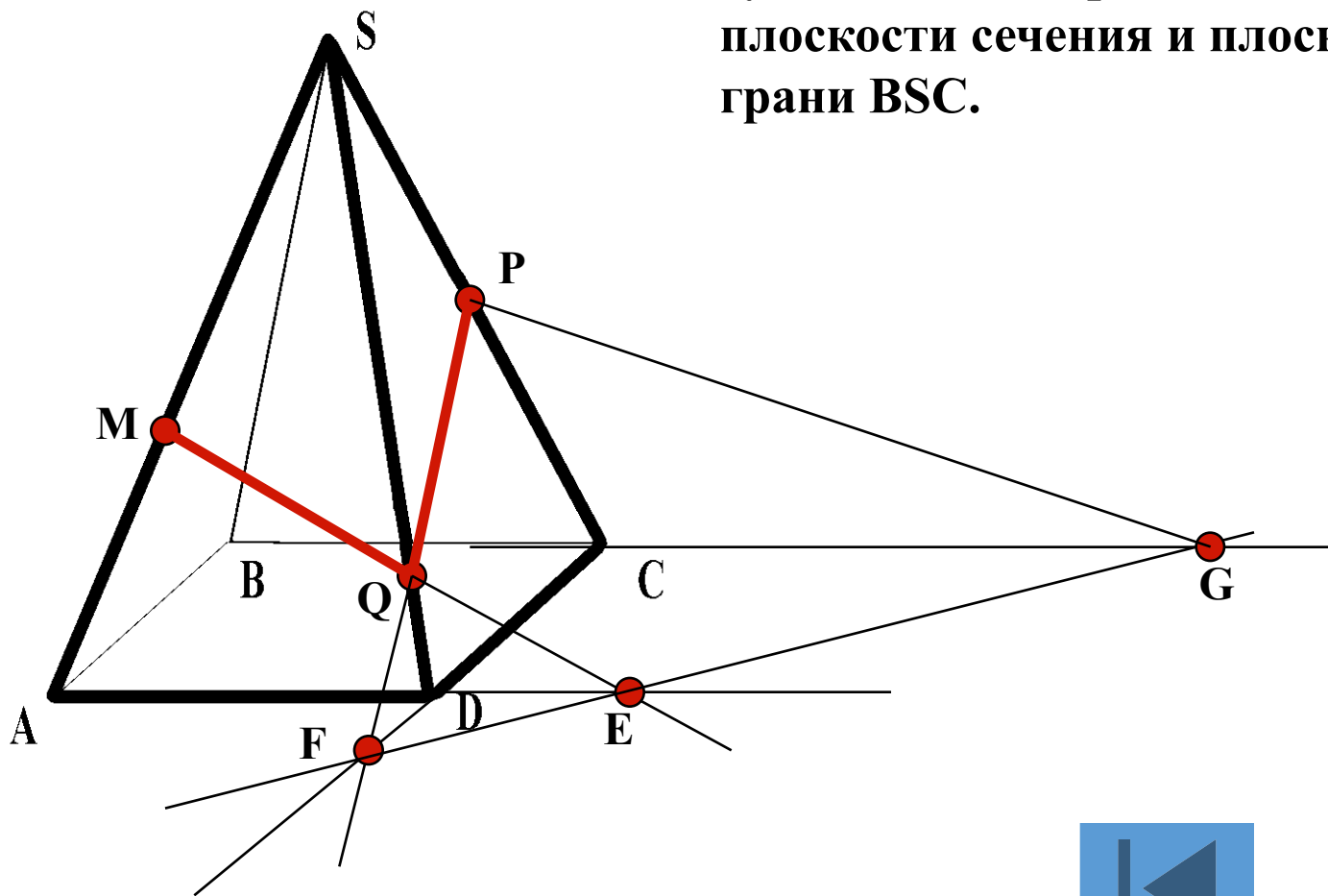


Линии EF и BC лежат в одной плоскости основания пирамиды $ABCD$. Найдём точку G , как точку пересечения линий EF и BC .

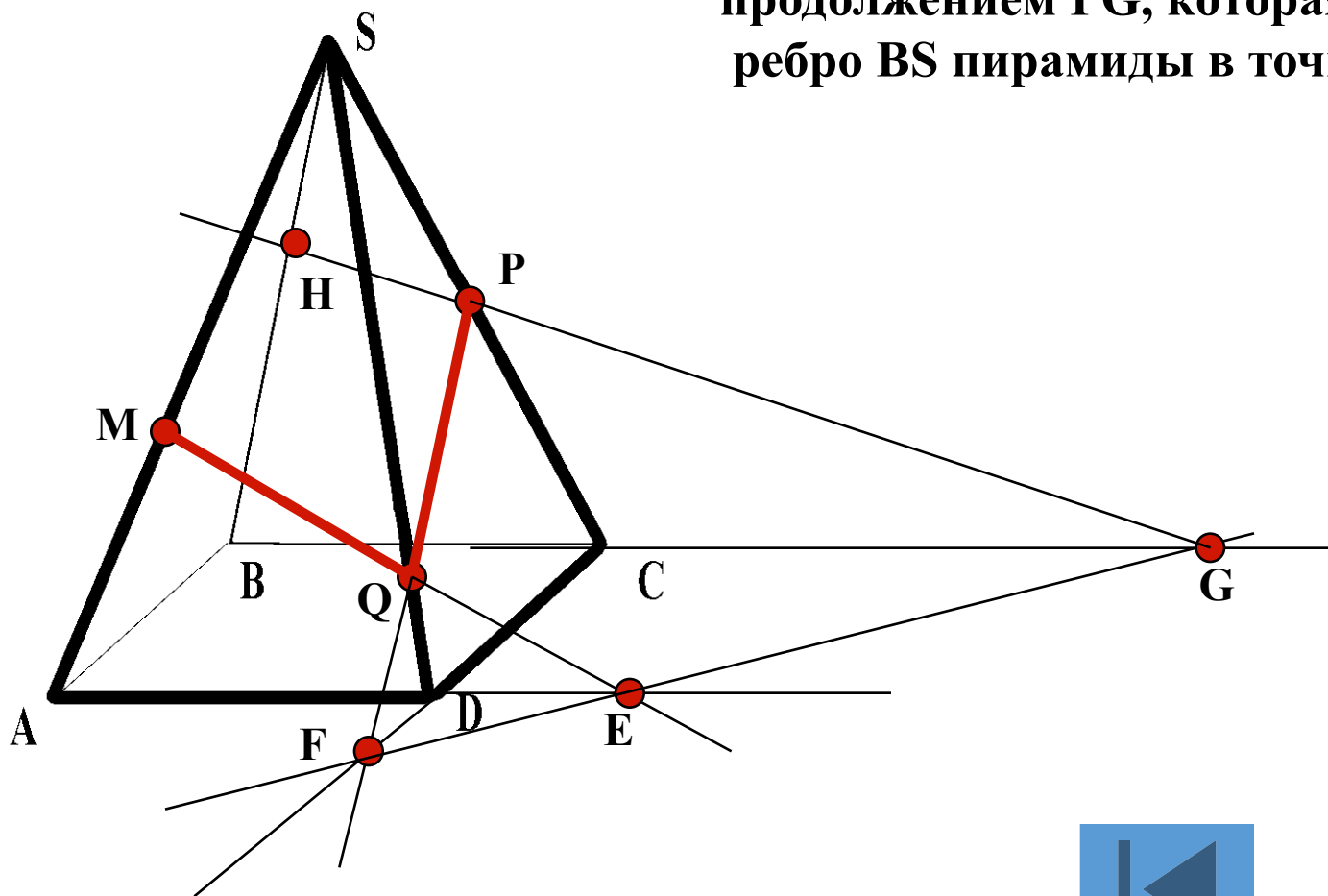
Точка G будет принадлежать искомой плоскости сечения, так как она принадлежит линии EF , лежащей в этой плоскости.



