РАЗДЕЛ 1. ВОЗДУШНОЕ СУДНО КАК ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ.

Тема 2 Математические модели продольного и бокового движения самолета

ЛЕКЦИЯ № 8. УРАВНЕНИЯ БОКОВОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА

Учебные вопросы:

1 Математические модели изолированного бокового движения самолета.

2 Линеаризация уравнений бокового движения

Задание на самостоятельную работу:

[1] Вавилов Ю.А., Системы автоматического управления летательных аппаратов. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2009. с.65…70.
[2] Мигунов А.И., Иванов Р.В., Серов А.Н. Системы автоматического управления полетом. Электронный учебник. ВУНЦ ВВС «ВВА», 2016. Л-8, тематический план, учебная программа
[3] Красовский А.А., Вавилов Ю.А., Сучков А.И. Системы автоматического управления летательных аппаратов. ВВИА
им. проф. Н.Е. Жуковского, 1986. с. 32…38.
[7] Кичигин Е.К., Демчук В.А., Лущик А. В., Агеев А.М. Системы автоматического управления полетом. Ч. 1: Учебное пособие. -Воронеж: ВАИУ, 2011. с. 23…25.

Вопрос №1 Математические модели изолированного бокового движения самолета

$$\begin{cases} \cancel{m\dot{W} = F_{x_k}} \\ \cancel{mW\dot{\theta} = F_{y_к}} \\ -mW\dot{\Psi}\cos\theta = F_{z_к} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{J_z\dot{\omega}_z - \left(J_x - J_y\right)\omega_x\omega_y = M_z} \\ J_y\dot{\omega}_y - \cancel{\left(J_z - J_x\right)\omega_z\omega_x} = M_y \\ J_x\dot{\omega}_x - \cancel{\left(J_y - J_z\right)\omega_y\omega_z} = M_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\omega_z = \dot{\vartheta}\cos\gamma - \dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma} \\ \omega_y = \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma + \dot{\vartheta}\sin\gamma \\ \omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\dot{x}_g = W\cos\theta\cos\Psi} \\ \cancel{\dot{y}_g = W\sin\theta} \\ \dot{z}_g = -W\cos\theta\sin\Psi \end{cases}$$

