Основные определения динамики

Динамика – часть теоретической механики, изучающая движение материальных объектов в зависимости от сил, вызвавших это движение

Основные положения динамики и аксиомы впервые выдвинуты Ньютоном и Галилеем в XVII веке.

Основные положения динамики сформулированы применительно к материальной точке.

В основе классической динамики лежат два основных допущения:

1. ***Существование абсолютного пространства:***
   пространство обладает чисто геометрическими свойствами, не зависящими от материи и ее движения.
2. ***Абсолютное время:***
   время считается независимым.

На основании этих допущений утверждается:

1. ***Существование абсолютно неподвижной системы отсчета:***
2. ***Независимость изменения времени от движения системы отсчета:***

В большинстве задач динамики массы движущихся материальных точек не зависят от скоростей движения и остаются постоянными при всех обстоятельствах, обусловливающих движение.

Аксиомы динамики

1. Аксиома 1 *1-й закон Ньютона*

Изолированная материальная точка (не подверженная воздействию других объектов) относительно неподвижной системе отсчета движется <u>равномерно</u> и <u>прямолинейно</u> ($\vec{v} = \overrightarrow{const}$) или находится в покое ($\vec{v} = 0$)

Такое кинематическое состояние точки называется инерциальным.

Инерциальное кинематическое состояние точки определяется равенством нулю ее ускорения $\vec{a} = 0$.

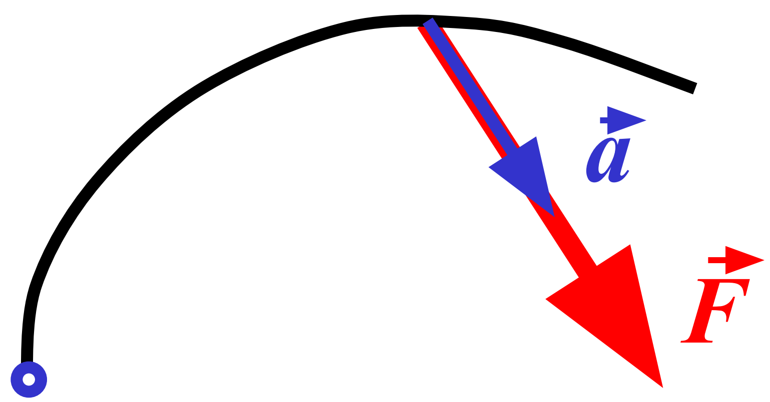
Система отсчета, движущаяся <u>поступательно</u>, <u>равномерно</u> и <u>прямолинейно</u> называется инерциальной.

Аксиома применима и к инерциальным системам отсчета.

Аксиомы динамики

2. Аксиома 2 *2-й закон Ньютона*

Ускорение, сообщаемое материальной точке относительно инерциальной системы отсчета, прямо пропорционально силе, действующей на точку, и обратно пропорционально массе этой точки



$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Массой называется физическая характеристика и мера инерционных свойств вещества.

В поле силы тяжести Земли масса может быть определена по формуле:

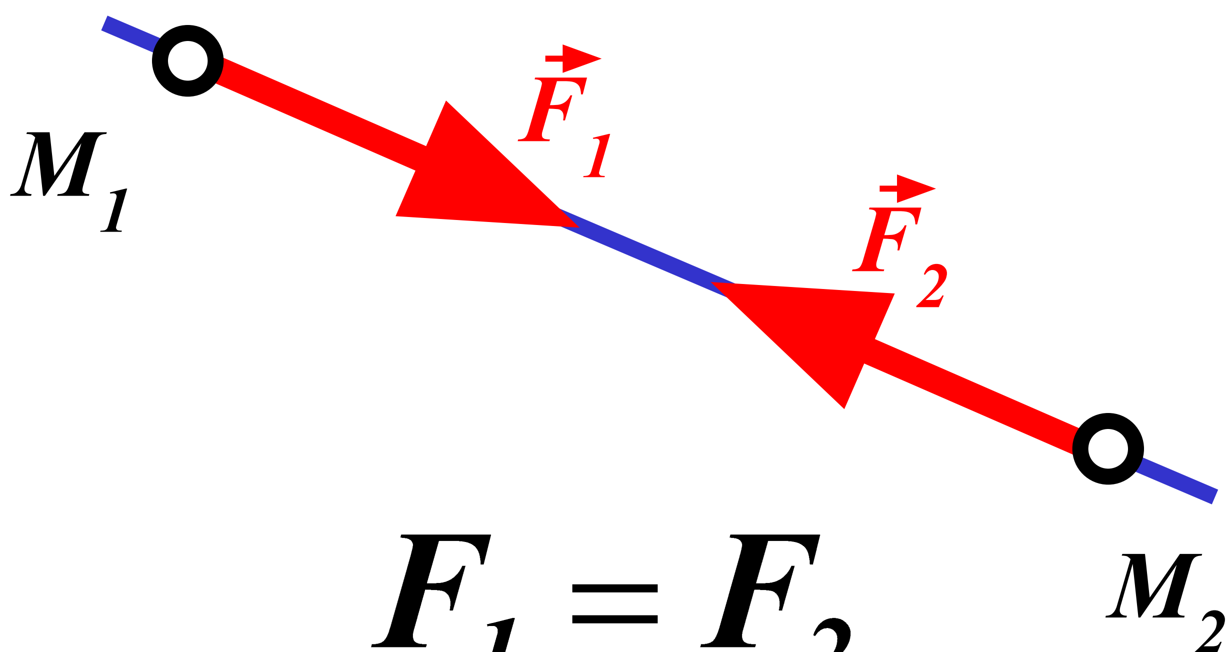
$$m = \frac{P}{g}$$ ***(P – сила тяжести, g – ускорение свободного падения)***

Масса является также мерой и характеристикой гравитационных свойств вещества.

Аксиомы динамики

3. Аксиома 3 *3-й закон Ньютона*

Две материальные точки взаимодействуют с силами, одинаковыми по модулю и действующими по одной прямой, соединяющей точки, в противоположные стороны