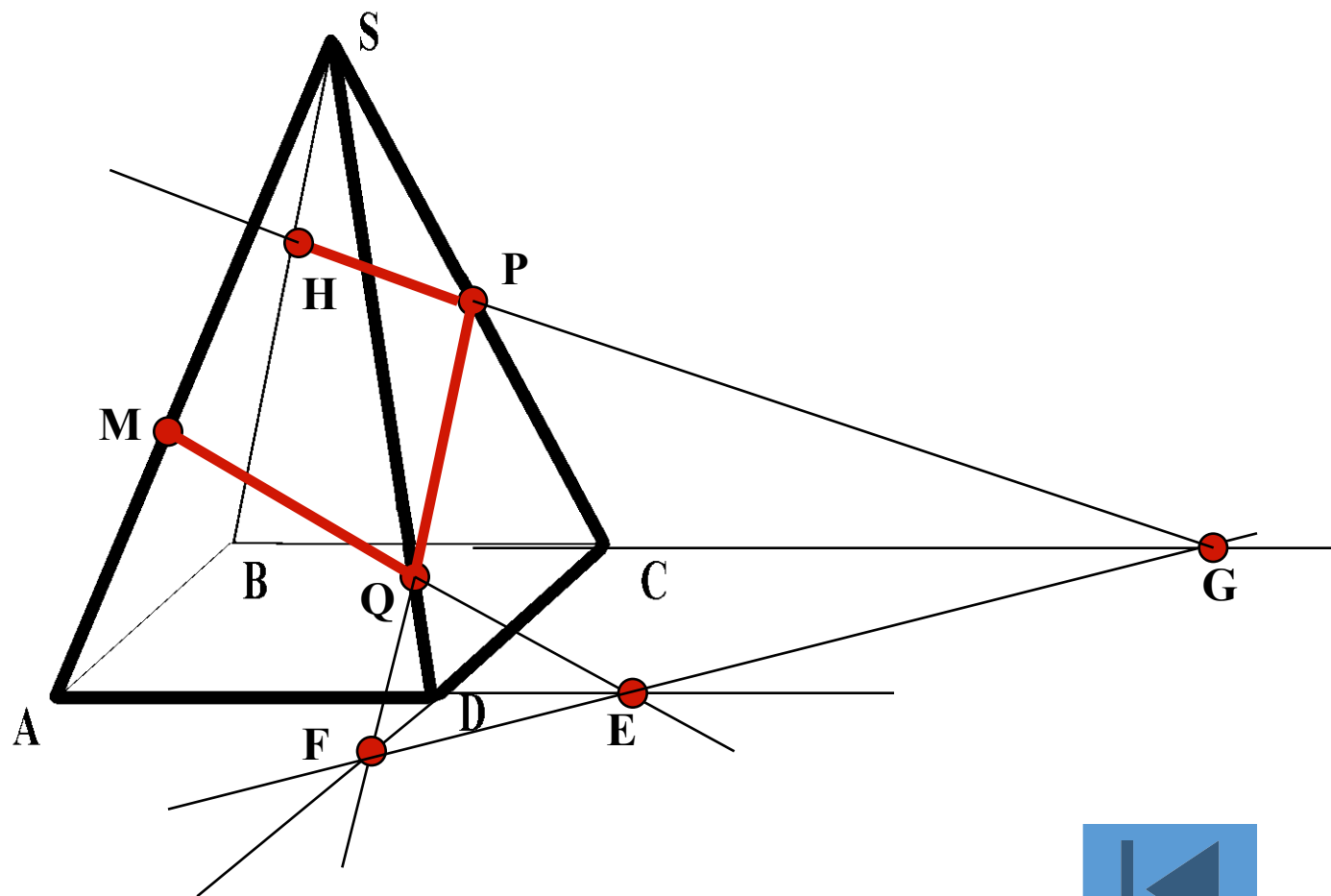
Точки Р и G принадлежат
плоскости сечения и плоскости
грани BSC, поэтому линия PG
будет линией пересечения
плоскости сечения и плоскости
грани BSC.



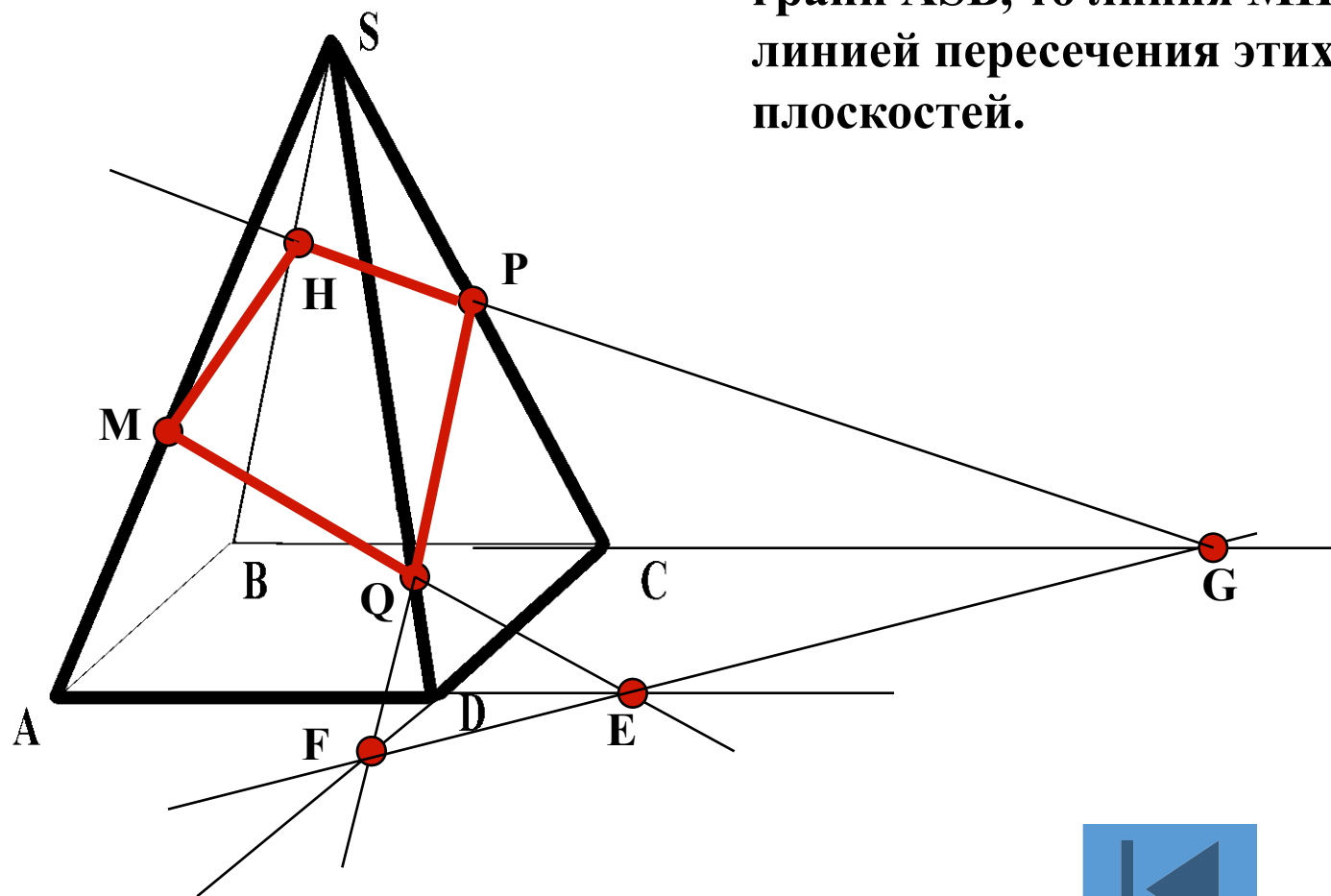
Линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани BSC будет линия, являющаяся продолжением PG, которая пересечёт ребро BS пирамиды в точке Н.



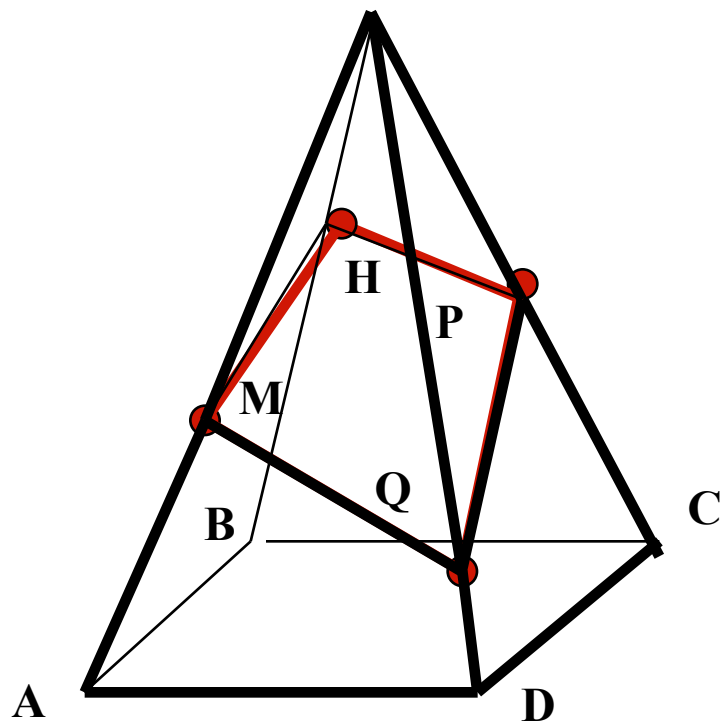
**РН будет линией пересечения
плоскости сечения и плоскости
грани BSC.**

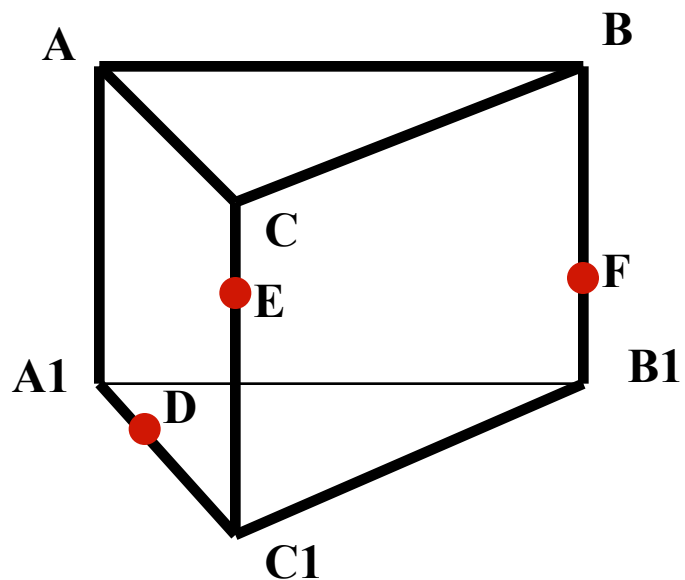


Ну и наконец, так как точки М и Н одновременно принадлежат и плоскости сечения и плоскости грани ASB, то линия МН будет линией пересечения этих плоскостей.