Уловия изолированного бокового движения

$$F_{x_к} = 0$$

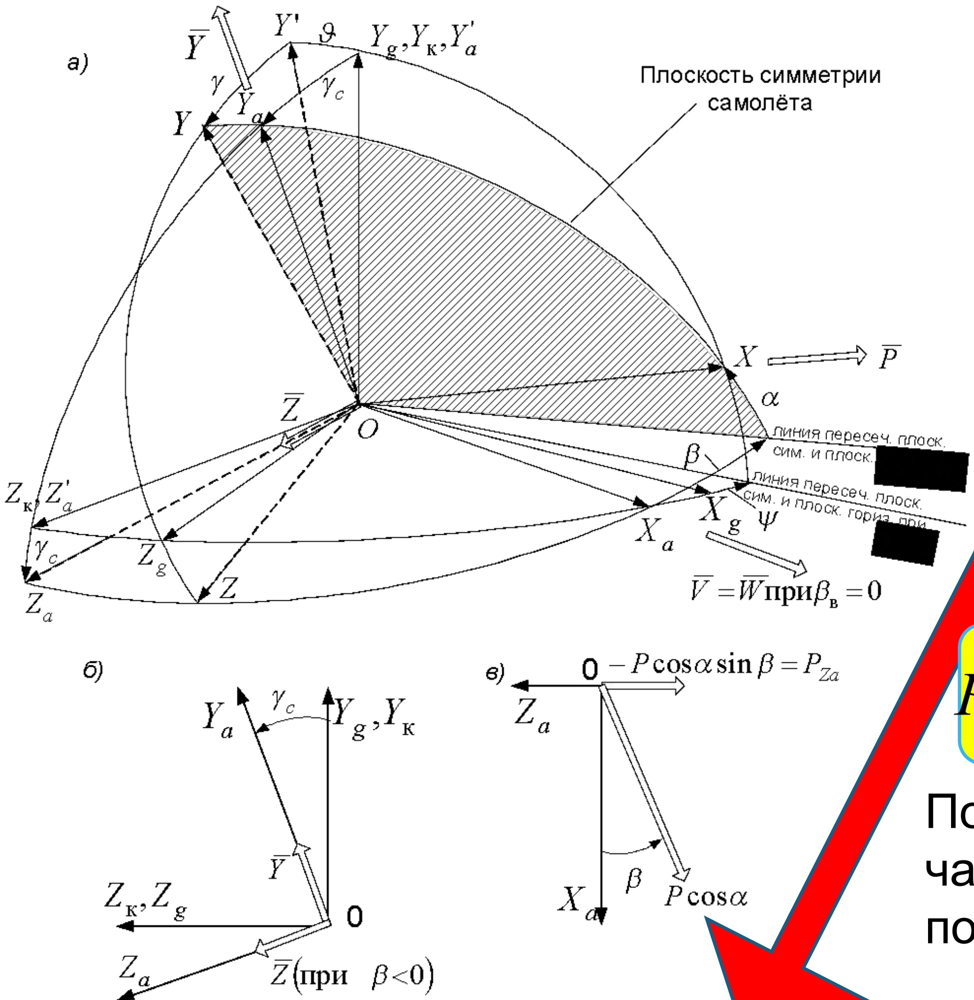
$$F_{y_к} = 0$$

$$M_{z_к} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_z = 0$$

$$\begin{aligned} &-mW\dot{\Psi}\cos\theta = F_{z_к} \\ &J_x\dot{\omega}_x = M_x \\ &J_y\dot{\omega}_y = M_y \\ &\omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\vartheta \\ &\omega_y = \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma + \dot{\vartheta}\sin\gamma \\ &\dot{z}_g = -V_0\cos\theta\sin \\ &\psi = \Psi + \beta - \beta_в \end{aligned} \qquad (1)$$

Вопрос №2
Линеаризация уравнений бокового движения

Определим правую часть первого уравнения. Сила $F_{z_к}$ является суммой проекций сил тяги *P* и аэродинамических сил *Y* и *Z*, которые можно получить из анализа рисунка



$$R_{x_к} = Y\sin\gamma_c + Z\cos\gamma_c$$

$$P_{X_a Z_a} = P\cos\alpha$$

$$P_{y_a} = P\sin\alpha$$

$$P_{z_a} = -P\cos\alpha\sin\beta$$

Перейдем от скоростной СК к траекторной, для этого обратимся к углу γ_c

$$P_{z_к} = P\sin\alpha\sin\gamma_c - P\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_c$$

Подставляя полученные ур-ия в правую часть первого уравнения системы, получим

$$-mW\dot{\Psi}\cos\theta = Y\sin\gamma + Z\cos\gamma + P(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma)$$

Условия линеаризации уравнений бокового движения:

прямолинейный горизонтальный полет в спокойной атмосфере без крена и скольжения (ψ=0, $\gamma_0 = 0, \beta_0 = 0, \theta_0 = 0$, $U_z = 0$).

Уравнение движения центра масс в приращениях имеет такой вид:

$$-mV_0\Delta\dot{\Psi} = Y_0\Delta\gamma + Z^\beta\Delta\beta + \cancel{\Delta P\left(\sin\alpha_0\sin\gamma_0 - \cos\alpha_0\sin\beta_0\cos\gamma_0\right)} +$$

$$+P_0\Delta(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma).$$

«0»

$$P_0(\sin\alpha_0\cos\gamma_0\Delta\gamma - \cos\alpha_0\cos\beta_0\cos\gamma_0\Delta\beta +$$

$$+\cos\alpha_0\sin\beta_0\sin\gamma_0\Delta\gamma) = \boxed{P_0\sin\alpha_0\Delta\gamma - P_0\cos\alpha_0\Delta\beta} \qquad (2)$$