$$F_1 = F_2$$

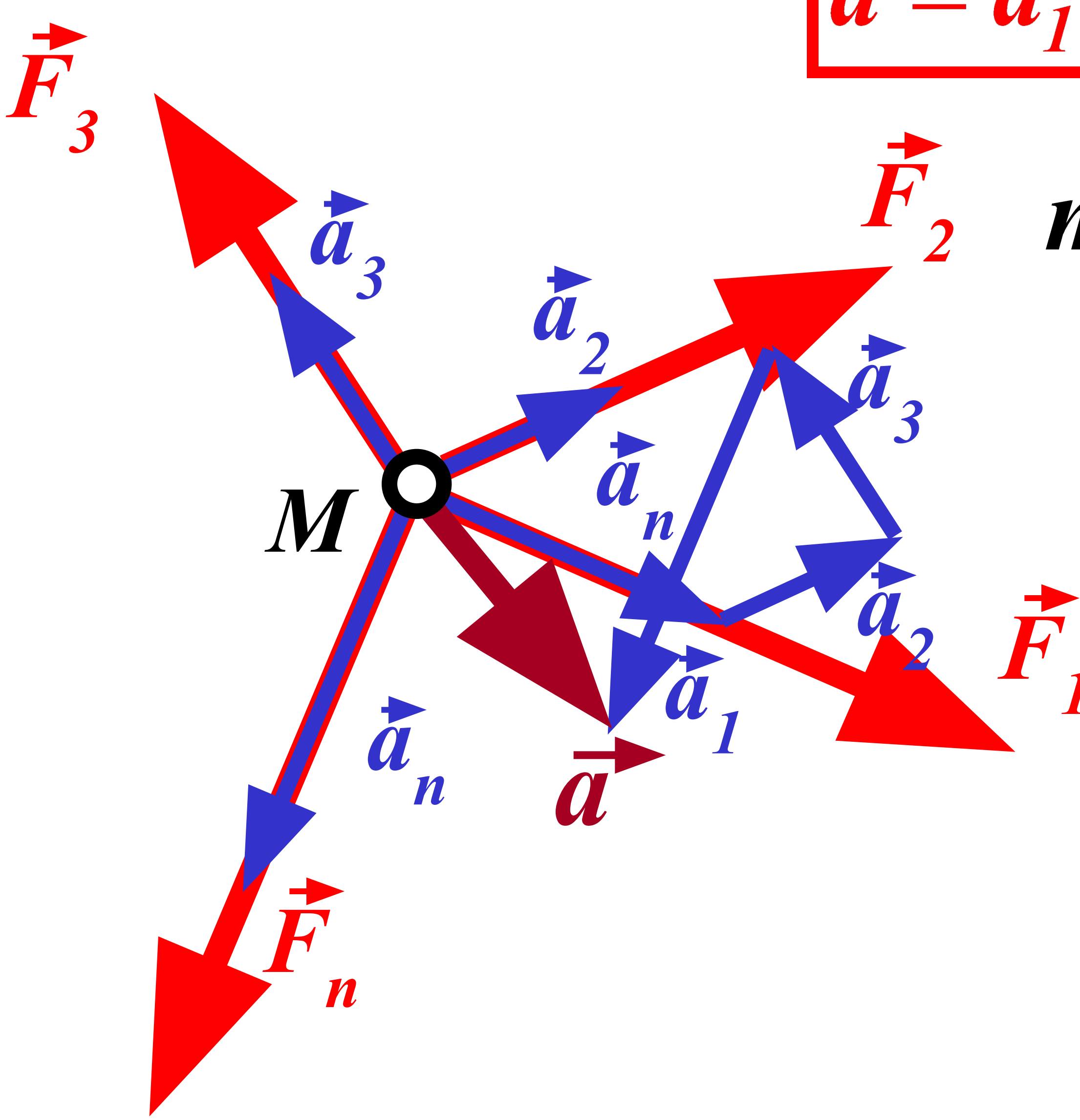
$$\boxed{\vec F_1 = -\vec F_2}$$

Аксиомы динамики

4. Аксиома 4 *Принцип суперпозиции*

Материальная точка, под действием нескольких сил приобретает ускорение, равное векторной сумме тех ускорений, которые она бы получила от каждой силы, действующей независимо от других

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n}$$



$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_1;\ m\vec{a}_2 = \vec{F}_2;\ m\vec{a}_3 = \vec{F}_3;\ m\vec{a}_n = \vec{F}_n;$$

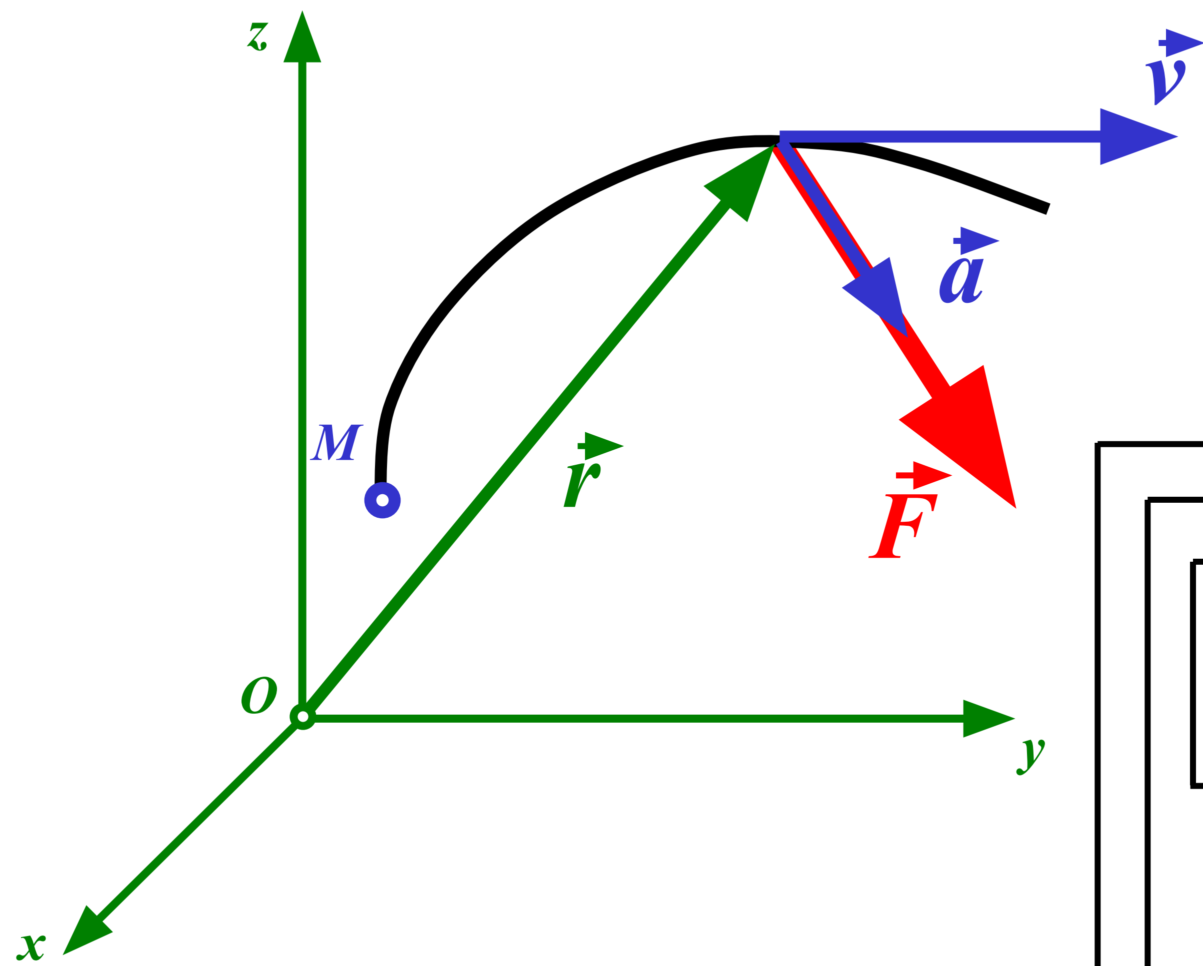
$$m\vec{a} = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + m\vec{a}_3 + \ldots + m\vec{a}_n$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots \vec{F}_4;$$