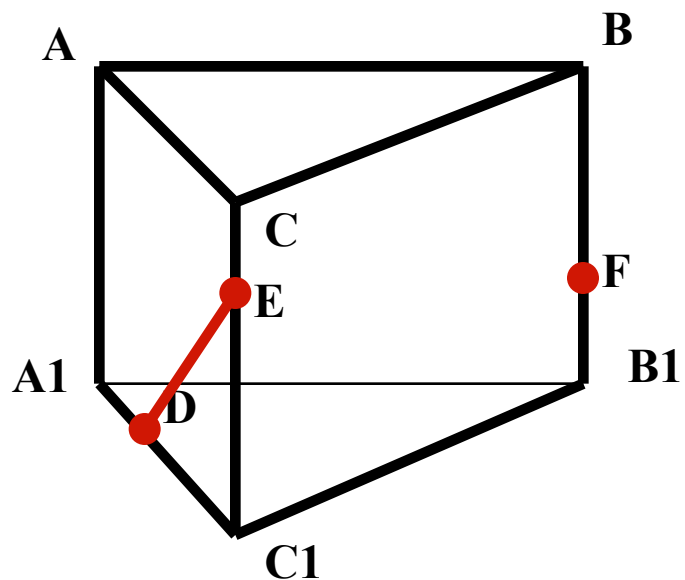
**И четырёхугольник $MHPQ$
будет искомым сечением
пирамиды $SABCD$ плоскостью,
проходящей через заданные точки
 M, P, Q .**





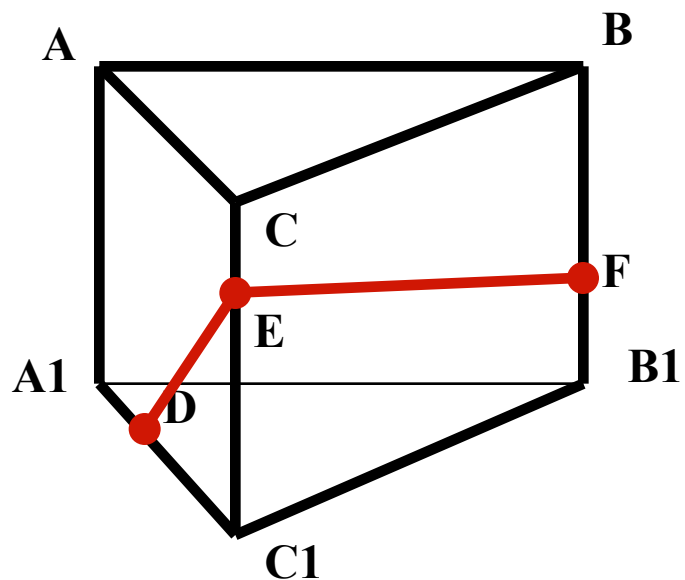
**Дана трёхгранная призма
A B C A1 B1 C1. Требуется
построить сечение призмы
плоскостью, проходящей
через три заданные точки
D, E, и F.**





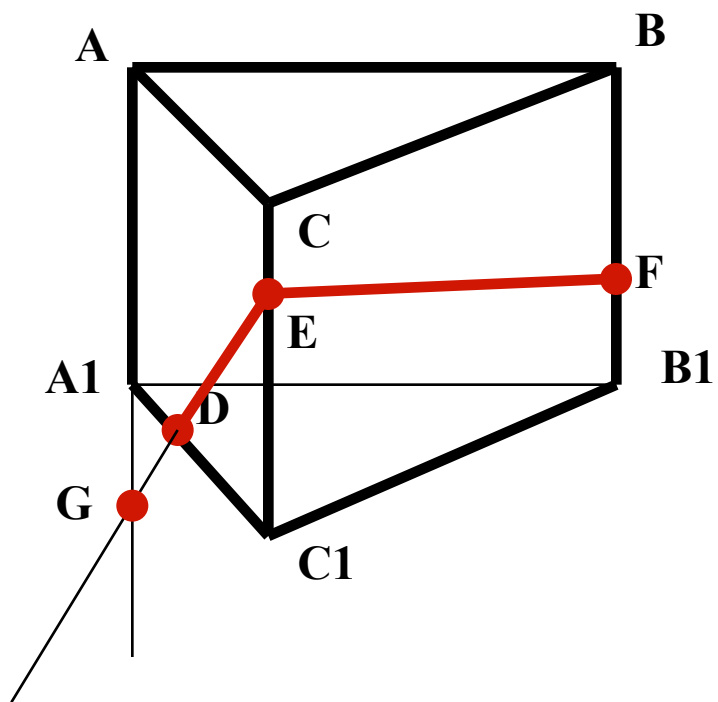
**Точки D и E принадлежат
плоскости грани A A1 C1 C
и плоскости сечения,
следовательно линия DE
будет линией пересечения
этих плоскостей.**





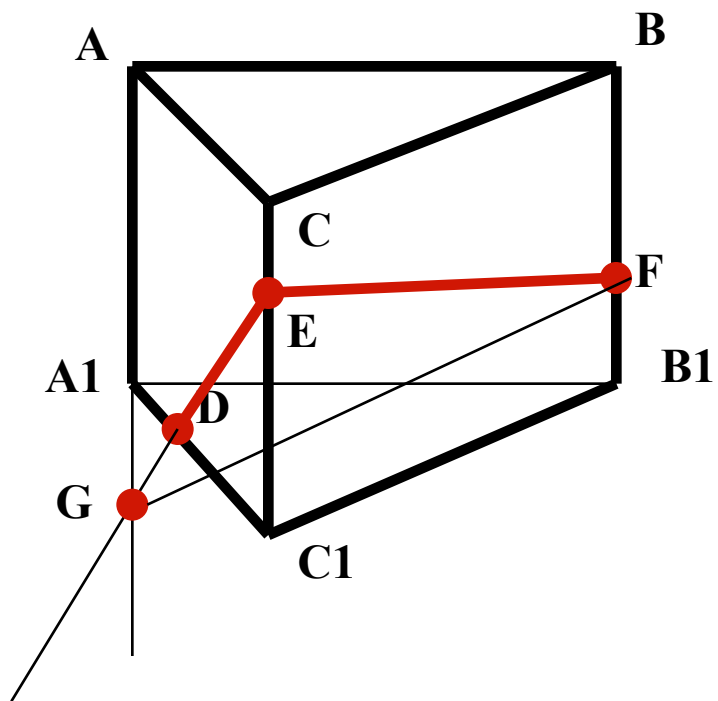
Точки E и F принадлежат плоскости грани BCB_1C_1 и плоскости сечения, следовательно линия EF будет линией пересечения этих плоскостей.





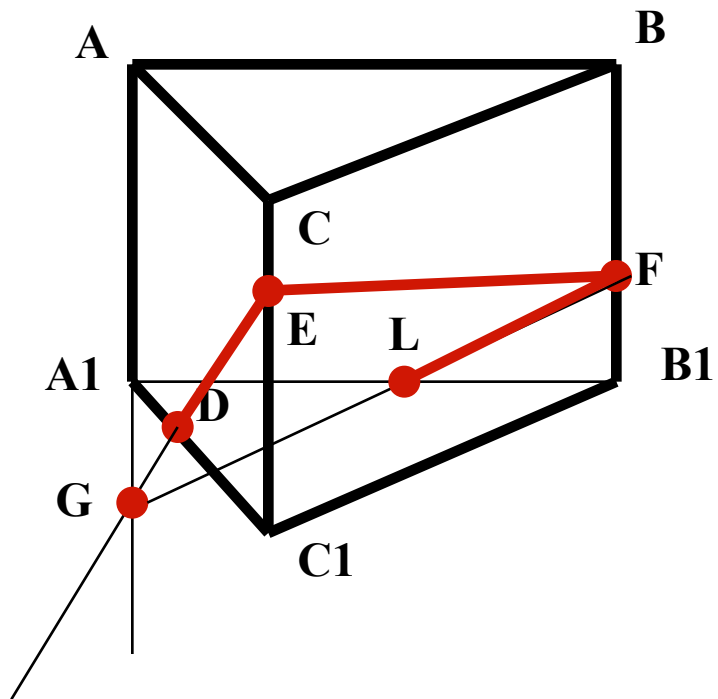
**Линии DE и AA1 лежат в
плоскости грани AA1 C1 C.
Найдём точку G, пересечения
этих линий.**





Точка G принадлежит плоскости сечения, так как она принадлежит линии DE. Точки G и F принадлежат плоскости грани AA1 B1 B и плоскости сечения, следовательно линия GF будет линией пересечения этих плоскостей.

