Лекция № 9

Тема 4. Статистические методы обработки результатов измерений и контроля качества

4.6. Обработка результатов косвенных измерений

4.7. Обработка результатов совместных измерений

Результаты тестов лекций по МСС

Группа АК 21- 1														
Ф.И.О.	**Лекция 1**		**Лекция 2**		**Лекция 6**		**Лекция 8**		**Лекция 5**		**Лекция 6**		**Лекция 7**	
Батомункуев	5	3	5	3	1	2	7	5						
Беспятых	4	2	3	2	5	3	6	4						
Биртанов	5	3	5	3	3	2								
Воробьева	4	2	2	2	4	2								
Ефимов	4	2	5	3	5	3								
Жалсараев	6	4	4	2										
Колмаков	3	2	3	2	4	2	5	3						
Коровин	4	2	4	2	5	3	5	3						
Нимаев	4	2	1	2	3	2	6	4						
Санников	5	3	1	2	2	2	5	3						
Турчановский	3	2	4	2	4	2	7	5						
Шалапугин	5	3	5	3	3	2	7	5						

4.6. Обработка результатов косвенных измерений

При косвенных измерениях искомое значение величины находят расчетом на основе измерения других величин, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью

$$A = f(x_1, ..., x_m).$$

Результатом косвенного измерения является оценка величины *A* , которую находят подстановкой в формулу оценок аргументов x_i .

Линейные косвенные измерения

$$A = \sum_{i=1}^{m} b_i x_i$$

Погрешности измерения аргументов могут быть заданы своими границами , либо доверительными границами *с* доверительными вероятностями P_i.

При малом числе аргументов (меньше пяти) простая оценка погрешности результата получается суммированием предельных погрешностей

$$\Delta A = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_m$$

(m < 5)

4.6. Обработка результатов косвенных измерений

Однако эта оценка является излишне завышенной, поскольку такое суммирование фактически означает, что погрешности измерения всех аргументов одновременно имеют максимальное значение и совпадают по знаку. Вероятность такого совпадения практически равна нулю. Для нахождения более реалистичной оценки переходят к статистическому суммированию погрешностей аргументов. Полагая, что в заданных границах погрешности аргументов распределены равномерно, доверительные границы $\Delta A(P)$ погрешности результата измерения рассчитывают по формуле

$$\Delta A(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \Delta x_i^2}$$

k = 1,1 при P = 0,95 и k = 1,4 при P = 0,99, зависит от числа составляющих неисключенных систематических погрешностей.

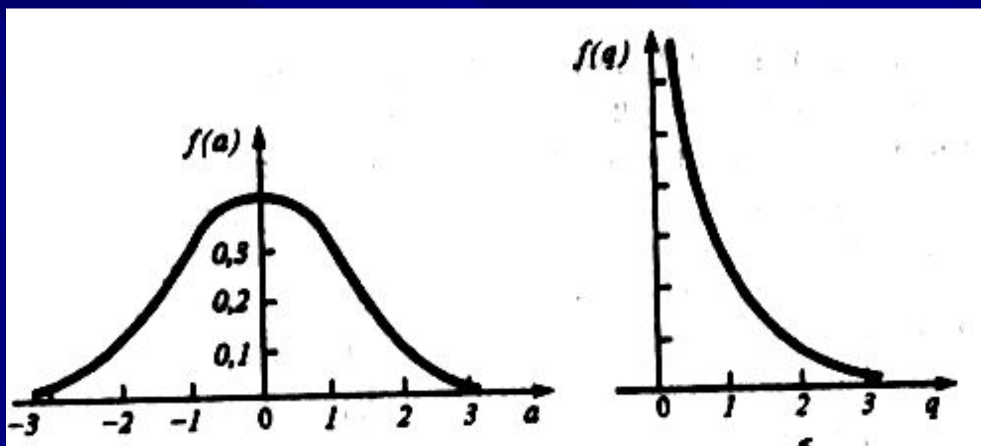
Нелинейные косвенные измерения

Такие измерения характеризуются тем, что результаты измерений аргументов подвергаются функциональным преобразованиям, что приводит к изменению законов их распределения.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$q = x^2$$

$$f(q) = \frac{1}{5\sqrt{q}} \cdot e^{-\frac{q}{2}}$$



При измерениях отказываются от использования интервальных оценок погрешности результата, ограничиваясь приближенной верхней оценкой ее границ. В основе приближенного оценивания погрешности лежит линеаризация функции $A = f\left(x_1,\dots, x_m\right)$ ая обработка результатов, как при линейных измерениях.