$$\boxed{m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}$$

Дифференциальные уравнения движения точки

1. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовой форме



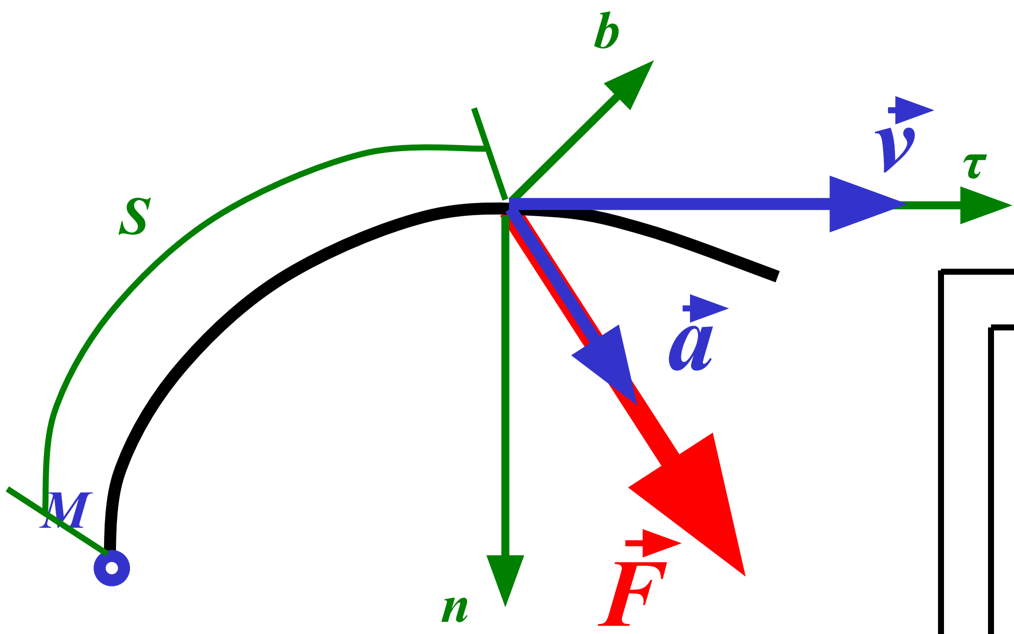
$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i; \qquad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2};$$

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i;}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix};\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy};\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iz}; \end{aligned}}$$

Дифференциальные уравнения движения точки

2. Дифференциальные уравнения движения точки в естественной форме



$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$ma_\tau = \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad m\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau};$$

$$ma_n = \sum_{i=1}^{n} F_{in}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad m\frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} F_{in};$$

$$ma_b = \sum_{i=1}^{n} F_{ib}; \quad a_b = 0; \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} F_{ib};$$

Дифференциальные уравнения движения точки

3. Две основные задачи динамики точки

3.1. Первая задача (прямая)

Зная массу точки и закон ее движения определить действующую на точку силу.