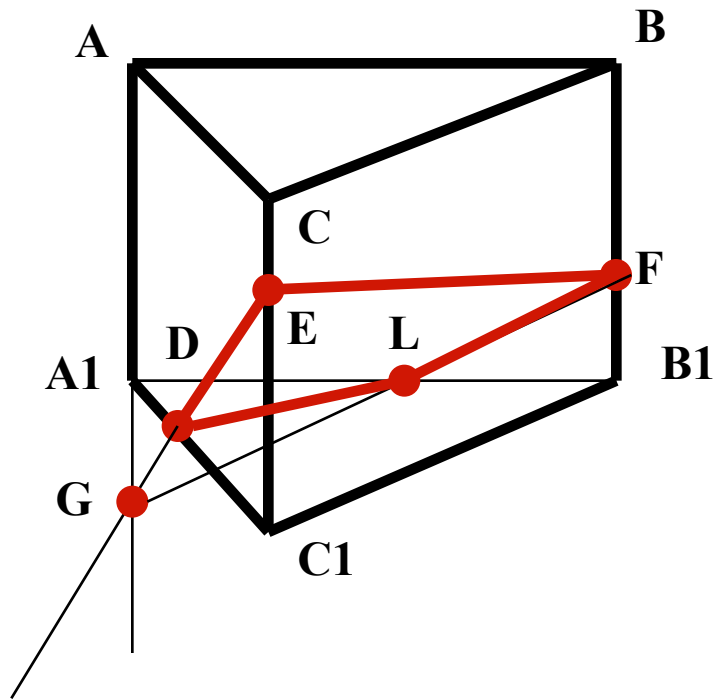




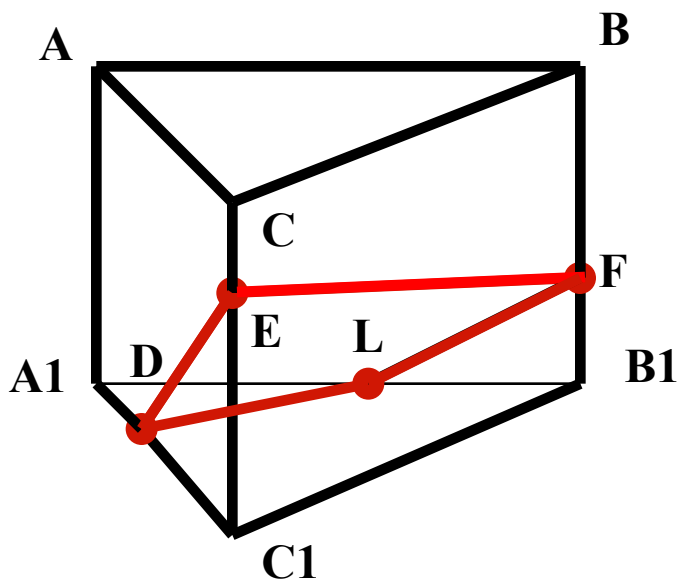
В плоскости грани AA_1B_1B линии GF и A_1B_1 пересекаются в точке L . Точки F и L принадлежат плоскости грани AA_1B_1B и плоскости сечения, следовательно линия FL будет линией пересечения этих плоскостей.



**Точки D и L принадлежат
плоскости основания призмы
A1 B1 C1 и плоскости сечения,
следовательно линия DL будет
линией пересечения этих
плоскостей.**

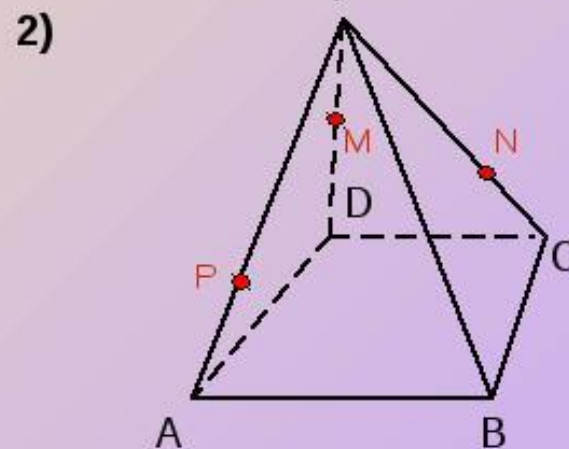
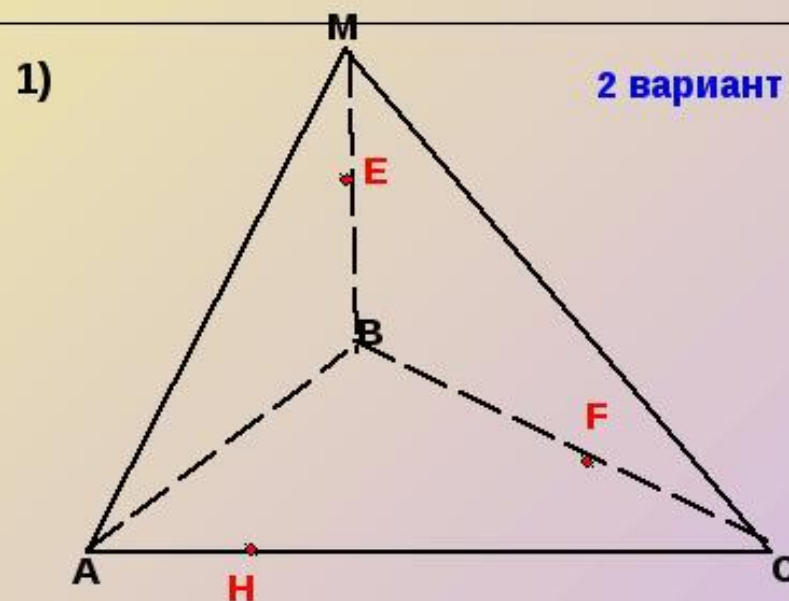
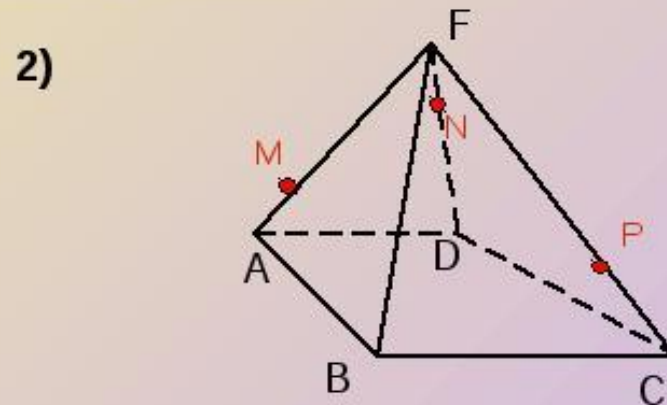
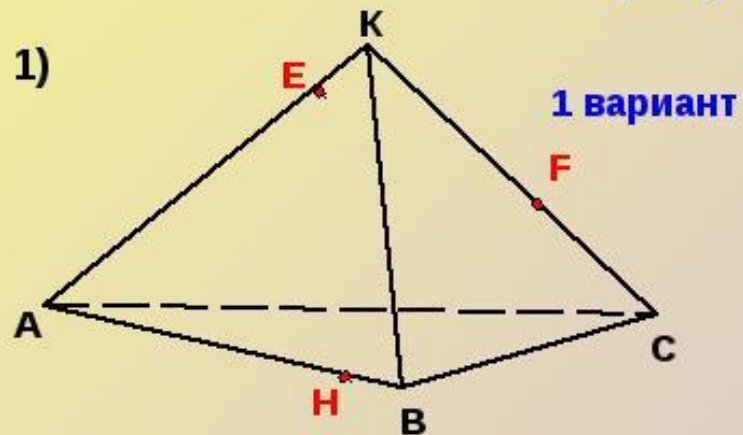


**А четырёхугольник DEFL
будет искомым сечением
трёхгранной призмы плоскостью,
проходящей через три заданные
точки D,E,F.**



6. Самостоятельная работа.

Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через указанные точки.

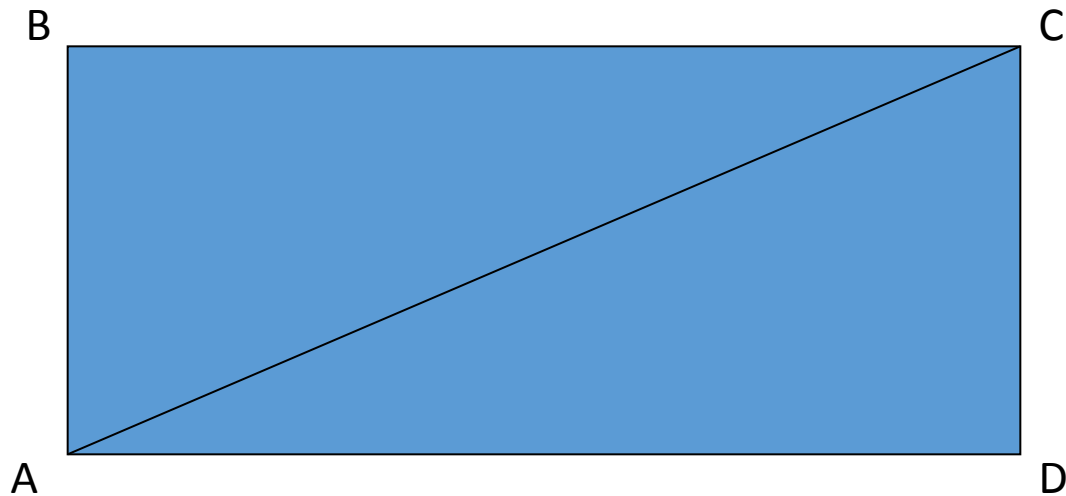


- Площади поверхностей
многогранников

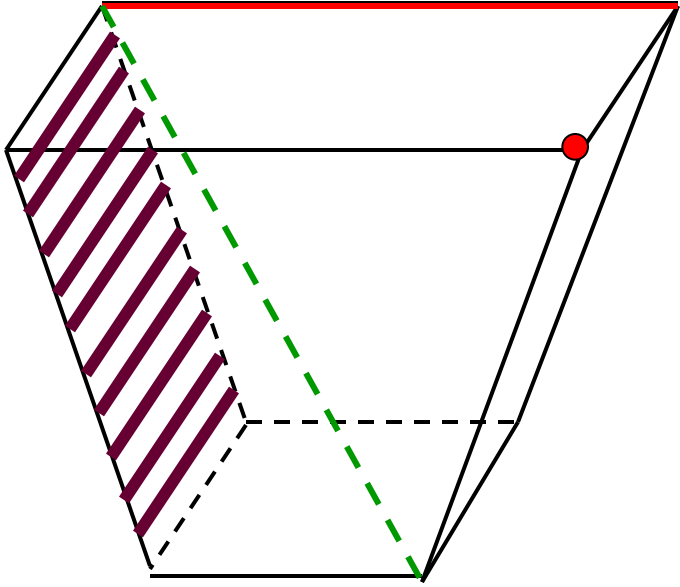
Задача №1 (устно).