Нелинейные косвенные измерения

Пусть измеряемая величина *A* является функцией от $x_1, ..., x_m$

$$A = f(x_1, ..., x_m)$$

Для простоты считают, что значения распределены по нормальному закону, измерения равноточные, погрешности измерения не коррелированы (если погрешность не вызвана каким-либо общим фактором, изменяющимся случайным образом, например температурой).

Очевидно, что абсолютные погрешности измеряемой величины являются функцией погрешности прямых измерений

$$\Delta A = F(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m).$$

В простейшем случае для одной переменной $A = f(x)$

$$A + \Delta A = f(x + \Delta x)$$

$$A + \Delta A = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x.$$

Нелинейные косвенные измерения

$$A + \Delta A = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x.$$

$$\Delta A = \pm\frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x; \qquad \delta_A = \frac{\Delta A}{A}\cdot 100\% = \pm\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\Delta x}{A}\cdot 100\%$$

В общем случае для функции $A = f(x_1,..., x_m)$

$$\Delta A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\Delta x_2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)\Delta x_m$$

Если результаты прямых измерений x_i определены со средними квадратическими отклонениями σ_i, то оценка среднего квадратического отклонения результата косвенных измерений

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2}.$$

Нелинейные косвенные измерения

При коррелированных погрешностях измерений

$$\sigma_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma_i \sigma_j r_{ij}},$$

r_{ij} **- коэффициент корреляции** $(-1 \le r_{ij} \le +1)$.

$$E_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i$$

- частная погрешность **косвенного измерения.**

$$\sigma_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} E_i^2}$$

Если $(E_k < \sigma_A/3)$, **то ею можно пренебречь. Это условие называется *критерием ничтожных погрешностей*, а сами погрешности, отвечающие этому условию, называются *ничтожными*.**

Правила оценивания погрешности результата косвенного измерения

Правило 1.
Погрешности в суммах и разностях.

$$A = x_1 \pm x_2$$

$$\Delta A = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Правило 2. ***Погрешности в произведениях и частных.***

$$A = x_1 \cdot x_2 \quad A = x_1 / x_2 \quad \delta A = \delta x_1 + \delta x_2$$

Правило 3. ***Измеренная величина умножается на точное число.***

$$A = C \cdot x \quad \delta A = |C| \delta x$$

Правило 4. ***Возведение в степень.***

$$A = x^n \quad \delta A = n \delta x$$

Правило 5. ***Погрешность в произвольной функции одной переменной.***

$$\delta A = \frac{dA}{dx} \delta x$$

4.7. Обработка результатов совместных измерений

Совместные измерения – *это измерения двух или более неоднородных физических величин для определения зависимости между ними*

Целью совместных измерений является установление функциональной зависимости между величинами.

Для отыскания зависимости $y = f(x)$ между переменными x и y необходимо последовательно устанавливая и измеряя значения x, одновременно измерять величину y, получив, таким образом координаты исследуемой зависимости (x_i, y_i).

Возникающая задача при выполнении совместных измерений:

1. Аппроксимация зависимости по экспериментальным данным так, чтобы она наилучшим образом описывала истинную зависимость.

2. Ответ на вопрос действительно ли аппроксимирующая функция наилучшим образом приближается к искомой зависимости и какой мерой можно оценить приближение экспериментальной зависимости к истинной.