Уравнения движения точки:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t);$$

Скорость точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{df_1}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{df_2}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{df_3}{dt};$$

Ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2};$$

Сила:

$$F_x = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}; \; F_y = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2}; \; F_z = ma_z = m\frac{d^2z}{dt^2};$$

Дифференциальные уравнения движения точки

3. Две основные задачи динамики точки

3.2. Вторая задача (обратная)

По заданной массе и действующей на точку силе определить движение точки.

Сила: $F_x = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});\quad F_y = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});\quad F_z = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$

Скорость точки:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x;\; m\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt;\; m(v_x - v_{x0}) = \Phi_x,\;\; где\;\; \Phi_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt;$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = F_y;\; m\int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt;\; m(v_y - v_{y0}) = \Phi_y,\;\; где\;\; \Phi_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt;$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = F_z;\; m\int_{v_{z0}}^{v_z} dv_z = \int_{t_0}^{t} F_z dt;\; m(v_z - v_{z0}) = \Phi_y,\;\; где\;\; \Phi_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt;$$

Уравнения движения точки:

$$mv_x = \Phi_x + mv_{x0},\; m\frac{dx}{dt} = \Phi_x + mv_{x0},\; mdx = (\Phi_x + mv_{x0})dt,\; m\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \Phi_x dt + \int_{t_0}^{t} mv_{x0} dt,\;\; x = \frac{1}{m}\Psi_x + v_{x0}t + x_0,$$

$$где\;\; \Psi_x = \int_{t_0}^{t} \Phi_x dt;$$

$$mv_y = \Phi_y + mv_{y0},\; m\frac{dy}{dt} = \Phi_y + mv_{y0},\; mdy = (\Phi_y + mv_{y0})dt,\; m\int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} \Phi_y dt + \int_{t_0}^{t} mv_{y0} dt,\;\; y = \frac{1}{m}\Psi_y + v_{y0}t + y_0,$$

$$где\;\; \Psi_y = \int_{t_0}^{t} \Phi_y dt;$$

$$mv_z = \Phi_z + mv_{z0},\; m\frac{dz}{dt} = \Phi_z + mv_{z0},\; mdz = (\Phi_z + mv_{z0})dt,\; m\int_{z_0}^{z} dx = \int_{t_0}^{t} \Phi_z dt + \int_{t_0}^{t} mv_{z0} dt,\;\; z = \frac{1}{m}\Psi_z + v_{z0}t + z_0,$$

$$где\;\; \Psi_z = \int_{t_0}^{t} \Phi_z dt;$$

Дифференциальные уравнения движения точки

3. Две основные задачи динамики точки

3.3. Некоторые способы интегрирования дифференциальных уравнений движения точки

Сила зависит от времени: $F = F(t);$ **Метод разделения переменных**

$$m\frac{dv}{dt} = F(t); \quad m \cdot dv = F(t)dt; \quad m\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} F(t)dt; \quad m(v - v_0) = \Phi(t), \text{ где } \Phi(t) = \int_{t_0}^{t} F(t)dt; \quad v = \frac{1}{m}\Phi(t) + v_0;$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}\Phi(t) + v_0, \quad ds = \left(\frac{1}{m}\Phi(t) + v_{x0}\right)dt, \quad \int_{s_0}^{s} ds = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\Phi(t)dt + \int_{t_0}^{t} v_0 dt, \quad s = \frac{1}{m}\Psi(t) + v_0 t + s_0,$$

Сила зависит от скорости: $F = F(v);$ **Метод разделения переменных**

$$m\frac{dv}{dt} = F(v); \quad m\frac{dv}{F(v)} = dt; \quad m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)} = \int_{t_0}^{t} dt; \quad m[\Phi(v) - \Phi(v_0)] = t - t_0, \text{ где } \Phi(v) = \int\frac{dv}{F(v)}; \quad \Phi(v_0) - const;$$

Сила зависит от перемещения: $F = F(s);$ **Метод замены переменных**

$$m\frac{dv}{dt} = F(s); \quad m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{ds}{ds} = F(s); \quad m\frac{v \cdot dv}{ds} = F(s); \quad m \cdot vdv = F(s)ds; \quad m\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{s_0}^{s} F(s)dt;$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Phi(s), \text{ где } \Phi(s) = \int_{s_0}^{s} F(s)ds; \qquad v = \sqrt{\frac{2}{m}\Phi(s) + v_0^2};$$