Подставив в исходное уравнение получим:

$$-mV_0\Delta\dot{\Psi} - \left(Y_0 + P_0\sin\alpha_0\right)\Delta\gamma + \left(P_0\cos\alpha_0 - Z^\beta\right)\Delta\beta = 0 \qquad (3)$$

$$a_z^\beta = \frac{P_0\cos\alpha_0 - Z^\beta}{mV_0}$$

$$a_z^\gamma = -\frac{P_0\sin\alpha_0 + Y_0}{mV_0}$$

$$-\Delta\dot{\Psi} + a_z^\beta\Delta\beta + a_z^\gamma\Delta\gamma = 0$$

$$-\Delta\dot{\Psi} + a_z^{\beta}\Delta\beta + a_z^{\gamma}\Delta\gamma = 0$$

Размерность уравнения *с*$^{-1}$, и оно описывает процесс изменения скорости поворота траектории в плоскости горизонта при нарушении боковой балансировки.

-первая составляющая создается в результате появления угла скольжения и зависит от силы тяги и боковой аэродинамической силы,

-вторая – в результате появления крена самолета и возникновения боковой силы, обусловленной действием подъемной силы и силы тяги.

При линеаризации уравнений моментов системы уравнений основные факторы, определяющие M_x и M_y .

$$\begin{aligned} M_x &= M_x\left(V, H, \beta, \omega_x, \omega_y, \delta_{\text{э}}, \delta_{\text{н}}\right) \\ M_y &= M_y\left(V, H, \beta, \omega_x, \omega_y, \delta_{\text{э}}, \delta_{\text{н}}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

Приращения M_i имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= M_x^{\beta}\Delta\beta + M_x^{\omega_x}\omega_x + M_x^{\omega_y}\omega_y + M_x^{\delta_{\text{э}}}\Delta\delta_{\text{э}} + M_x^{\delta_{\text{н}}}\Delta\delta_{\text{н}} \\ \Delta M_y &= M_y^{\beta}\Delta\beta + M_y^{\omega_x}\omega_x + M_y^{\omega_y}\omega_y + M_y^{\delta_{\text{э}}}\Delta\delta_{\text{э}} + M_y^{\delta_{\text{н}}}\Delta\delta_{\text{н}} \end{aligned} \quad (5)$$

Осуществим линеаризацию кинематических уравнений

$$\Delta\omega_x = \Delta\dot\gamma + \Delta\dot\psi \sin\vartheta_0 + \dot\psi_0 \cos\vartheta_0 \Delta\vartheta$$

$$\Delta\omega_y = \Delta\dot\psi_0 \cos\vartheta_0 - \dot\psi_0 \cos\gamma_0 \sin\vartheta_0 \Delta\vartheta + \Delta\dot\vartheta \sin\gamma_0 + \dot\vartheta_0 \cos\gamma_0 \Delta\gamma$$

$$\Delta\dot z_T = -W \cos\theta_0 \sin\Psi_0 + W_0 \sin\theta_0 \sin\Psi_0 \Delta\theta - W_0 \cos\theta_0 \cos\Psi_0 \Delta\Psi$$

$$\Delta\psi = \Delta\Psi + \Delta\beta - \beta_{\text{в}} \qquad (6)$$

Если учесть малость угла ϑ_0 и отсутствие в невозмущенном движении Ψ_0, γ_0, θ_0, ψ_0, ϑ_0 и ветра $\Delta W = \Delta V$ и $W_0 = V_0$, то

$$\Delta\omega_x = \Delta\dot\gamma; \quad \Delta\omega_y = \Delta\dot\psi; \quad \Delta\dot z = -V_0 \Delta\Psi; \quad \Delta\psi = \Delta\Psi + \Delta\beta - \beta_{\text{в}}; \quad \beta_{\text{в}} = -\frac{U_z}{V_0}$$