4.7. Обработка результатов совместных измерений

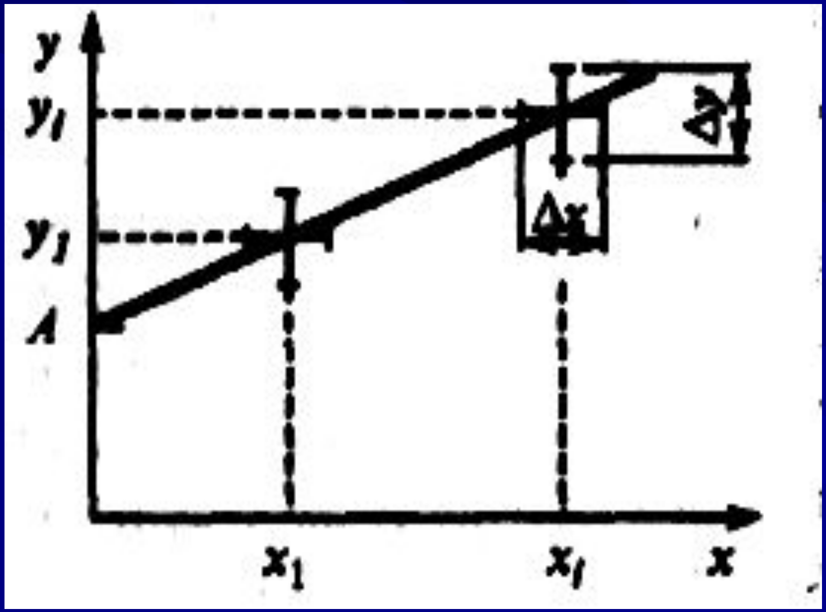
Подход к решению подобных задач возможен на основе применения метода наименьших квадратов. В этом методе оценки параметров зависимости определяют из условия, что сумма квадратов отклонений расчетных значений аппроксимирующей функции от экспериментальных значений должна быть минимальна.

Результаты измерений должны удовлетворять следующим условиям, при которых получаются несмещенные оценки параметров зависимости, имеющие минимальные дисперсии:

- значения аргументов x_i известны точно;
- систематические погрешности исключены и результаты измерений y_i содержат лишь случайные погрешности, которые независимы и имеют одинаковые дисперсии;
- погрешности измерения y_i имеют нормальное распределение.

4.7 . Обработка результатов совместных измерений

Построение методом наименьших квадратов линейной зависимости ***y = A + Bx*** **.**



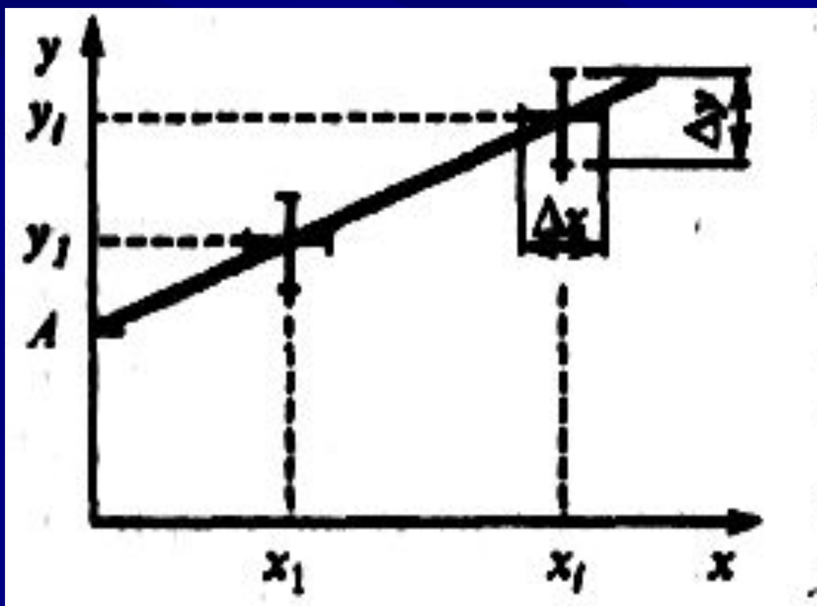
Задача определения наилучшей прямой линии, аппроксимирующей набор из *m* экспериментальных точек $(x_i, y_i), \ldots, (x_m, y_m)$, сводится к нахождению значений постоянных *A* и *B*

В теории метода наименьших квадратов показано, что наилучшие оценки для неизвестных постоянных *A* и *B* это те, для которых минимально выражение

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left[y_i - (A + B\,x_i)\right]^2}{\sigma_y^{\;2}}$$

4.7 . Обработка результатов совместных измерений

Построение методом наименьших квадратов линейной зависимости *y = A + Bx .*



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{T} \frac{\left[y_i - (A + B\,x_i)\right]^2}{\sigma_y^{\ 2}}$$