Дано: ABCD –прямоугольник,
 $CD=3$, $AC=5$

Найти: S_{ABCD}



Ответ: 12



□ Многогранником

называется тело,
поверхность которого
состоит из конечного
числа многоугольников,
называемых **гранями**.

□ Стороны и вершины этих
многоугольников

называются **ребрами и вершинами**.

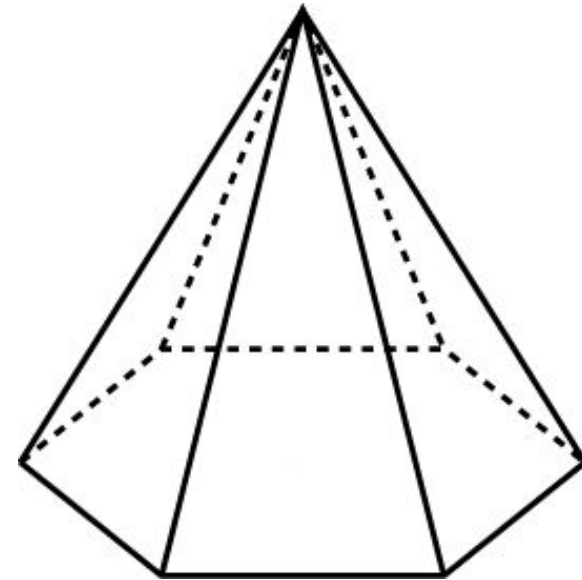
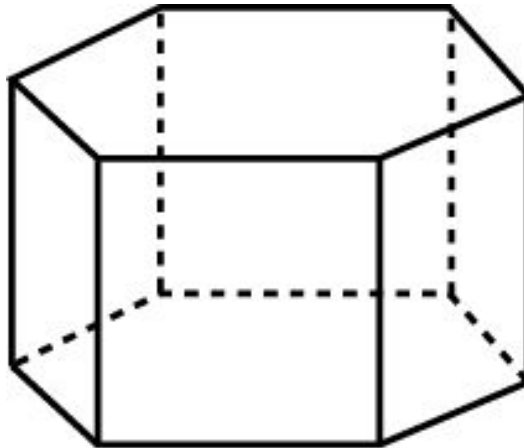
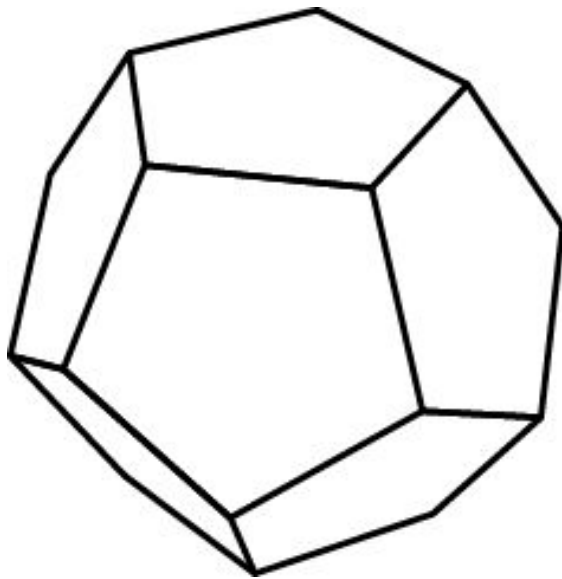
□ Отрезки, соединяющие вершины
многогранника, не принадлежащие одной
грань, называются **диагоналями**.

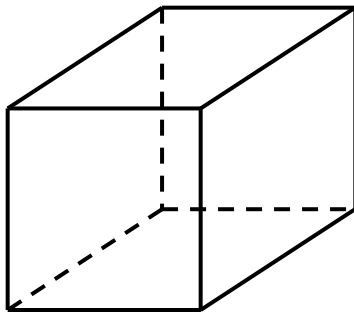
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Площадь поверхности призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований.

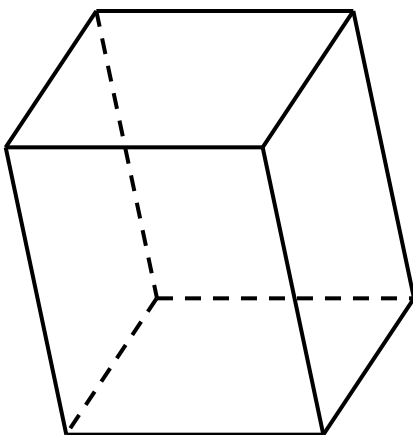
Площадь поверхности пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания.





Куб

Многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов



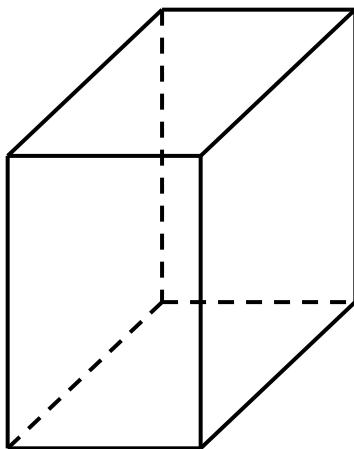
Параллелепип

ед

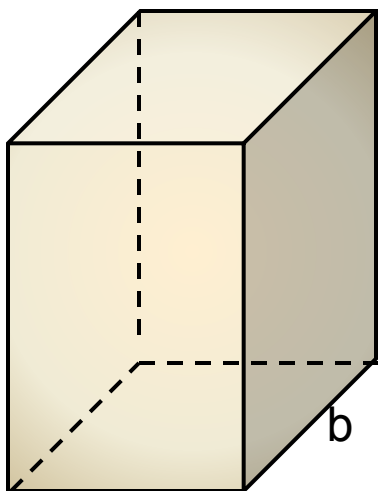
Многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов

Прямоугольный параллелепипед

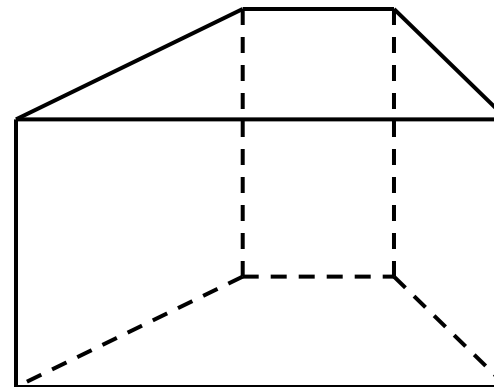
*Параллелепипед называется
прямоугольным, если все его грани
прямоугольники*



Площадь призмы



$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн}}$$



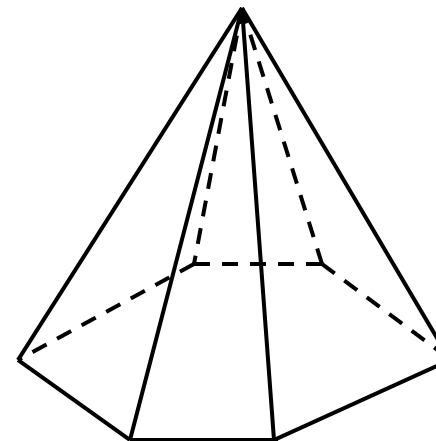
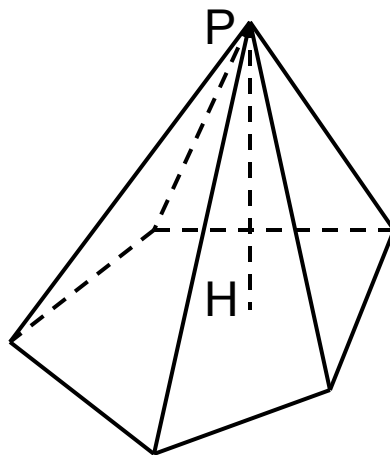
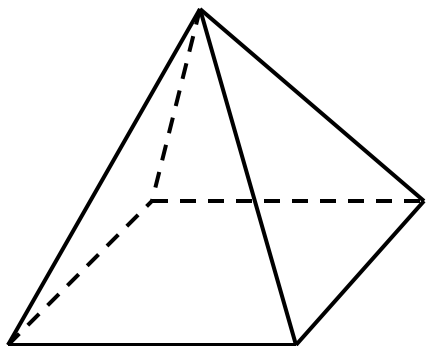
Теорема: *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.*

$$S_{\text{бок.}} = Ph$$

$$\begin{aligned} S_{\text{бок.}} &= ah + ah + bh + bh = \\ &= h(2a + 2b) = Ph \end{aligned}$$