(7)

$$J_x \Delta\ddot\gamma = M_x^{\beta} \Delta\beta + M_x^{\omega_x} \Delta\dot\gamma + M_x^{\omega_y} \Delta\dot\psi + M_x^{\delta_{\text{э}}} \Delta\delta_{\text{э}} + M_x^{\delta_{\text{н}}} \Delta\delta_{\text{н}}$$

$$J_y \Delta\ddot\psi = M_y^{\beta} \Delta\beta + M_y^{\omega_x} \Delta\dot\gamma + M_y^{\omega_y} \Delta\dot\psi + M_y^{\delta_{\text{э}}} \Delta\delta_{\text{э}} + M_x^{\delta_{\text{н}}} \Delta\delta_{\text{н}}$$

Разделим правую и левую части на соответствующие моменты инерции:

$$\Delta\ddot{\gamma} = \underbrace{\frac{M_x^{\beta}}{J_x}}_{\boxed{a_{mx}^{\beta}}}\Delta\beta + \underbrace{\frac{M_x^{\omega_x}}{J_x}}_{\boxed{a_{mx}^{\omega_x}}}\Delta\dot{\gamma} + \underbrace{\frac{M_x^{\omega_y}}{J_x}}_{\boxed{a_{mx}^{\omega_y}}}\Delta\dot{\psi} + \underbrace{\frac{M_x^{\delta_э}}{J_x}}_{\boxed{a_{mx}^{\delta_э}}}\Delta\delta_э + \underbrace{\frac{{}^{\delta_н}}{J_x}}_{\boxed{a_{mx}^{\delta_н}}}\Delta\delta_н \qquad (8)$$

$$\Delta\ddot{\psi} = \underbrace{\frac{M_y^{\beta}}{J_y}}_{\boxed{a_{my}^{\beta}}}\Delta\beta + \underbrace{\frac{M_y^{\omega_x}}{J_y}}_{\boxed{a_{my}^{\omega_x}}}\Delta\dot{\gamma} + \underbrace{\frac{M_y^{\omega_y}}{J_y}}_{\boxed{a_{my}^{\omega_y}}}\Delta\dot{\psi} + \underbrace{\frac{M_y^{\delta_э}}{J_y}}_{\boxed{a_{my}^{\delta_н}}}\Delta\delta_э + \underbrace{\frac{M_x^{\delta_н}}{J_y}}_{\boxed{a_{my}^{\delta_э}}}\Delta\delta_н$$

$a_{mx}^{\delta_э}$, $a_{my}^{\delta_н}$ - коэффициенты, характеризующие эффективность отклонения рулевых органов самолета

Оба уравнения имеют размерность c^{-2} и описывают процессы развития угловых ускорений по крену и рысканию при нарушении боковой балансировки.

Система линеаризованных уравнений изолированного бокового движения

$$-\Delta\dot{\Psi} + a_z^{\beta}\Delta\beta + a_z^{\gamma}\Delta\gamma = 0;$$

$$\Delta\ddot{\gamma} + a_{mx}^{\omega_x}\Delta\dot{\gamma} + a_{mx}^{\omega_y}\Delta\dot{\psi} + a_{mx}^{\beta}\Delta\beta = a_{mx}^{\delta_э}\left(-\Delta\delta_э\right) + a_{mx}^{\delta_н}\Delta\delta_н;$$

$$\Delta\ddot{\psi} + a_{my}^{\omega_y}\Delta\dot{\psi} + a_{my}^{\omega_x}\Delta\dot{\gamma} + a_{my}^{\beta}\Delta\beta = a_{my}^{\delta_н}\left(-\Delta\delta_н\right) + a_{my}^{\delta_э}\Delta\delta_э;$$

(9)

$$\Delta\psi - \Delta\Psi - \Delta\beta = -\beta_в;$$

$$\Delta\dot{z} = -V_0\Delta\Psi.$$