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{m} \frac{2}{\sigma_y^2}\left[y_i - (A + Bx_i)\right] &= 0; \\ -\sum_{i=1}^{m} \frac{2}{\sigma_y^2}\left[y_i - (A + Bx_i)\right]x_i &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i &= mA + B\sum_{i=1}^{m} x_i; \\ \sum_{i=1}^{m} y_i x_i &= A\sum_{i=1}^{m} x_i + B\sum_{i=1}^{m} x_i^2. \end{aligned}\right\}$$

Построение методом наименьших квадратов линейной зависимости *y = A + Bx*

$$B = \frac{m\sum_{i=1}^{m} y_i x_i - \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i}{m} - B\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m}$$

Представление о приближении аппроксимирующей функции к истинной зависимости получим, оценив погрешности в определении постоянных *A* и *B*, которые определяются расчетом по правилам косвенных измерений, исходя из погрешностей измерения $\Delta y_1, \ldots, \Delta y_m$.

СКО погрешности измерения σ_y может быть известно до начала измерений, либо вычислено по результатам измерения

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{m-2}\sum_{i=1}^{m}\left[y_i - \left(A + Bx_i\right)\right]^2$$

$$G = m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2$$

$$\sigma_A^2 = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \Big/ G$$

$$\sigma_B^2 = m\sigma_y^2 \Big/ G$$

Установление зависимости сопротивления металлического проводника от температуры

$R_t = R_0(1 + \alpha t)$ $R_t = A + B t$ $A = R_0$; $B = R_0\alpha$.

Результаты совместных измерений:

t^0,C … … .	10	20	30	40
R_t, Ом … …	10,3	10,9	11,3	11,6

$$B = \frac{4\sum_{i=1}^{4} y_i x_i - \sum_{i=1}^{4} y_i \sum_{i=1}^{4} x_i}{4\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2}$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i}{4} - B\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4}$$

$y = R_t$

$x = t$

A = 9,95 Ом; B = 0,043 Ом/град

σ_{Rt} = 0,2 Ом – из пасп. данных

σ_A =0,24 Ом; σ_B = 0,009 Ом/град

A = (9,95 ± 0,24) Ом;

B = (0,043 ± 0,009) Ом/град.

Проверка усвоения материала лекции 7

ЗАДАНИЕ № 1 ***(выберите один вариант ответа)***

Электрическая мощность P определяется по результатам измерений падения напряжения U = 240 ± 3 В и силы тока I = 5 ± 0,1 А, P = UI. Погрешности измерений носят систематический характер. Предельные границы истинного значения мощности равны …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1 1191 Вт $\le P \le$ 1209 Вт
2 1161 Вт $\le P \le$ 1239 Вт
3 1190,7 Вт $\le P \le$ 1208,7 Вт
4 1161,3 Вт $\le$ P $\le$ 1190,7 Вт

Проверка усвоения материала лекции 7

ЗАДАНИЕ № 2 ***(выберите один вариант ответа)***

Электрическая мощность P определяется по результатам измерений падения напряжения U = 220 В и силы тока I = 5 А, P = UI. Средние квадратичные отклонения показаний: вольтметра σ_U = 1 В, амперметра σ_I = 0,04 А . Результат измерения мощности с вероятностью P = 0,9944 (t_p = 2,77) можно записать …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1 P = 1100 ± 14 Вт, P = 0,9944
2 P = 1100 ± 0,1 Вт, P = 0,9944
3 P = 1100 ± 28 Вт, P = 0,9944
4 P = 1100 ± 38 Вт , t_p = 2,77

Проверка усвоения материала лекции 7

ЗАДАНИЕ № 3 ***(выберите один вариант ответа*)**

Коэффициент трения определяется по формуле $k_{тр} = F_{тр}/F_N$
Измерением получены значения $F_{тр} = 50 \pm 0,5Н$, $F_N = 1000 \pm 10$ Н.
Результат определения $k_{тр}$ следует записать …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1 $k_{тр} = (50,00 \pm 0,05) * 10^{-3}$
2 $k_{тр} = (50,0 \pm 0,5\ кг) * 10^{-3}$
3 $k_{тр} = 51 * 10^{-3}$
4 $k_{тр} = (50 \pm 1) * 10^{-3}$