Пирамид

Многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника и треугольников, имеющих общую вершину

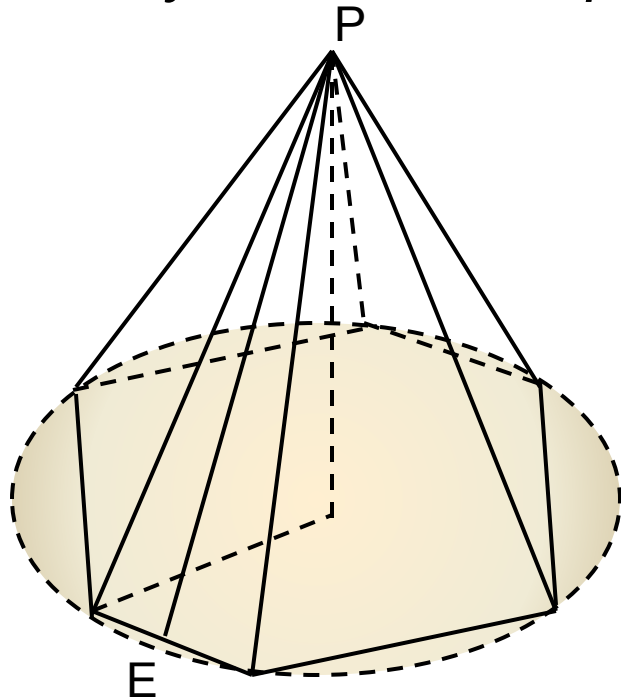


- Многоугольник называют основанием пирамиды
- Треугольники называют боковыми гранями
- Общую вершину называют вершиной пирамиды
- Перпендикуляр PH называют высотой

$$\begin{aligned} S_{\text{полн.}} &= S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} \end{aligned}$$

Правильная пирамида

Основание правильной пирамиды — многоугольник, высота опущена в центр основания.



□ Боковые ребра равны

□ Боковые грани — равные
равнобедренные треугольники

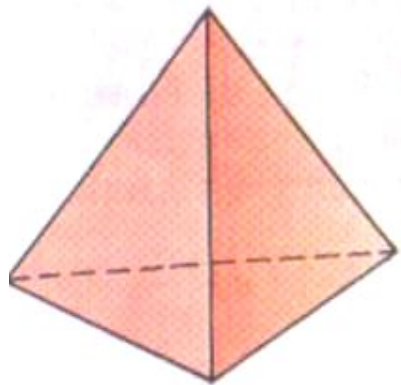
□ Основание высоты совпадает
с центром вписанной или
описанной окружности

□ Перпендикуляр PE называют
апофемой

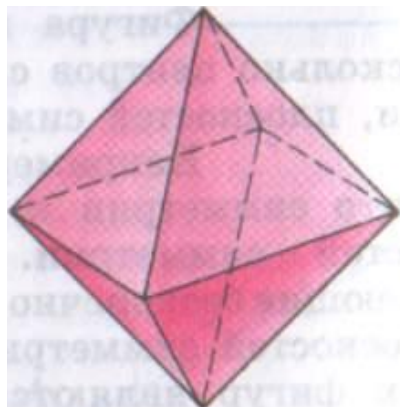
Теорема: Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P d$$

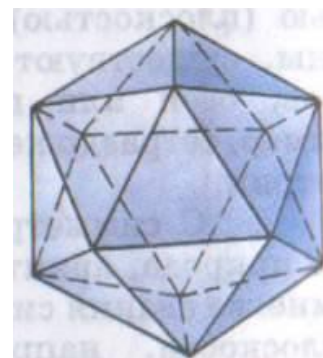
Правильные многогранники



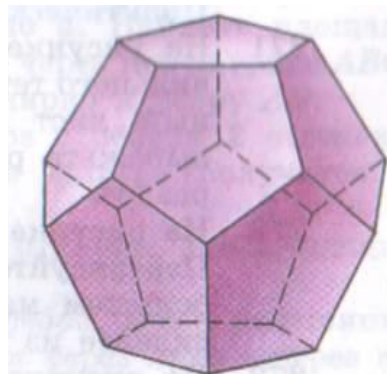
Тетраэдр



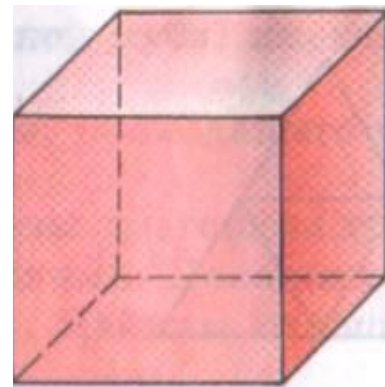
Октаэдр



Икосаэдр



Додекаэдр



Куб

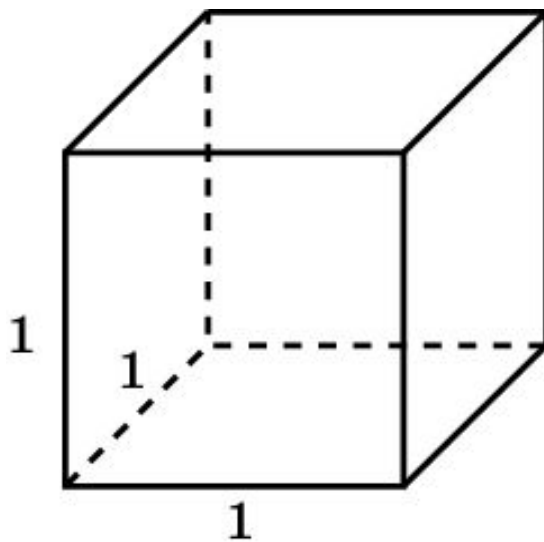
Теорема Эйлера

Число граней + число вершин - число ребер = 2.

Многогранник	тетраэдр	октаэдр	икосаэдр	додекаэдр	куб
Число граней	4	8	20	12	6
Число вершин	4	6	12	20	8
Число ребер	6	12	30	30	12

Упражнение 1

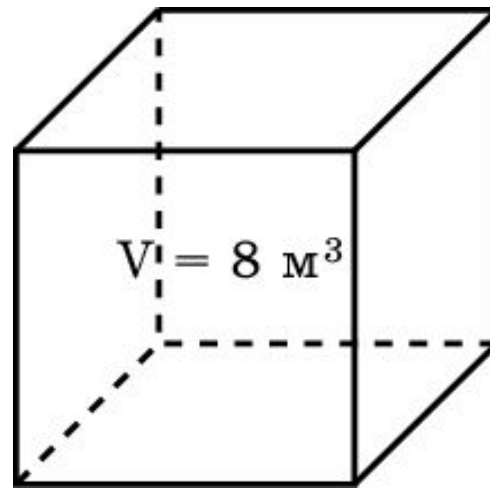
Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?



Ответ: 6.

Упражнение 2

Объем куба равен 8 м^3 . Найдите площадь его поверхности.

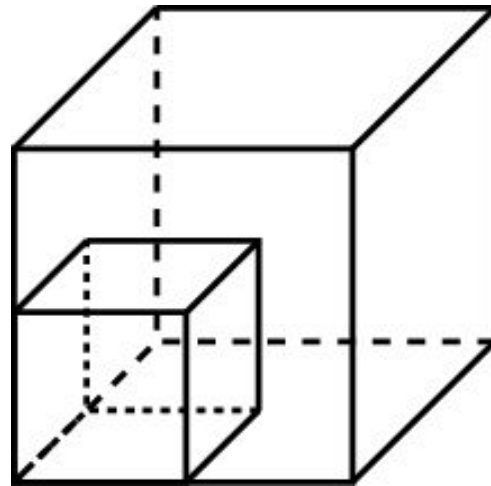


Ответ: 24 м^2 .

Упражнение 3

Как изменится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в:

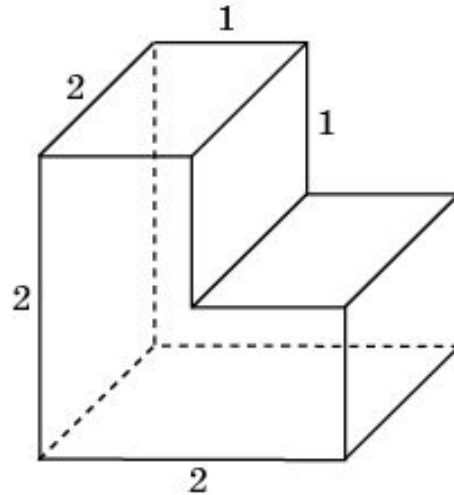
а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?



Ответ: Увеличится в: а) 4 раза; б) 9 раз; в) n^2 раз.

Упражнение 6

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

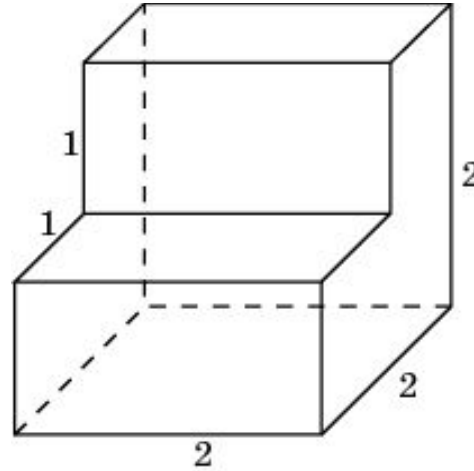


Решение. Поверхность многогранника состоит из двух квадратов площади 4, четырех прямоугольников площади 2 и двух невыпуклых шестиугольников площади 3. Следовательно, площадь поверхности многогранника равна 22.

