Применение определителя для решения системы линейных уравнений

10 класс алгебра

Выполнила учитель математики Дудрова И.А.

Решение СЛУ

- В 7 классе рассматривали способы решения СЛУ:
- Способ подстановки
- Способ алгебраического сложения
- Графический способ

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 24 \end{cases}$$

Решим СЛУ с помощью определителя

Запишем СЛУ в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & \dots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & \dots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Основные понятия

- **Матрица** это система элементов a_{ij} расположенных в виде прямоугольной таблицы.
- Элементы могут быть числами, функциями или иными величинами, над которыми можно производить алгебраические операции.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица

- Первый индекс элемента матрицы указывает номер строки, а второй – номер столбца.

$$a_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные понятия

- Главной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний.
- При m=n матрица называется квадратной, а число n — её порядком.

Основные понятия

- Рассмотрим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b \end{cases}$$

Определители

- Запишем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определителем второго порядка квадратной матрицы называется число: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Основные понятия

- Определитель обозначается символом detA или Δ;
- числа - a_{11},a_{12},$a_{21}$$a_{22}$ называются элементами определителя;
- a_{11},a_{22} – образуют главну диагональ, а a_{12},a_{21} – побочную.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Основные понятия

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

ПРИМЕР: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$

Вспомогательные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \end{cases}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$$

Алгоритм решения СЛУ способом определителя

- 1) Вычислить главный и вспомогательные определители;
- 2) Найти x и y по формулам Крамера $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$
- 3) Записать ответ

Алгоритм решения СЛУ способом определителя

- **Возможны случаи решения СЛУ:**
- 1) Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение
- 2) Если $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечное множество решений
- 3) Если $\Delta = 0$ **и хотя бы один из** $\Delta_x \neq 0$ **или** $\Delta_y \neq 0$, то система не имеет решений.

Пример

$$\begin{cases} 13x - 15y = 35, \\ 7x + 3y = 41; \end{cases}$$

Вычисляем главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & -15 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 13 \cdot 3 - 7 \cdot (-15) = 39 + 105 = 144$$

Вычисляем вспомогательные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 35 & -15 \\ 41 & 3 \end{vmatrix} = 35 \cdot 3 - 41 \cdot (-15) = 720$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 13 & 35 \\ 7 & 41 \end{vmatrix} = 13 \cdot 41 - 7 \cdot 35 = 288$$

Находим x и y

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{720}{144} = 5$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{288}{144} = 2$$

Ответ: (5; 2)

Решить самостоятельно

$$\begin{cases} 10x - 3y = 25, \\ 5x - 9y = -25; \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-300}{-75} = 4$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-375}{-75} = 5$$

Ответ: (4; 5)

Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0; \end{cases}$$

Преобразуем систему к стандартному виду:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + 4y = -3; \end{cases}$$

Найдем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 45 = 0 \Rightarrow$$

система или не имеет решение, или имеет бесконечно много решений

Находим определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 20 + 6 = 26$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 = -3 - 10 = -13$$

$$\Delta = 0,\ \Delta_x \neq 0,\ \Delta_y \neq 0$$

Ответ: система не имеет решений

Домашнее задание

- Решите систему:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 14 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$