Дифференциальные уравнения движения точки

4. Примеры решения задач

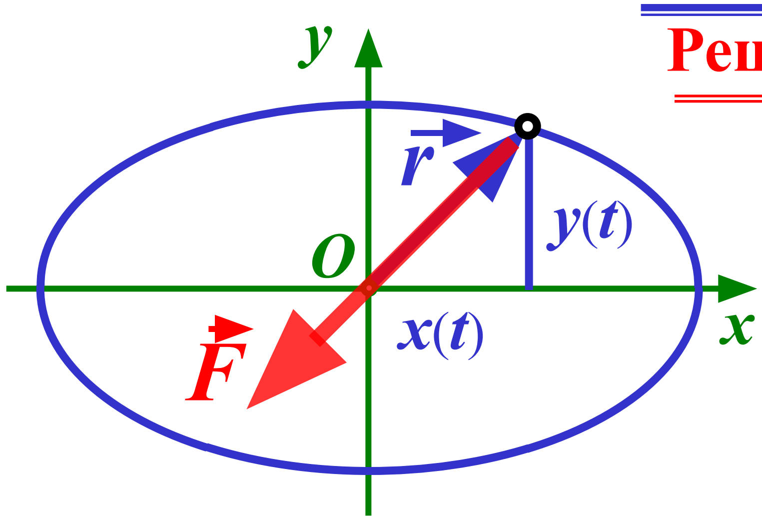
4.1. Пример 1

Точка, имеющая массу m, движется в плоскости xOy согласно уравнениям

$x = a\cdot\cos(kt);$

$y = b\cdot\sin(kt)$, *где a, b, k – постоянные, t – время.*

Найти *силу, под действием которой точка совершает это движение.*



Решение: *Уравнение траектории:*

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot\cos(kt) \\ y &= b\cdot\sin(kt) \end{aligned}\right|\ \begin{aligned}\square^2 \\ \square^2\end{aligned}\ \oplus$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = \cos^2(kt) + \sin^2(kt);$$

Эллипс

$$\boxed{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1}\qquad \boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2a\cdot\cos(kt) = -mk^2x \\ F_y &= m\frac{d^2y}{dt^2} = -mk^2b\cdot\sin(kt) = -mk^2y \end{aligned}\right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2r; \\ \cos(\vec{F}, x) &= F_x/F = -x/r; \\ \cos(\vec{F}, y) &= F_y/F = -y/r. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $F = mk^2r$

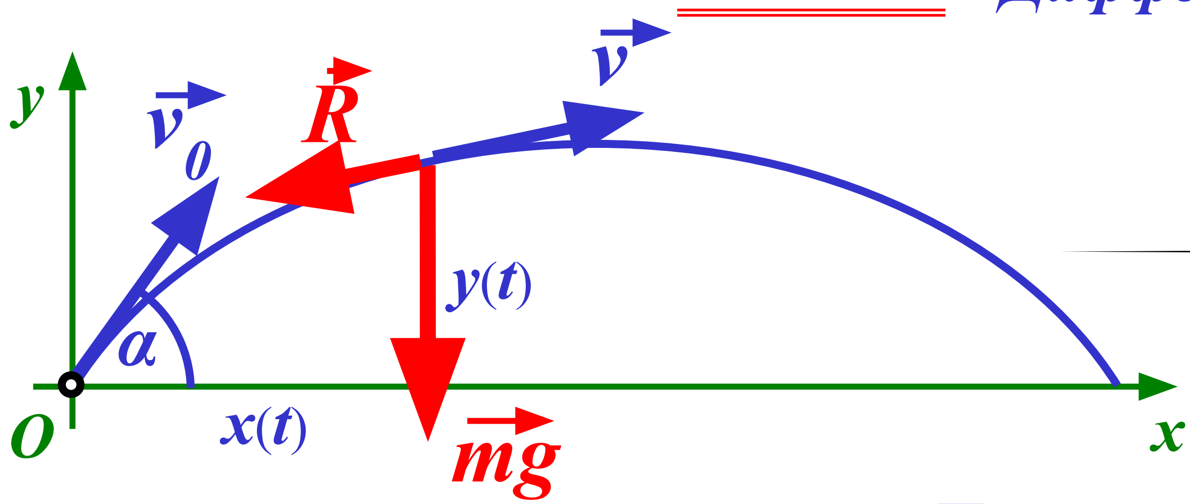
Дифференциальные уравнения движения точки