Ответ. 22.

Упражнение 7

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

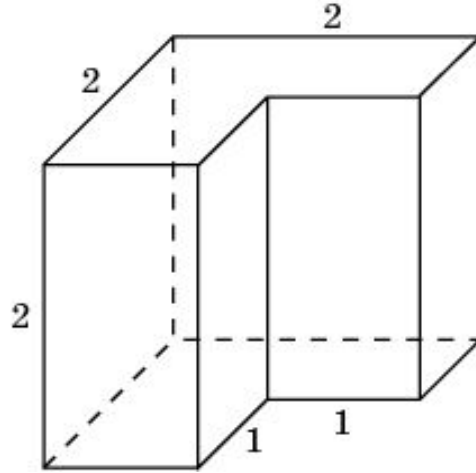


Решение. Поверхность многогранника состоит из двух квадратов площади 4, четырех прямоугольников площади 2, и двух невыпуклых шестиугольников площади 3. Следовательно, площадь поверхности многогранника равна 22.

Ответ. 22.

Упражнение 8

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

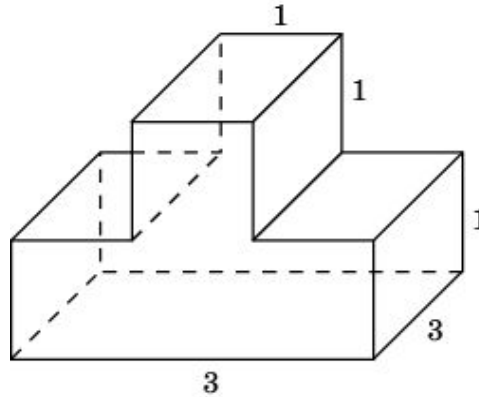


Решение. Поверхность многогранника состоит из двух квадратов площади 4, четырех прямоугольников площади 2 и двух невыпуклых шестиугольников площади 3. Следовательно, площадь поверхности многогранника равна 22.

Ответ. 22.

Упражнение 9

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

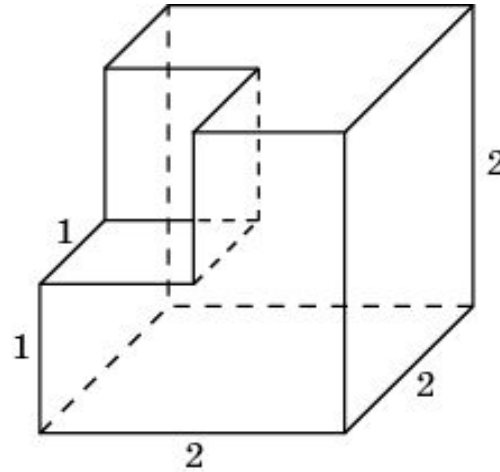


Решение. Поверхность многогранника состоит из квадрата площади 9, семи прямоугольников площади которых равны 3, и двух невыпуклых восьмиугольников площади которых равны 4. Следовательно, площадь поверхности многогранника равна 38.

Ответ. 38.

Упражнение 10

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

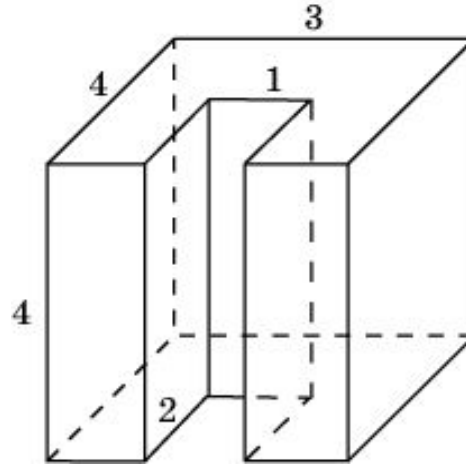


Решение. Поверхность многогранника состоит из трех квадратов площади 4, трех квадратов площади 1 и трех невыпуклых шестиугольников площади 3. Следовательно, площадь поверхности многогранника равна 24.

Ответ. 24.

Упражнение 11

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

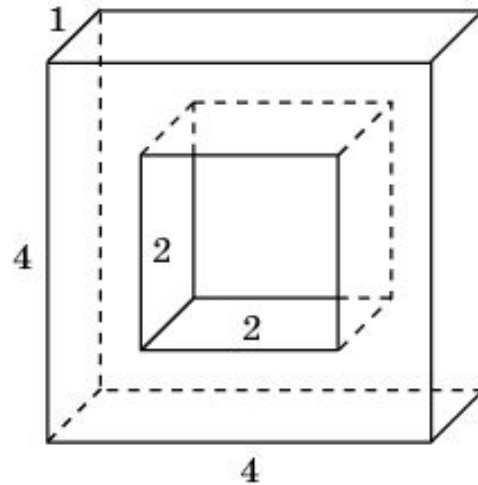


Решение. Поверхность многогранника состоит из двух квадратов площади 16, прямоугольника площади 12, трех прямоугольников площади 4, двух прямоугольников площади 8, и двух невыпуклых восьмиугольников площади 10. Следовательно, площадь поверхности многогранника равна 92.

Ответ. 92.

Упражнение 12

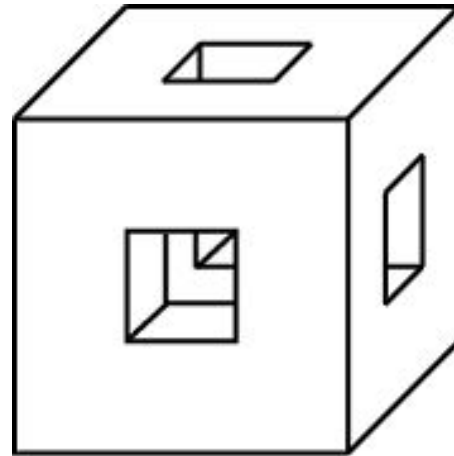
Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ. 48.

Упражнение 13

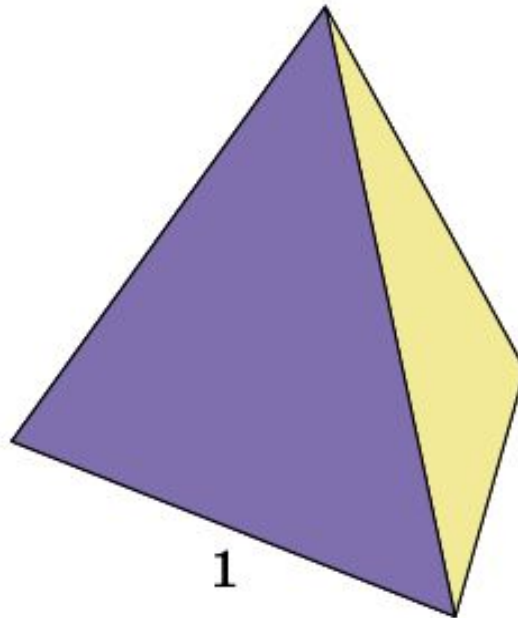
В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см. Найдите площадь поверхности оставшейся части.



Ответ. 288.

Упражнение 14

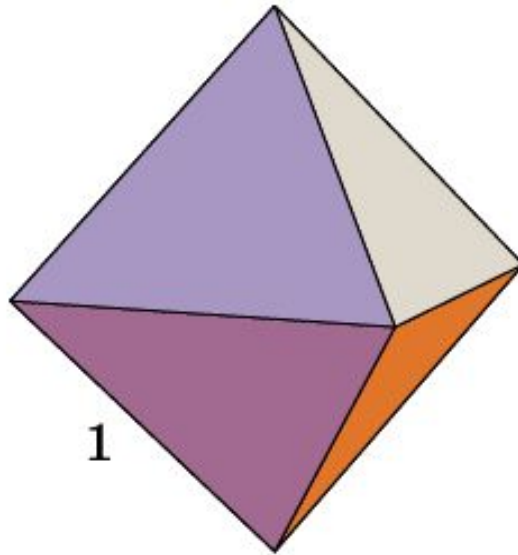
Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1?



Ответ: $\sqrt{3}$.

Упражнение 15

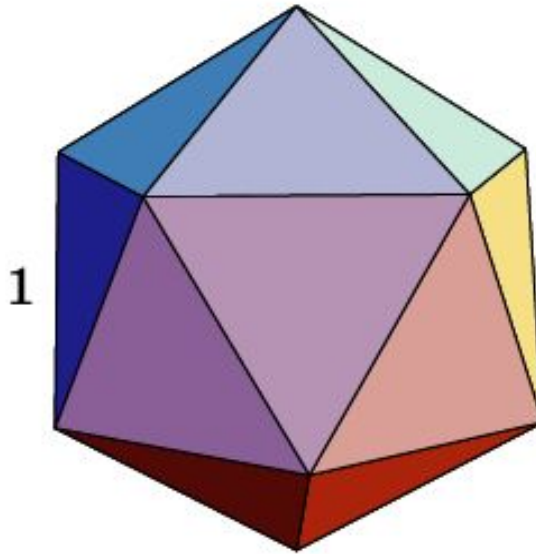
Чему равна площадь поверхности октаэдра с ребром 1?



Ответ: $2\sqrt{3}$.