4. Примеры решения задач

4.2. Пример 2

*Точка, имеющая массу **m**, брошена с поверхности земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту в вертикальной плоскости. Сила сопротивления воздуха направлена против движения и пропорциональна скорости и массе $R = kmv$.*

***Найти** уравнения движения точки.*



Решение: *Дифференциальные уравнения движения точки:*

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -R_x; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg - R_y; \end{cases}$$

Понижение порядка дифуравнений:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mkv_x; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg - mkv_y; \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt}; \\ v_y = \dfrac{dy}{dt}; \end{cases} \quad \begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = -mkv_x; \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -mg - mkv_y; \end{cases}$$

Начальные условия:

При $t = 0$:

$$\begin{cases} x_0 = 0;\ y_0 = 0; \\ v_{x0} = v_0 \cos\alpha; \\ v_{y0} = v_0 \sin\alpha; \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения точки

4. Примеры решения задач

4.2. Пример 2

Точка, имеющая массу m, брошена с поверхности земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту в вертикальной плоскости. Сила сопротивления воздуха направлена против движения и пропорциональна скорости и массе $R = kmv$.

Найти *уравнения движения точки.*

Решение:

Разделение переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{kv_x} = -dt; \\ \dfrac{dv_y}{g - kv_y} = -dt; \end{cases}$$

Интегрирование:

$$\begin{cases} \displaystyle\int \dfrac{dv_x}{kv_x} = -\int dt; \\ \displaystyle\int \dfrac{dv_y}{g + kv_y} = -\int dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ln(v_x) = -kt + ln\, C_1; \\ ln\left(v_y - \dfrac{g}{k}\right) = -kt + ln\, C_2; \end{cases}$$

Результат:

$$\begin{cases} v_x = C_1 e^{-kt}; \\ v_y = -\dfrac{g}{k} + C_2 e^{-kt}; \end{cases}$$

Определение произвольных постоянных:

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos\alpha; \\ C_2 = \dfrac{g}{k} + v_0 \sin\alpha; \end{cases}$$

Окончательный результат первого интегрирования:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \cdot e^{-kt}; \\ v_y = -\dfrac{g}{k} + \left(\dfrac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right) e^{-kt}; \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения точки

4. Примеры решения задач

4.2. Пример 2

Точка, имеющая массу m, брошена с поверхности земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту в вертикальной плоскости. Сила сопротивления воздуха направлена против движения и пропорциональна скорости и массе $R = kmv$.

Найти *уравнения движения точки.*

Решение:

Разделение переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \cdot e^{-kt}; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{g}{k} + \left(\dfrac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right) e^{-kt}; \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = \left(v_0 \cos\alpha \cdot e^{-kt}\right) dt; \\ dy = \left[-\dfrac{g}{k} + \left(\dfrac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right) e^{-kt}\right] dt; \end{cases}$$

Интегрирование:

$$\begin{cases} \int dx = v_0 \cos\alpha \cdot \int e^{-kt} dt; \\ \int dy = -\int \dfrac{g}{k} dt + \left(\dfrac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right) \int e^{-kt} dt; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{k} v_0 \cos\alpha \cdot e^{-kt} + C_3; \\ y = -\dfrac{g}{k} t - \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right) e^{-kt} + C_4; \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения точки

4. Примеры решения задач

4.2. Пример 2

*Точка, имеющая массу **m**, брошена с поверхности земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту в вертикальной плоскости. Сила сопротивления воздуха направлена против движения и пропорциональна скорости и массе $R = kmv$.*

***Найти** уравнения движения точки.*

Решение:

Определение произвольных постоянных:

$$\begin{cases} C_3 = \dfrac{1}{k} v_0 \cos\alpha; \\ C_4 = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right); \end{cases}$$

Окончательный результат второго интегрирования:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{k} v_0 \cos\alpha\left(1 - e^{-kt}\right); \\ y = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \dfrac{g}{k} t. \end{cases}$$

Ответ:

$$x = \frac{1}{k} v_0 \cos\alpha\left(1 - e^{-kt}\right), \quad y = \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k} t.$$