Упражнение 16

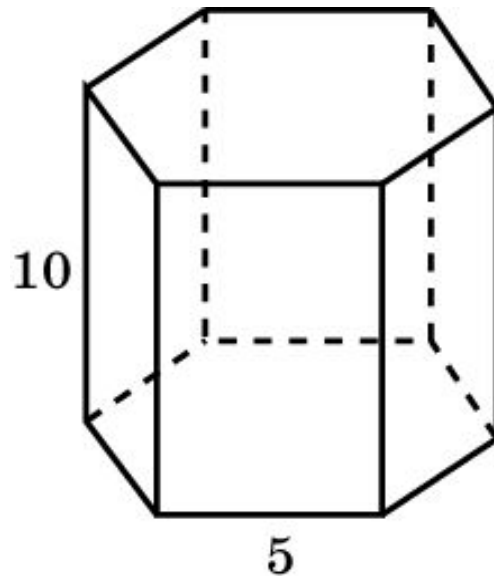
Чему равна площадь поверхности икосаэдра с ребром 1?



Ответ: $5\sqrt{3}$.

Упражнение 17

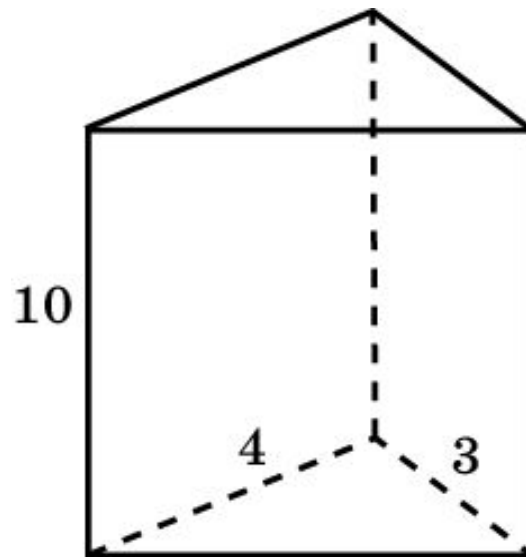
Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 10 см.



Ответ: 300 см^2 .

Упражнение 18

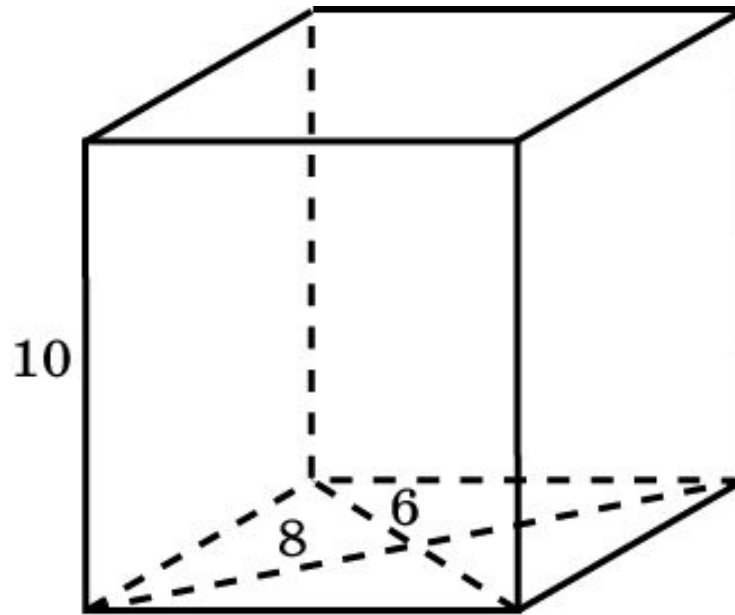
Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.



Ответ: 132 см^2 .

Упражнение 19

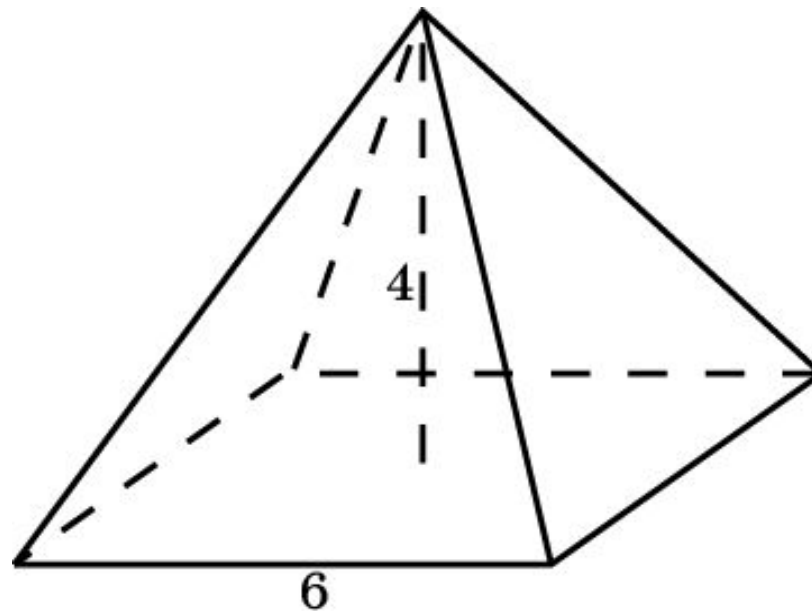
Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см и боковым ребром 10 см.



Ответ: 248 см^2 .

Упражнение 20

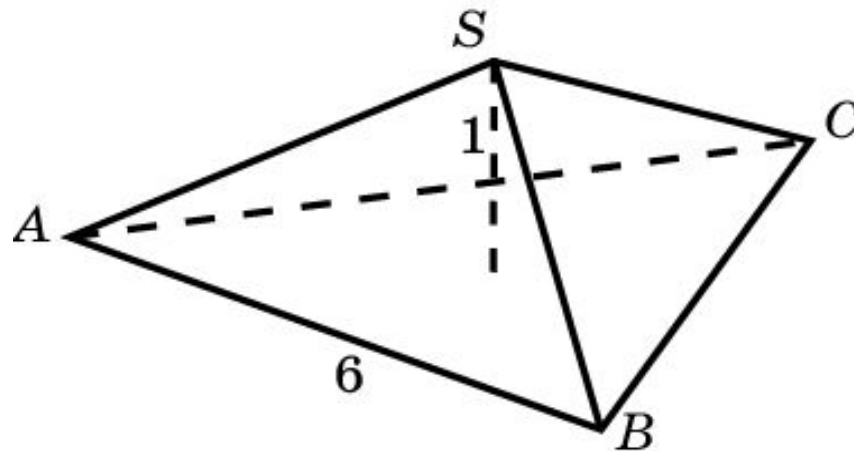
Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота 4 см.



Ответ: 60 см^2 .

Упражнение 21

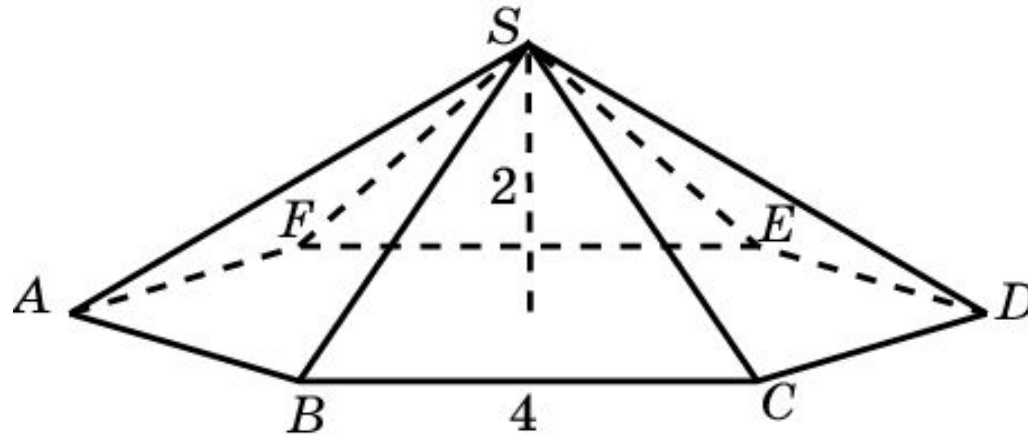
Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см.



Ответ: 18 см^2 .

Упражнение 22

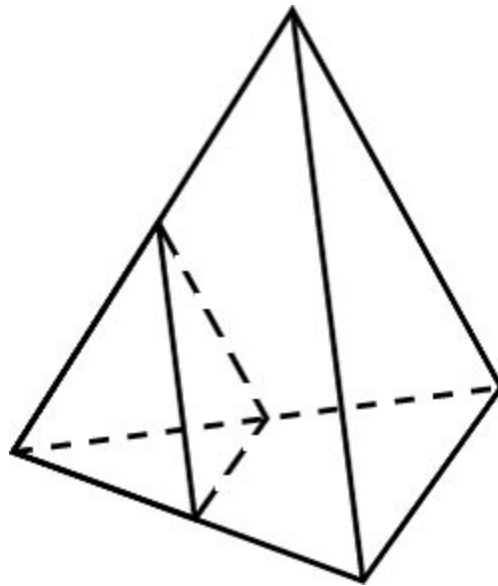
Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания 4 см и высотой 2 см.



Ответ: 48 см^2 .

Упражнение 23

Как изменятся площади боковой и полной поверхностей пирамиды, если все её рёбра:
а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз?



Ответ: а) Увеличатся в 4 раза; б) уменьшатся в 25 раз.